

学位論文

電気双極子モーメントで探る標準模型を超える物理

名古屋大学大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻

小林大輝

2016年3月

概要

2012年にLHC実験によってヒッグス粒子の存在が確立され、素粒子標準模型が予言する粒子は全て発見された。標準模型は現在までの実験結果を非常によく説明できる理論であるがゲージ階層性問題を説明できない、暗黒物質の候補がないなど理論的問題や実験、観測的問題が残されており、標準模型を超える物理の存在が示唆されている。

電気双極子モーメントは CP 対称性を破る物理量であり、実験から核子や電子の電気双極子モーメントに対して制限が与えられている。標準模型では電気双極子モーメントは非常に小さいことが予言されているので、電気双極子モーメントは標準模型を超える物理の CP の破れに対して非常に高い感度のある物理量であるといえる。

本論文ではこの電気双極子モーメントを用いて2つの標準模型を超える物理の研究を行った。1つ目は“電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論”についての研究である。数ある暗黒物質の候補の中で有力なものに電弱相互作用をする暗黒物質と呼ばれるものがある。これは暗黒物質は $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージ相互作用を通じてのみ標準模型の粒子と相互作用をするというものである。この研究ではボトムアップの立場を取り、この電弱相互作用をする暗黒物質が高いスケールで実現されている何らかの理論の有効理論であるとし、低エネルギーにこの有効理論をもつ理論について一般的な解析を行った。有効理論を作る仮定として暗黒物質はフェルミオンで標準模型のヒッグス粒子と相互作用をしているとする。一般にはそのような相互作用には CP を破る結合定数が含まれるため電気双極子モーメントを生じる。この相互作用はさらにヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出に対しても寄与を与える。解析の結果、暗黒物質の量子数が変わるとこれら3つの物理量の振る舞いが変化することがわかり、特に $\mathcal{O}(100)$ GeVの質量を持つ暗黒物質に対しては将来実験を用いれば標準模型を超える物理のスケールが $\mathcal{O}(100)$ TeVまでの領域をほとんど全て調べられ、暗黒物質の量子数を区別できる可能性があることを示した。

2つ目の主題は“高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメント”についての研究である。超対称性とはボソンとフェルミオンを入れ替える対称性であり、標準模型に超対称性を導入した模型で最も単純なものは最小超対称標準模型と呼ばれる。この模型には暗黒物質の候補があることや、高いエネルギーでゲージ結合定数が精度良く統一し大統一理論とも相性が良いことなどの魅力的な性質がある。しかしLHC実験で標準模型を超える物理の兆候がないことやヒッグス粒子の質量を実験結果で得られたものよりも軽く予言してしまうことから最も単純な模型を拡張する必要がある。そこで本論文では最も単純な模型の拡張として高いスケールの超対称模型を考える。この模型ではスフェルミオンは100 TeV付近の質量を持っており、一方でゲージノは数 TeV 付近の質量を持っている。この質量スペクトルを実現する最も単純な模型はアノマリー媒介機構を用いたものであり、より一般的な模型としてゲージ媒介機構を含む模型も提案されている。このような拡張された模型ではゲージノの質量に物理的な位相が生じ、さらにゲージノと超対称性の破れを伝えるメッセンジャーとの間の相互作用にも物理的な位相が生じる。これらの位相は新たな CP の破れの源となり、グルイーノのカラー電気双極子モーメントを生じ、核子の電気双極子モーメントに対して新たな寄与となる。そのためこの研究ではこの拡張された高いスケールの超対称模型において、核子の電気双極子モーメントに対するグルイーノの寄与の詳細を明らかにした。その結果、この新たな寄与が最も単純な模型でもある Barr-Zee ダイアグラ

μの寄与と同程度の寄与になるパラメータ領域があることがわかり、核子の電気双極子モーメントを用いてモデルを区別できる可能性を示した。

目次

第 1 章	序論	4
第 2 章	素粒子標準模型	7
2.1	標準模型の対称性の自発的破れ	7
2.2	標準模型の CP 対称性の破れ	10
2.2.1	QCD θ 項	10
2.2.2	小林-益川行列	12
第 3 章	電気双極子モーメント	17
3.1	定義	17
3.2	電気双極子モーメントの有効理論	18
3.2.1	ハドロンスケールの有効理論	18
3.2.2	観測量としての電気双極子モーメントと核子のスケールでの CP を破る演算子	19
3.3	電気双極子モーメント測定	20
3.4	標準模型の電気双極子モーメント	22
第 4 章	ヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出	25
4.1	ヒッグス粒子の崩壊	25
4.2	暗黒物質	27
4.3	暗黒物質の直接検出	29
第 5 章	電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論	34
5.1	導入	34
5.2	有効理論	34
5.3	現象論	39
5.3.1	電気双極子モーメント	40
5.3.2	ヒッグス粒子の崩壊	43
5.3.3	暗黒物質の直接検出	45
5.4	結果	46
5.5	第 5 章の結論	50
第 6 章	超対称標準模型	52
6.1	最小超対称標準模型	52
6.2	高いスケールの超対称模型	55

第 7 章	高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメント	57
7.1	導入	57
7.2	ゲージノの質量と複素位相	58
7.3	ゲージノのカラー電気双極子モーメントと Weinberg 演算子	61
7.4	核子の電気双極子モーメント	63
7.5	数値解析	64
7.6	第 7 章の結論	71
第 8 章	結論	72
	謝辞	73
付 録 A	記法と慣習	74
付 録 B	離散的対称性	76
B.1	P 変換	76
B.2	C 変換	76
B.3	T 変換	77
B.4	まとめ	77
B.5	フェルミオン双一次形式	78
B.6	非相対論的な場合	79
付 録 C	くりこみ群方程式	80
C.1	くりこみ定数	80
C.2	グリーン関数に対するくりこみ群方程式	81
C.3	ベータ関数と異常次元	83
C.4	複合演算子のくりこみ	85
C.5	ベータ関数	87
C.6	超対称性理論	89
C.7	QCD	90
C.8	具体的な値	90
付 録 D	第 5 章の電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論に関する付録	92
D.1	計算に用いるラグランジアン	92
D.2	カイラル変換をした後の相互作用ラグランジアン	94
D.3	d_f^{hV} の計算	95
D.4	d_f^{WW} の計算	100
D.4.1	1 つ目のループ	101
D.4.2	2 つ目のループ	104
D.4.3	d_f^{WW} の計算	108
D.5	$h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングスの計算	109
D.6	$h \rightarrow \gamma\gamma$ のループ関数	111
D.7	暗黒物質の直接検出における電弱相互作用による寄与	114

付録 E 第 7 章の高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメントに関する 付録	117
E.1 計算で用いたラグランジアン	117
E.1.1 ゲージノ質量	117
E.1.2 グルイーノのカラー電気双極子モーメント	119
E.2 グルイーノのカラー電気双極子モーメント	119
E.3 Weinberg 演算子の Wilson 係数	122
E.4 CP を破る演算子のくりこみ群方程式	125
E.5 核子の電気双極子モーメントに対する QCD 和則	126
E.6 Barr-Zee ダイアグラムによる寄与	127
参考文献	132

