論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　甲　　第　　　号

氏　　　　　名　　瀬　戸　　　樹

論　文　題　目

An index theorem for Toeplitz operators on partitioned manifolds
(分割された多様体における Toeplitz 作用素の指数定理)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　　啓　史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D
森　吉　　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　理学博士
谷　川　　好　男

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川　村　　友　美

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Atiyah-Singer の指数定理は、閉（境界のないコンパクトな）C^∞ 多様体上の楕円型微分作用素の解析的指数と位相的指数が一致することを主張する。その後、様々な方向への一般化が研究されてきているが、本論文で扱う主題は、非コンパクト多様体への拡張である。ここで解析的指数とは核の次元から余核の次元を引いた Fredholm 指数をさす。

完備リーマン多様体 M 上のエルミートベクトル束の L^2 切断に作用する有界作用素で、対角線集合の一様な近傍に台をもつ滑らかな積分核をもつもののなす C^* 代数を $C^*(M)$ と書き、ここでは Roe 代数と呼ぶこととする。J. Roe は、閉多様体上の Dirac 作用素の Fredholm 指数の対応物として、今日 assembly 写像と呼ばれる写像を用いて $\mathrm{ind}\, D$ を $K_*(C^*(M))$ の要素として定式化した。

今、完備リーマン多様体 M が余次元 1 のあるコンパクトで境界のない部分多様体 N で分割されているとする。例えば $M = N \times \mathbb{R}$ のとき、その分割としては $M_- = N \times \mathbb{R}_{\leq 0}, M_+ = N \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ が典型的な例を与える。N 上には Dirac 作用素 D_N^+ が定義され、古典的な Atiyah-Singer の指数定理の意味でその指数 $\mathrm{index}\, D_N^+$ が定まる。この状況で J. Roe は、M の分割 M_-, M_+ から定まる巡回 1 コサイクルを用いて加法的写像 $\zeta_* : K_1(C^*(M)) \to \mathbb{C}$ を構成し、次の定理を証明した。

定理 (J.Roe)　$\zeta_*(\mathrm{ind}\, D) = -\frac{1}{8\pi i}\, \mathrm{index}\, D_N^+$.

その後、Schick-Zadeh による多重分割の場合に Roe の定理を一般化するなどいくつかの一般化が得られているが、いずれの場合も N の次元が奇数ならば $\mathrm{index}\, D_N^+$ は自動的に 0 になり、自明な帰結を導くものである。本論文で扱うのはまさにその場合である。すなわち、Roe の場合のような分割をもつ完備リーマン多様体 M で切り口 N の次元が奇数である場合に、非自明な指数定理とは何かという問いに答えるものである。いくつかアイデアが必要となる。左辺の $\mathrm{ind}\, D$ に対応する $K_1(C^*(M))$ の要素及び右辺の $\mathrm{index}\, D_N^+$ に対応するものは何か、両方答えなければならない。

まず、左辺に現れる $K_1(C^*(M))$ の要素を定式化するために、申請者がとった方法は以下の通りである。M 上の滑らかで有界な関数で勾配ベクトル場も有界である関数全体によって生成される C^* 環 $C_w(M)$ を導入し、M 上の Dirac 作用素 D は KK 群 $KK^0(C_w(M), C^*(M))$ の要素を定めることを示す。次に、$\phi \in GL_l(C_w(M))$ に対し、Kasparov 積

$$KK^0(C_w(M), C^*(M)) \times K_1(C_w(M)) \to K_1(C^*(M))$$

を用いて $\mathrm{Ind}(\phi, D) \in K_1(C^*(M))$ の要素を得る。

一方、右辺については、N 上の作用素として Dirac 作用素ではなく Toeplitz 作用素を考える。奇数次元多様体上で Toeplitz 作用素の指数を考えるアイデアは Baum-Douglas に遡る。本論文で扱う Toeplitz 作用素は次で定まるものである。N 上の Dirac 作用素の非負固有値に対応する固有空間を H_+ とし、H_+ への射影を P とした時、$\phi \in GL_l(C_w(M))$ に対して、Toeplitz 作用素を $T_{\phi|_N} = P \circ \phi|_N \circ P^* : H_+^l \to H_+^l$ と定める。これは Fredholm 作用素となりその指数が定義される。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

この時、本論文の主結果は次である。

定理（瀬戸） $\zeta_*(\mathrm{Ind}(\phi, D)) = -\frac{1}{8\pi i}\,\mathrm{index}\,T_{\phi|_N}$.

実際、N が奇数次元の場合に右辺は一般には 0 にならない。証明は、まず Higson の方法を援用することにより、$M = N \times \mathbb{R}$ の場合に帰着させる。このとき、補助的な Fredholm 作用素を考え、指数のホモトピー不変性を用いて実際に両辺の作用素と補助的な作用素との間にホモトピーをそれぞれ構成することによって行われる。実際にホモトピーを構成する際に、作用素ノルムで連続な道を探すことや端点でのノルムの詳しい評価などいくつか注意深い解析的な議論が必要となる。また、証明の過程において $K_1(C^*(M))$ の要素を定義する際に申請者が導入した C^* 環 $C_w(M)$ が有効に用いられる。ここを、例えば Roe の定理を C^* 環の文脈で再構築する際に用いられた Higson 環 $C_h(M)$（勾配ベクトル場が無限遠点で消える有界関数の生成する C^* 環）を用いてはうまくいかないことが観察される。$C_w(M)$ を考えたところは申請者のアイデアである。

本論文では、以上の結果に加え、証明に必要な C^* 環の基礎事項、Roe の定理の証明の骨格の解説など総説的な記述も含まれている。

本論文は切り口が奇数次元の場合に非自明な指数定理とは何か、という問いに対する一つの解答を与えるものであり、ユニークでありかつアイデアも明解である。当該研究にとって意義ある結果と考えられる。本論文に関する公開審査会を 2016 年 1 月 28 日に行い、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した。以上により、本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があると判断する。