第1章 序論

素粒子物理学の目標はこの宇宙の最小の構成要素である素粒子は何であって、その素粒子はどのような物理法則に従っているかということを知ることである。現在、我々はこの問に対して素粒子は物質を構成するクォークとレプトン、力の媒介をするゲージ粒子、質量の起源で対称性の破れを起こすヒッグス粒子であり、それらの従う物理法則は $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージ理論であると答えることができる。この理論は素粒子標準模型 (Standard Model, SM) と呼ばれている [1-3]。2012年には標準模型が予言する最後の未発見の粒子であるヒッグス粒子が大型ハドロン衝突型加速器実験 (Large Hadron Collider, LHC) で発見され [4,5]、標準模型は完成したと言える。しかし素粒子標準模型がこの宇宙を記述する究極の理論であるかというところではなく、素粒子標準模型には理論的問題や、実験、観測的問題が数多く存在している。例えば実験、観測的問題は以下のようなものがあげられる。

- 暗黒物質の問題。宇宙の観測では光を放たない暗黒物質が存在していることがわかっているが標準模型には暗黒物質の候補となる粒子が存在しない。
- ニュートリノの質量の問題。標準模型ではニュートリノは質量を持たないとされているが実験や観測でニュートリノは僅かであるが質量を持っていることがわかっている。

理論的な問題に関しては以下のようなものがあげられる。

- ヒッグス粒子の質量に対する階層性問題 (ゲージ階層性問題)。標準模型がプランクスケールまで適応できるとするとヒッグス粒子の裸の質量と量子補正の間に不自然な打ち消し合いが起こってなければならない。
- 電荷の量子化の問題。実験で陽子の電荷と電子の電荷は符号が逆で大きさが一致していることが知られている。しかし標準模型では $U(1)_Y$ の値は自由にとれるはずなのだがなぜ離散的になっているのかは説明できない。
- アノマリーの相殺の問題。ゲージ対称性に対するアノマリーが理論に存在する場合にはゲージ対称性が破れてしまい理論のくりこみ可能性を破壊し、理論の予言能力を失ってしまう。標準模型ではアノマリーの相殺は非常に非自明な形で起こっており、説明が必要である。

このように数多くの問題があるため、これらの問題点を解決することができるような標準模型を超える物理が存在していることが期待される。

標準模型を超える物理を考える上で様々なアプローチが存在するがこの博士論文では次の2つのアプローチを用いる。1つは模型に依存しない方法であり、これは有効理論という考え方をを用いている。有効理論とは理論に含まれている粒子の質量に大きな階層性がある場合、低エネルギーの有効理論は軽い粒子の場のみの自由度でラグランジアンを記述できるというものである。このとき低エネルギーの有効理論では重い粒子の情報は軽い粒子の演算子の係数 (Wilson 係数) に含ま

れている．ボトムアップの立場を採用すればこの係数を未知のものとして実験結果から Wilson 係数に制限を与え，高いエネルギーの物理の情報を得ることができる．もう 1 つのアプローチは具体的にある特定の模型を定めて解析するという方法である．これは模型に依存しない方法とは異なり，一般的な議論をすることはできないが具体的に模型を決めている分，標準模型を超える物理に対してより多くの情報を得ることができる．

この博士論文では標準模型を超える物理を探るための物理量として電気双極子モーメント (electric dipole moment, EDM) を用いる．電気双極子モーメントは素粒子の持つスピンと電場の相互作用の強さであり， CP を破る物理量である．標準模型の CP の破れの源は小林-益川行列に含まれる位相ただひとつである．その構造から標準模型の電気双極子モーメントは非常に小さいということが知られている [6]．そのため電気双極子モーメントは標準模型を超える物理の CP の破れに対して非常に高い感度の有る物理量である．

この博士論文では主に 2 つの主題について研究を行った．1 つ目は ”電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論 ” についての研究である．暗黒物質は標準模型の問題点でも挙げたように素粒子論と宇宙論の両方にまたがる問題であり，解決されなければならない．数ある暗黒物質の候補の中でも有力なものに WIMP 暗黒物質がある．これは弱く相互作用をする重い粒子 (Weakly Interacting Massive Particle, WIMP) の総称であり，最も簡単なものに電弱相互作用をする暗黒物質 (electroweak-interacting massive particle, EW-IMP) や最も簡単な暗黒物質 (minimal dark matter) と呼ばれるものがあり，近年よく研究されている [7–14]．この暗黒物質は $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージ相互作用を通じてのみ標準模型の粒子と相互作用をするというものである．この電弱相互作用をする暗黒物質は高いエネルギースケールの理論の有効理論として実現されることも知られている．例えば超対称標準模型においてはそれぞれヒッグシーノやウィーノが対応する．そのためこの研究ではボトムアップの立場を取り，この電弱相互作用をする暗黒物質が高いスケールで実現されている何らかの理論の有効理論であるとし，低エネルギーにこの有効理論を持つ理論について一般的な解析を行う．この有効理論は標準模型の粒子の場と電弱相互作用をする暗黒物質の場のみで記述されている．また有効理論を作る仮定の 1 つとして暗黒物質はフェルミオンで標準模型のヒッグス粒子と相互作用をしているとする．一般にはそのような相互作用には CP を破る結合定数が含まれるため電気双極子モーメントを生じる．さらにこの相互作用はヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出に対しても寄与するのでこれらの物理量を用いてこの有効理論を解析する．

2 つ目の主題は ”高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメント ” についての研究である．超対称性 (supersymmetry, SUSY) はボソンとフェルミオンを入れ替える対称性であり，標準模型に超対称性を導入した模型は超対称標準模型 (supersymmetric standard model, SUSY SM) と呼ばれる．またその中でも最も単純なものは最小超対称標準模型 (minimal supersymmetric standard model, MSSM) と呼ばれる．MSSM には R パリティと呼ばれる離散的な対称性が理論に課されており，最も軽い超対称粒子 (lightest supersymmetric particle, LSP) はこの対称性のため崩壊することができないことから暗黒物質の魅力的な候補になる．標準模型のゲージ群をより大きなゲージ群である $SU(5)$ や $SO(10)$, E_6 の中に埋め込むことで得られた理論は大統一理論 (grand unified theory, GUT) と呼ばれ，電荷の量子化の問題やアノマリーの相殺の問題を解決することができる．MSSM では高いエネルギーのスケールでゲージ結合定数が非常に精度よく一致することが知られており，超対称性理論は大統一理論とも非常に相性が良いことが知られている [15–19]．

このような魅力的な性質を多く持つ超対称標準模型であるが LHC の実験では標準模型を超える物理の兆候を示す結果は得られていない．また超対称性粒子の質量が $\mathcal{O}(1)$ TeV より小さい最小

超対称標準模型ではヒッグス粒子の質量が軽くなりすぎてしまい、観測されたヒッグス粒子の質量を説明できない。これらの事実から MSSM では不十分でこの模型は拡張されなければならないことがわかる。この博士論文ではその拡張として高いスケールの超対称模型を考える [20–22]。

高いスケールの超対称性理論のシナリオではスフェルミオンは 100 TeV 付近の質量を持っており、ゲージノは数 TeV 付近の質量を持っている。このような質量スペクトラムは次のような非常に良い性質を持っている。重いスフェルミオンによって超対称フレーバー問題や超対称 CP 問題の解決が簡単になる [23]。電氣的に中性なウィーノが数 TeV の質量を持つ最も軽い超対称粒子として振る舞う。これは熱的な暗黒物質のシナリオからも支持されている [12]。またこの質量スペクトラムは大統一理論においても大統一スケールでのゲージ結合定数が非常に精度良く統一されたり [24]、カラーを持つヒッグス (colored Higgs) 粒子の交換によって生じる危険な陽子崩壊も重いスカラーの質量によって抑制される [25, 26] など良い性質を持っている。

高いスケールの超対称性理論の最も簡単な模型はアノマリー媒介機構 [27, 28] によるものであるが、より一般的な模型として超対称性の破れのセクターにゲージ媒介機構を含む模型も提案されている [29, 30]。このような拡張された模型ではゲージノの質量に物理的な位相が生じ、さらにゲージノと超対称性の破れを伝えるメッセンジャーとの間の相互作用にも物理的な位相が生じる。これらの位相は新たな CP の破れの源となる。この CP の破れはグルイーノのカラー電気双極子モーメントを生じ、これは核子の電気双極子モーメントに対して新たな寄与となる。そのためこの研究ではこの拡張された高いスケールの超対称模型において、核子の電気双極子モーメントに対するグルイーノの寄与を明らかにする。

この博士論文の構成は次のようになっている。まず第 2 章では素粒子標準模型の概要と標準模型における CP 対称性の破れについて説明する。続く第 3 章ではこの博士論文で標準模型を超える物理を探るために用いる物理量である電気双極子モーメントについて説明する。第 4 章では電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論についての研究で電気双極子モーメントとともに用いるヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出について説明する。第 5 章ではこの博士論文の 1 つ目の主題である電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論についての研究を行う。第 6 章では超対称標準模型の説明と高いスケールの超対称模型についての説明を行う。第 7 章はこの博士論文の 2 つ目の主題である高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメントについての研究を行う。第 8 章はこの博士論文の結論である。

第2章 素粒子標準模型

この章では素粒子標準模型 (Standard Model, SM) の概要を述べる．この博士論文で議論する電気双極子モーメントは CP 対称性を破る物理量であるため標準模型の CP 対称性の破れの構造についても説明する．

2.1 標準模型の対称性の自発的破れ

標準模型は強い相互作用 (quantum chromodynamics, QCD) と電弱相互作用を記述する理論であり $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージ理論に基づいている [1-3]．このゲージ対称性はヒッグス場が真空期待値を持つことによって $SU(3)_C \otimes U(1)_{EM}$ まで自発的に破れる [31]．以下では標準模型の理論の構造について説明する．

標準模型の粒子は表 2.1 で与えられ，それぞれの量子数も表のとおりに定められている．またクォークとレプトンについては同じ量子数を持つ粒子がそれぞれ3つずつあり，これを世代と呼ぶ．この粒子で記述される標準模型のラグランジアンは以下のようにになっている¹．

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{q}'_L i \not{D} q'_L + \bar{u}'_R i \not{D} u'_R + \bar{d}'_R i \not{D} d'_R + \bar{l}'_L i \not{D} l'_L + \bar{e}'_R i \not{D} e'_R \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -(Y_u)_{ij} \bar{q}'_{Li} \tilde{\Phi} u'_{Rj} - (Y_d)_{ij} \bar{q}'_{Li} \Phi d'_{Rj} - (Y_e)_{ij} \bar{l}'_{Li} \Phi e'_{Rj} + \text{h.c.} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (2.6)$$

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.7)$$

ここで粒子の場に付いている' はゲージの固有状態であることを表す．また添字 $i, j = 1, 2, 3$ は世代の足を表している．さらにこのラグランジアンに加えてゲージ固定項とゴーストのラグランジアンもあるがここでは省略する．その他の量は以下のように与えられている．

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s t^a G_\mu^a - ig T^a W_\mu^a - ig' Y B_\mu \quad (2.8)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.9)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.10)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.11)$$

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^* \quad (2.12)$$

¹ ヒッグス場の4点結合定数を以下のように定義する慣習もある．

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda'}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.1)$$

ここで $\lambda' = 2\lambda$ である．

	スピン	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$Q = T^3 + Y$	B	L
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
u_R	$\frac{1}{2}$	3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
d_R	$\frac{1}{2}$	3	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	0 -1	0	1
e_R	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1	0	1
G_μ^a	1	8	1	0	0	0	0
$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^0 \\ W_\mu^- \end{pmatrix}$	1	1	3	0	1 0 -1	0	0
B	1	1	1	0	0	0	0
$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}$	0	1	2	$\frac{1}{2}$	1 0	0	0

表 2.1: 標準模型の粒子の量子数 . L と R はそれぞれ左巻き右巻きのカイラリティを表す .

ここで G_μ^a の前の生成子は Gell-Mann 行列 λ^a を用いて $t^a = \lambda^a/2$ と書け, W_μ^a の前の生成子は Pauli 行列 σ^a を用いて $T^a = \sigma^a/2$ と書ける .

ここからは電弱対称性 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ の自発的破れを議論し, それぞれの粒子がどのように質量を獲得するかを説明する. ヒッグスポテンシャルは以下のように変形できる.

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \lambda \left(|\Phi|^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (2.13)$$

ここで $|\Phi|^2 = \Phi^\dagger\Phi$ である. これより, ヒッグス場の真空期待値は以下のようになる ².

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\lambda v^2 = \mu^2 \quad (2.15)$$

この真空まわりでヒッグス場を以下のように展開する .

$$\Phi = \begin{pmatrix} -i\phi^+ \\ \frac{v+h+i\phi_Z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

ここで ϕ^\pm と ϕ_Z はそれぞれ W ボソンと Z ボソンの縦波成分に対応するゴールドストーンボソンであり, h が物理的なヒッグス粒子である . この関係式を用いるとヒッグス場のポテンシャルから物理的なヒッグスの 2 次の項は以下のようになる.

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}2\mu^2 h^2 \quad (2.17)$$

² ここでは規格化定数である $\sqrt{2}$ をつけて $v \sim 246$ GeV の真空期待値が得られるが規格化定数を付けずに $v' = v/\sqrt{2} \sim 174$ GeV としている慣習もある .

これよりヒッグスの質量は以下ようになる。

$$m_h = \sqrt{2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2} \quad (2.18)$$

ゲージ場の質量はヒッグス場の運動項に真空期待値を代入することで得られ、以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} \ni (D_\mu \langle \Phi \rangle)^\dagger (D^\mu \langle \Phi \rangle) = \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z_\mu \quad (2.19)$$

ここでゲージ場のゲージの固有状態と質量の固有状態の関係は以下で与えられる。

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

θ_W はワインバーグ角と呼ばれ以下の関係式を満たす。

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.22)$$

これより W ボソンと Z ボソン及び光子の質量は以下ようになる。

$$m_W = \frac{1}{2} g v, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v, \quad m_A = 0 \quad (2.23)$$

フェルミオンの質量は式 (2.5) のヒッグス場に真空期待値を代入することで得られ、以下のようにになる。

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \ni -(M_u)_{ij} \overline{u'_{Li}} u'_{Rj} - (M_d)_{ij} \overline{d'_{Li}} d'_{Rj} - (M_e)_{ij} \overline{e'_{Li}} e'_{Rj} + \text{h.c.} \quad (2.24)$$

ここで M_i ($i = u, d, e$) はゲージの固有状態の質量行列で湯川行列 Y_i ($i = u, d, e$) とヒッグス場の真空期待値を用いて以下で定義される。

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_i v, \quad (i = u, d, e) \quad (2.25)$$

このゲージの質量行列、同じことであるが湯川行列を対角化することでフェルミオンの質量と質量固有状態が得られる。湯川行列を対角化するユニタリ変換を以下のように定義する。

$$u'_L = L_u u_L, \quad u'_R = R_u u_R \quad (2.26)$$

$$d'_L = L_d d_L, \quad d'_R = R_d d_R \quad (2.27)$$

$$e'_L = L_e e_L, \quad e'_R = R_e e_R \quad (2.28)$$

$$\nu'_L = L_e \nu_L \quad (2.29)$$

ここでプライム付きの場はゲージの固有状態でプライムなしの場が質量の固有状態である。この行列を用いれば湯川行列を対角化できて次のようになる。

$$L_u^\dagger Y_u R_u = y_u = \text{diag}(y_u, y_c, y_t) \quad (2.30)$$

$$L_d^\dagger Y_d R_d = y_d = \text{diag}(y_d, y_s, y_b) \quad (2.31)$$

$$L_e^\dagger Y_e R_e = y_e = \text{diag}(y_e, y_\mu, y_\tau) \quad (2.32)$$

これからフェルミオンの質量は以下のように与えられる。

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} y_i v \quad (2.33)$$

また，式 (2.26)-(2.29) のユニタリ変換が標準模型のラグランジアンに影響を与えるのはクォークの荷電カレント相互作用の部分だけであり³，以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}'_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+ + \text{h.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu (V_{\text{CKM}})_{ij} d_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (2.34)$$

ここで V_{CKM} は小林-益川行列 [32, 33] と呼ばれ，式 (2.26)-(2.29) で定義されるユニタリ行列を用いて以下のように定義される。

$$V_{\text{CKM}} = L_u^\dagger L_d = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

小林-益川行列は 3×3 のユニタリ行列であり，クォークの位相変換を用いて非物理的な自由度を取り除くと物理的なパラメータとして 3 つの混合角と 1 つの複素位相が含まれている。また q_L は以下のようにも書けるので d_L に小林-益川行列を押し付けることもできる。

$$q'_L = \begin{pmatrix} L_u u_L \\ L_d d_L \end{pmatrix} = L_u \begin{pmatrix} u_L \\ L_u^\dagger L_d d_L \end{pmatrix} = L_u \begin{pmatrix} u_L \\ V_{\text{CKM}} d_L \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

小林-益川行列は標準模型のフレーバーの破れや CP の破れを議論する際に非常に重要であるため，後の章でより詳しく議論する。

2.2 標準模型の CP 対称性の破れ

CP 対称性とは荷電共役変換 C と空間反転変換 P の積で定義される離散的対称性である。標準模型において CP の破れの源となるものは 2 つある。1 つは QCD θ 項と呼ばれるものであり，もう 1 つは小林-益川位相である。ここではそれぞれの CP の破れの構造について紹介する。

2.2.1 QCD θ 項

標準模型には式 (2.2) のラグランジアン以外にもゲージ対称性を保つ項として以下 CP を破るラグランジアンも考えることができる。

$$\mathcal{L}_{\mathcal{CP}} = \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu} + \theta_2 \frac{g^2}{32\pi^2} W_{\mu\nu}^a \tilde{W}^{a,\mu\nu} + \theta_1 \frac{g'^2}{32\pi^2} B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

ここでそれぞれの量は以下で定義されている。

$$\tilde{G}^{a,\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}^a \quad (2.38)$$

$$\tilde{W}^{a,\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_{\rho\sigma}^a \quad (2.39)$$

$$\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\rho\sigma} \quad (2.40)$$

³厳密にはクォークとゴールドストーンボソンとの相互作用も変更を受ける。

これらの項の中で場の位相の再定義で消えてしまう項は物理的ではない．そこで以下のようなレプトン数とバリオン数の変換を考える⁴．まずレプトン数の変換は以下で与えられる．

$$l_L \rightarrow e^{iL\alpha} l_L, \quad e_R \rightarrow e^{iL\alpha} e_R, \quad q_L \rightarrow q_L, \quad u_R \rightarrow u_R, \quad d_R \rightarrow d_R \quad (2.41)$$

ここで $L = +1$ はレプトン数で α は変換パラメータである．またバリオン数の変換は以下で与えられる．

$$l_L \rightarrow l_L, \quad e_R \rightarrow e_R, \quad q_L \rightarrow e^{iB\beta} q_L, \quad u_R \rightarrow e^{iB\beta} u_R, \quad d_R \rightarrow e^{iB\beta} d_R \quad (2.42)$$

ここで $B = +1/3$ はバリオン数で β は変換パラメータである．これらの変換をするとラグランジアンには以下のようなアノマリー項が付け加わる⁵．

$$\Delta\mathcal{L}_L = \alpha n_g \left[\frac{g^2}{32\pi^2} W_{\mu\nu}^a \widetilde{W}^{a,\mu\nu} - \frac{g'^2}{32\pi^2} B_{\mu\nu} \widetilde{B}^{\mu\nu} \right] \quad (2.43)$$

$$\Delta\mathcal{L}_B = \beta n_g \left[\frac{g^2}{32\pi^2} W_{\mu\nu}^a \widetilde{W}^{a,\mu\nu} - \frac{g'^2}{32\pi^2} B_{\mu\nu} \widetilde{B}^{\mu\nu} \right] \quad (2.44)$$

ここで n_g は世代を表す．これから α, β を適当に選べば式 (2.37) の θ_2 に比例する項は消すことができるため物理的ではない．また θ_1 に比例する項はトポロジ的に自明な量であり，全微分で書けてしまうため物理的ではない．しかし θ はそのような変換で取り除くことができないため物理的なパラメータとして効いてくる．

また湯川行列を対角化した時や小林-益川行列の物理的でない自由度を取り除く時にクォークの位相変換をしたが，実はその中に左巻き粒子と右巻き粒子を逆向きに回す軸性ベクトルの変換が存在する．このような変換はクォークの質量全体の位相に比例したアノマリー項を生じる⁶ [34–36]．このため QCD θ 項のパラメータ θ を以下のように再定義する．

$$\mathcal{L}_{CP} = \bar{\theta} \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \widetilde{G}^{a,\mu\nu} \quad (2.45)$$

$$\bar{\theta} = \theta + \arg(\det M_u M_d) \quad (2.46)$$

ここで M_u, M_d は式 (2.25) で定義されたクォークの質量行列であり， $\arg(\det M_u M_d)$ はクォークの質量の全体の位相を表す．この項は QCD θ 項と呼ばれ，この項は中性子の電気双極子モーメントに寄与することが知られている [37, 38]．素朴な次元解析 (naive dimensional analysis) を用いると中性子の電気双極子モーメントの大きさは以下のように見積もることができる [39]．

$$d_n \sim \frac{e \bar{\theta} m_q}{m_n^2} \quad (2.47)$$

ここで m_q はクォークの質量， m_n は中性子の質量， e は素電荷を表す．より正確には QCD 和則を用いた計算がされており，以下のようなになる [40]．

$$d_n = 4.2 \times 10^{-17} \bar{\theta} [\text{ecm}] \quad (2.48)$$

⁴バリオン数やレプトン数の変換は湯川行列の対角化や小林-益川行列の物理的でない自由度を取り除くときには使っていない全体の位相を変える変換である．

⁵バリオン数の変換では $G_{\mu\nu}^a \widetilde{G}^{a,\mu\nu}$ に比例するアノマリー項はでない．グルーオンとクォークの相互作用はベクトル的 (左巻き粒子と右巻き粒子を区別していない) であり，そのような相互作用を持つ粒子に対してバリオン数の変換のような左巻きの粒子と右巻きの粒子を同じ方向に回すベクトル変換はアノマリー項を出さないためである．ちなみに左巻きの粒子と右巻きの粒子を逆に回す軸性ベクトル変換に対してはグルーオンの寄与はアノマリー項を生じる．

⁶もちろん $W_{\mu\nu}^a \widetilde{W}^{a,\mu\nu}$ や $B_{\mu\nu} \widetilde{B}^{\mu\nu}$ に比例する項もできるがその項を含めてバリオン数とレプトン数の変換で消せばよい．

一方で中性子の電気双極子モーメントの現在の実験的制限は以下で与えられる [41] .

$$|d_n| < 2.9 \times 10^{-26} [\text{ecm}] \quad (2.49)$$

ここから $\bar{\theta}$ に対する制限は以下のようになる .

$$\bar{\theta} \lesssim 10^{-9} \quad (2.50)$$

ここで $\bar{\theta}$ は $0 \leq \bar{\theta} \leq 2\pi$ の範囲の値をとる自由なパラメータであるにも関わらず, 上記のように実験的に非常に強く抑制されている . このことは強い CP 問題 (strong CP problem) と呼ばれ, 微調整の問題 (fine-tuning problem) として知られている .

$\bar{\theta} \simeq 0$ を理論的に説明できるものの 1 つに Peccei-Quinn 機構がある [42, 43] . これは Peccei-Quinn 対称性と呼ばれる近似的な大局的対称性を新たに導入し, その対称性の自発的な破れによって出てくる擬南部-ゴールドストーンボソンによって解決するというものである . この新たなボソンはアキシオン (axion) と呼ばれている .

この博士論文では強い CP の問題は Peccei-Quinn 機構などの何らかの機構で解決されていると仮定して, CP の破れを議論する際には $\bar{\theta}$ は考えない .

2.2.2 小林-益川行列

ここでは小林-益川行列について説明する . 式 (2.35) で導入したように小林-益川行列は以下で定義されている .

$$V_{\text{CKM}} = L_u^\dagger L_d = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

小林-益川行列は 3×3 のユニタリ行列であり, 3 つの混合角と 1 つの CP を破る小林-益川位相でパラメトライズできる . 現在, 標準的に使われているパラメータ表示は以下のとおりである ⁷ [44].

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}} &= \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.53)$$

⁷ ちなみに原論文で使われているパラメータ表示は以下のとおりである [33] .

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta'} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta'} \\ -s_1s_2 & c_1s_2c_3 + c_2s_3e^{i\delta'} & c_1s_2s_3 - c_2c_3e^{i\delta'} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

ここで $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$ である .

ここで $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ である．また混合角 θ_{ij} のとりうる範囲は $0 \leq \theta_{ij} \leq \pi/2$ であり，そのため $s_{ij}, c_{ij} \geq 0$ となる．

実験的には $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ であることが知られており，この階層性を表すのに便利なパラメータ表示を Wolfenstein パラメータ表示と呼び以下のように定義する [45–47]．

$$s_{12} = \lambda = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}} \quad (2.54)$$

$$s_{23} = A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{V_{cd}}{V_{us}} \right| \quad (2.55)$$

$$s_{13}e^{i\delta} = V_{ub}^* = A\lambda^3(\rho + i\eta) = \frac{A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta})\sqrt{1 - A^2\lambda^4}}{\sqrt{1 - \lambda^2[1 - A^2\lambda^4(\bar{\rho} + i\bar{\eta})]}} \quad (2.56)$$

ここで $\bar{\rho}$ と $\bar{\eta}$ は以下のように書ける．

$$\bar{\rho} + i\bar{\eta} = -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \quad (2.57)$$

これはクォークの位相変換に対してアップ型クォークの位相はその複素共役と相殺し，ダウン型クォークの位相は分母分子で相殺することから位相の慣習に対して独立な量になっている．さらにこれを λ で展開すると以下ようになる．

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \dots \right) \quad (2.58)$$

$$\bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \dots \right) \quad (2.59)$$

また $\lambda, A, \bar{\rho}, \bar{\eta}$ によって書かれた小林-益川行列は λ の全ての次数でユニタリ行列になっている．ここで小林-益川行列を Wolfenstein パラメータで展開すると以下ようになる．

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^4}{8} + \mathcal{O}(\lambda^6) & \mathcal{O}(\lambda^7) & 0 \\ \left(\frac{1}{2} - \rho - i\eta\right)A^2\lambda^5 + \mathcal{O}(\lambda^7) & -\left(\frac{1}{8} + \frac{A^2}{2}\right)\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^6) & \mathcal{O}(\lambda^8) \\ \frac{1}{2}(\rho + i\eta)A\lambda^5 + \mathcal{O}(\lambda^7) & \left(\frac{1}{2} - \rho - i\eta\right)A\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^6) & -\frac{1}{2}A^2\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^6) \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

次に視覚的に小林-益川行列を見やすくするものとしてユニタリ三角形を導入する．まず小林-益川行列のユニタリ条件は以下のように書ける．

$$(V_{\text{CKM}})_{ik}(V_{\text{CKM}}^\dagger)_{kj} = \delta_{ij} = (V_{\text{CKM}}^\dagger)_{ik}(V_{\text{CKM}})_{kj} \quad (2.61)$$

独立な式の数はいくつあり，そのうちの 6 個は規格化条件の式であり，他の 6 個は直行条件である．直行条件は複素平面を考えるとその条件から三角形を書くことができる．この三角形はユニタリティ三角形と呼ばれる．6 つ三角形の中で最もよく使われるのは以下のものである．

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (2.62)$$

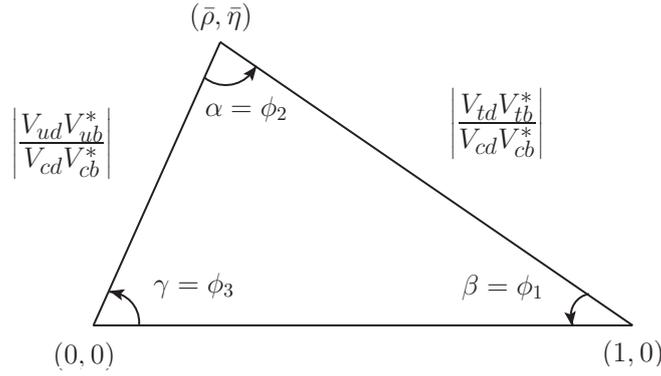


図 2.1: ユニタリ三角系の概略図．これは $V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$ の三角形を表し，底辺の長さが 1 になるように規格化されている．

ここで V_{ij} は $(V_{\text{CKM}})_{ij}$ を省略したものである．この三角形は式 (2.60) を見ればわかるようにどの辺も $\mathcal{O}(\lambda^3)$ となっている．これを底辺の長さが 1 になるように規格化したものを図示したものが図 2.1 である．またこのユニタリ三角形の角度はそれぞれ以下のように表せる．

$$\beta = \phi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right) \quad (2.63)$$

$$\alpha = \phi_2 = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right) \quad (2.64)$$

$$\gamma = \phi_3 = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right) \quad (2.65)$$

標準模型の CP の破れを表す不変量として Jarlskog パラメータまたは Jarlskog 不変量と呼ばれる量を以下のように定義する [48, 49]．

$$J_{CP} \equiv \text{Im}(V_{ud}V_{us}^*V_{cs}V_{cd}^*) \quad (2.66)$$

標準模型において CP を破る物理量は必ずこの形で書けている． J_{CP} は式 (2.61) のユニタリ条件を用いて以下のように様々な組み合わせで書き直すことができる．

$$\begin{aligned} J_{CP} &= \text{Im}(V_{ud}V_{us}^*V_{cs}V_{cd}^*) = \text{Im}(V_{cd}V_{cs}^*V_{ts}V_{td}^*) = \text{Im}(V_{td}V_{ts}^*V_{us}V_{ud}^*) \\ &= -\text{Im}(V_{ud}V_{ub}^*V_{cb}V_{cd}^*) = -\text{Im}(V_{cd}V_{cb}^*V_{tb}V_{td}^*) = -\text{Im}(V_{td}V_{tb}^*V_{ub}V_{ud}^*) \end{aligned} \quad (2.67)$$

またこれらは以下のようにまとめて書くこともできる．

$$\text{Im}(V_{im}V_{in}^*V_{jn}V_{jm}^*) = J_{CP} \sum_{k,l} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} \quad (2.68)$$

ここで $i, j, k = u, c, t$ で $m, n, l = d, s, b$ である．この形から Jarlskog パラメータは位相の慣習によらないことがわかる．また Jarlskog パラメータの大きさはユニタリ三角形の面積 A_Δ を用いて以下のように書ける．

$$|J_{CP}| = 2A_\Delta \quad (2.69)$$

これより全てのユニタリ三角形の面積は等しいことがわかる．ここからは Jarlskog パラメータを具体的に書き下してみる．まず Jarlskog パラメータを式 (2.54)-(2.56) の Wolfenstein パラメータで表すと以下ようになる．

$$J_{CP} = A^2 \lambda^6 \eta + \mathcal{O}(\lambda^8) \quad (2.70)$$

次に Jarlskog パラメータを式 (2.53) のパラメータ表示で書き下すと以下ようになる．

$$J_{CP} = c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{12} s_{13} s_{23} \sin \delta \quad (2.71)$$

この式から標準模型では複素位相 δ が存在していても同じ電荷を持つクォークの質量が縮退していると、その混合角を $s_{ij} = 0$ ととることができてしまい $J_{CP} = 0$ となるので CP の破れは生じないことがわかる．そのため標準模型で CP の破れが起こる必要十分条件は以下で与えられる．

$$\text{Im} [\det([H_u, H_d])] \neq 0 \quad (2.72)$$

ここでエルミート行列 H_u, H_d は式 (2.25) で定義されるゲージの質量行列を用いて以下のように定義されている．

$$H_u = M_u M_u^\dagger, \quad H_d = M_d M_d^\dagger \quad (2.73)$$

この左辺の絶対値を展開すると以下ようになり、 J_{CP} の形から予想できたように同じ電荷を持つクォークの質量差に比例していることが確かめられる．

$$|\text{Im}[\det([H_u, H_d])]| = |(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2)| |J_{CP}| \quad (2.74)$$

次に小林-益川行列の大きさが実験でどのように決められているのか簡単に列挙する．

- $|V_{ud}|$: 原子核のベータ崩壊 $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$.
- $|V_{us}|$: K メソンのセミレプトニック崩壊 $K \rightarrow \pi l \nu$.
- $|V_{cd}|$: チャームクォークのセミレプトニック崩壊 $D \rightarrow \pi l \nu$.
- $|V_{cs}|$: D メソンのセミレプトニック崩壊 $D \rightarrow K l \nu$.
- $|V_{cb}|$: B メソンからチャームクォークへのセミレプトニック崩壊 $B \rightarrow D l \bar{\nu}$.
- $|V_{ub}|$: B メソンの崩壊 $B \rightarrow X_u l \bar{\nu}$.
- $|V_{td}|, |V_{ts}|$: $B-\bar{B}$ 振動 .
- $|V_{tb}|$: トップクォークの崩壊 $t \rightarrow W b$.

小林-益川理論を検証するための実験は数多く行われており、CKMfitter グループと UTfit グループはそれらのデータから小林-益川行列のパラメータをフィットした結果を出している．CKMfitter グループは頻度論的統計学に基づいた方法を採用しており、それを用いて式 (2.54)-(2.56) で定義される Wolfenstein パラメータをフィットすると以下ようになる [47, 50] .

$$\lambda = 0.22537 \pm 0.00061, \quad A = 0.814_{-0.024}^{+0.023} \quad (2.75)$$

$$\bar{\rho} = 0.117 \pm 0.021, \quad \bar{\eta} = 0.353 \pm 0.013 \quad (2.76)$$

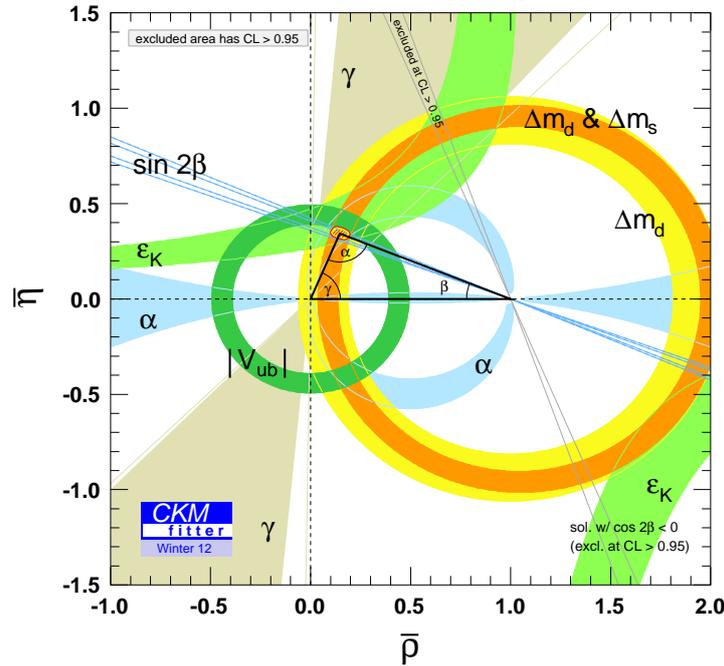


図 2.2: CKMfitter グループによるユニタリ三角形の実験的制限を表した図．これは文献 [47] から転載した．

また，図 2.2 はユニタリ三角形の実験的制限を表したものである [47]．同様に UTfit グループはベイズ統計学に基づいた方法を採用しており，これを用いると Wolfenstein パラメータは以下のようになる [51, 52]．

$$\lambda = 0.2255 \pm 0.0006, \quad A = 0.818 \pm 0.015 \quad (2.77)$$

$$\bar{\rho} = 0.124 \pm 0.024, \quad \bar{\eta} = 0.354 \pm 0.015 \quad (2.78)$$

これらから小林-益川行列の大きさを求めると以下の値が得られる [53]．

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00014 & 0.22536 \pm 0.00061 & 0.00355 \pm 0.00015 \\ 0.22522 \pm 0.00061 & 0.97343 \pm 0.00015 & 0.0414 \pm 0.0012 \\ 0.00886^{+0.00033}_{-0.00032} & 0.0405^{+0.0011}_{-0.0012} & 0.99914 \pm 0.00005 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

また同様に Jarlskog パラメータは以下のようになる [53]．

$$J_{CP} = 3.06^{+0.21}_{-0.20} \times 10^{-5} \quad (2.80)$$

この結果，小林-益川理論の正しさが実験的に証明された．

第3章 電気双極子モーメント

この章では電気双極子モーメント (electric dipole moment, EDM) について説明する．ここでの議論は文献 [54, 55] を参考にした．

3.1 定義

古典的な電気双極子モーメント $d_{\text{classical}}(\boldsymbol{x})$ は電荷の偏りに起因するベクトル量で以下で定義される．

$$d_{\text{classical}}(\boldsymbol{x}) = \int d^3x_0 (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}) \rho(\boldsymbol{x}_0) \quad (3.1)$$

ここで ρ は電荷密度である．しかし素粒子に固有の電気双極子モーメントは素粒子が点電荷であるためこのようには定義できず，素粒子に固有の唯一のベクトル量であるスピン S を用いて定義される．特に非相対論的な場合には電気双極子モーメントはスピンと電場 E の相互作用の大きさとして以下のハミルトニアンで与えられる．

$$\mathcal{H}_{\text{EDM}} = -\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{d} = d \frac{\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{S}|} \quad (3.2)$$

ここで d が電気双極子モーメントである．またこのハミルトニアンを相対論的に拡張すると以下のようなラグランジアンで書ける．

$$\mathcal{L}_{\text{EDM}} = -i \frac{d_f}{2} \bar{\psi}_f \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_f F_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

ここで $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ であり， $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である．そして d_f がフェルミオン ψ_f に対する電気双極子モーメントである．

次に電気双極子モーメントの離散的変換に対する性質を見る．スピンと電場は P と T の下で以下のように変換する¹．

$$P(\boldsymbol{S}) = +\boldsymbol{S}, \quad P(\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E} \quad (3.4)$$

$$T(\boldsymbol{S}) = -\boldsymbol{S}, \quad T(\boldsymbol{E}) = +\boldsymbol{E} \quad (3.5)$$

これらから電気双極子モーメントは P と T 破る物理量であり，さらに CPT 定理を仮定すれば CP を破る物理量である．このため電気双極子モーメントは基礎的な物理の CP の破れに対して良い観測量となっている．

また以下のように式 (3.3) の光子をグルーオンに置き換えた演算子も CP を破り，カラー電気双極子モーメント (chromoelectric dipole moment, CEDM) と呼ばれる．

$$\mathcal{L}_{\text{CEDM}} = -i \frac{\tilde{d}_f}{2} \bar{\psi}_f g_s \sigma^{\mu\nu} t^a \gamma_5 \psi_f G_{\mu\nu}^a \quad (3.6)$$

ここで t^a は $SU(3)_C$ の生成子であり， $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ である．

¹ 相対論的な場合の議論は付録 B を参照する．

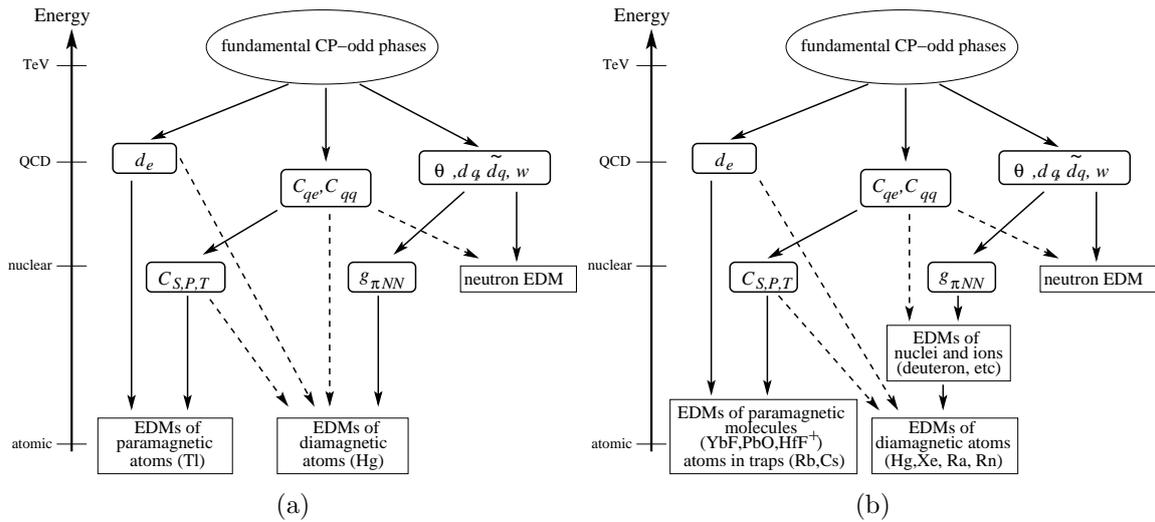


図 3.1: 電気双極子モーメントの計算の概略図．文献 [55] より転載．

3.2 電気双極子モーメントの有効理論

電気双極子モーメントは原子や核子のスケールで測定されており，基礎的な CP を破る位相をもつと考えられている高エネルギーの理論のスケールとは大きな開きがある．このように理論に含まれている粒子の質量に大きな階層性がある場合には有効理論を用いると便利である．有効理論において低いエネルギースケールでの有効ラグランジアンは，そのエネルギースケールで有効な自由度である軽い粒子のみの有効演算子で書くことができるため各エネルギースケールで独立に扱える．また高いエネルギースケールの理論の CP の破れの情報は有効演算子の係数である Wilson 係数に押し込められているため，それぞれの有効理論をつなぐには Wilson 係数を求める操作を各エネルギースケールでの有効理論を用いねばならない．これを模式的に表したのが図 3.1 である．また CP を破っている高エネルギーの理論を扱うとき以外のスケールでの解析は模型に依存しないものになっている．

以下では各スケールでの有効理論を見ていく．

3.2.1 ハドロンスケールの有効理論

クォークとグルーオンが摂動的に扱える最も低いスケールであるハドロンスケール (1 GeV) の有効理論を考える．このスケールでは u, d, s クォーク，グルーオン，光子，ミュー粒子，電子以外のすべての粒子は重いと考えることができ，積分してしまえる．結果として CP を破る有効演算子は以下のように書ける．

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{dim4}} + \mathcal{L}_{\text{dim5}} + \mathcal{L}_{\text{dim6}} + \dots \quad (3.7)$$

次元 4 の演算子は 1 つしかなく，以下で与えられる QCD θ 項である．

$$\mathcal{L}_{\text{dim4}} = \bar{\theta} \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu} \quad (3.8)$$

$$\bar{\theta} = \theta + \arg(\det M_u M_d) \quad (3.9)$$

次元 5 の演算子は素朴には以下のような軽いレプトンとクォークの電気双極子モーメントと軽いクォークのカラー電気双極子モーメントである .

$$\mathcal{L}_{\text{dim}5} = -\frac{i}{2} \sum_{i=u,d,s,e,\mu} d_i \bar{\psi}_i (F \cdot \sigma) \gamma_5 \psi_i - \frac{i}{2} \sum_{i=u,d,s} \tilde{d}_i \bar{\psi}_i g_s (G \cdot \sigma) \gamma_5 \psi_i \quad (3.10)$$

ここで $(F \cdot \sigma) \equiv F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$, $(G \cdot \sigma) \equiv G_{\mu\nu}^a t^a \sigma^{\mu\nu}$ である .

ところでこれらの演算子は今次元 5 の演算子として考えているが大抵の模型では次元 6 の演算子である . 電弱スケールより上では $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージ対称性が回復していると考えられるが, これらの演算子はカイラリティを反転しているためゲージ不変性な演算子にしようと思うとヒッグス場を挿入しなければならない [56] . 実際, 電弱スケールより上で $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 不変な演算子をダウンクォークの基底で書くと以下ようになる² [56] .

$$\mathcal{L}_{\text{dim}6}^{\text{EW}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{q}_L \left[d_1^{\text{EW}} (B \cdot \sigma) + d_2^{\text{EW}} T^a (W^a \cdot \sigma) + d_3^{\text{EW}} t^a (G^a \cdot \sigma) \right] \Phi d_R + \text{h.c.} \quad (3.11)$$

ここで $G_{\mu\nu}^a$, $W_{\mu\nu}^a$, $B_{\mu\nu}$ はそれぞれ $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ の場の強さテンソルである . 電弱スケール以下ではヒッグス場は真空期待値 v 置き換えられるので電気双極子モーメントは真空期待値に比例し, 大抵の場合その真空期待値はフェルミオンの質量 m_f になる . これは電気双極子モーメントが $d_f \sim m_f/M^2$ のようにフェルミオンの質量で抑制されることを意味する .

次元 6 の演算子はグルーオン 3 つで構成される Weinberg 演算子 [57]³ と $(\bar{\psi}_i \Gamma \psi_i)(\bar{\psi}_j \Gamma i \gamma_5 \psi_j)$ で書ける 4 フェルミ演算子である . ここで Γ はスカラーもしくはテンソルのローレンツ構造をもつものがゲージの構造をもつもので可能な組を表す . 4 フェルミ演算子は最も簡単なものだけを書けば有効演算子は以下ようになる .

$$\mathcal{L}_{\text{dim}6} = \frac{1}{3} w f^{abc} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{b,\nu\lambda} G_{\lambda\mu}^c + \sum_{i,j=q,e} C_{ij} (\bar{\psi}_i \psi_i)(\bar{\psi}_j i \gamma_5 \psi_j) + \dots \quad (3.13)$$

次元 5 の演算子の時と同じように考えると 4 フェルミ演算子はカイラリティを 2 回反転しているため大抵の模型では次元 8 の演算子である . しかしこのような演算子が無視できない場合も存在する .

3.2.2 観測量としての電気双極子モーメントと核子のスケールでの CP を破る演算子

観測可能な電気双極子モーメントと核子のスケールでの CP を破る演算子を考える . 観測される電気双極子モーメントに最低次で効くのは核子の電気双極子モーメント d_n , d_p (ここで中性子の電気双極子モーメントはすでに観測量である), 電子の電気双極子モーメント d_e , 電子-核子または核子-核子の CP を破る相互作用である . またクォークとグルーオンの CP を破る相互作用から誘導されるパイ中間子-核子の CP を破る相互作用も必要である . これらの有効ラグランジアンは以下で与えられる .

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{nuclear}} = \mathcal{L}_{\text{EDM}} + \mathcal{L}_{\pi NN} + \mathcal{L}_{eN} \quad (3.14)$$

² u_R に対しては Φ を $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*$ と置き換えれば良い .

³ 以下のようなニュートリノのマヨラナ質量項を生じる演算子も Weinberg 演算子と呼ばれることに注意する [58] .

$$\mathcal{L}_{\text{Weinberg}} = -\frac{(F)_{ij}}{2\Lambda} (\bar{l}_{L_i}^c \tilde{\Phi}^*) (\tilde{\Phi}^\dagger l_{L_j}') + \text{h.c.} \quad (3.12)$$

核子と電子の電気双極子モーメントは以下のとおりである .

$$\mathcal{L}_{\text{EDM}} = -\frac{i}{2} \sum_{j=e,p,n} d_j \bar{\psi}_j (F \cdot \sigma) \gamma_5 \psi_j \quad (3.15)$$

ここで $(F \cdot \sigma) \equiv F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ としている . CP を破るパイ中間子-核子の相互作用は以下のとおりである .

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \bar{g}_{\pi NN}^{(0)} \bar{N} \sigma^a N \pi^a + \bar{g}_{\pi NN}^{(1)} \bar{N} N \pi^0 + \bar{g}_{\pi NN}^{(2)} (\bar{N} \sigma^a N \pi^a - 3 \bar{N} \sigma^3 N \pi^0) \quad (3.16)$$

ここで N は核子のアイソスピン 2 重項で $N = (p, n)^T$ であり , π^a はパイ中間子の場を表す . また σ^a は Pauli 行列である . CP を破る電子-核子相互作用は以下のとおりである .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eN} = & C_S^{(0)} \bar{e} i \gamma_5 e \bar{N} N + C_P^{(0)} \bar{e} e \bar{N} i \gamma_5 N + C_T^{(0)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{e} \sigma^{\mu\nu} e \bar{N} \sigma^{\alpha\beta} N \\ & + C_S^{(1)} \bar{e} i \gamma_5 e \bar{N} \sigma^3 N + C_P^{(1)} \bar{e} e \bar{N} i \gamma_5 \sigma^3 N + C_T^{(1)} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{e} \sigma^{\mu\nu} e \bar{N} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^3 N \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3 電気双極子モーメント測定

ここでは簡単に電気双極子モーメントの測定方法を述べる . 基本原理は , 磁場中および電場中の粒子は歳差運動をするためその振動数を測定するというものである . まずスピンと電場 , 磁場の相互作用は以下の有効ハミルトニアンで与えられる .

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (3.18)$$

ここで $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{d} はそれぞれ磁気双極子モーメント , 電気双極子モーメントと呼ばれおり , 以下で定義されている .

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|}, \quad \mathbf{d} = d \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \quad (3.19)$$

この有効ハミルトニアンから磁場と電場が平行な場合と反平行な場合のエネルギーが以下のように得られる .

$$E_+ = -\mu B - dE, \quad E_- = -\mu B + dE \quad (3.20)$$

ここで + , - の添字はそれぞれ電場が磁場と平行な場合 , 反平行の場合を表す . このエネルギーからスピンの歳差運動の振動数は以下のように得られる .

$$\nu_+ = \frac{2\mu B + 2dE}{h}, \quad \nu_- = \frac{2\mu B - 2dE}{h} \quad (3.21)$$

ここで h はプランク定数を表す . これらより振動数の差は以下ようになる .

$$\Delta\nu = \nu_+ - \nu_- = \frac{4dE}{h} \quad (3.22)$$

この振動数の差を測定することで電気双極子モーメントの大きさ d が得られる .

このように電気双極子モーメントを測定するためには電場をかける必要があるが , 荷電粒子に対して電場をかけるとクーロン力を受けてしまい粒子をその場に留めておけなくなる . そのため全体として電氣的に中性になっている系 (中性子 , 原子 , 分子) に対して電場をかけるか , 荷電粒子を走らせてクーロン力とローレンツ力をつり合わせることで粒子を留める必要がある . しかし前者の場合には以下の Schiff の定理 [59] と呼ばれるものを考慮しなくてはならない .

Schiff の定理

電氣的に中性な系が非相対論的な点粒子から構成され、静電力のもとで平衡状態になっているとき、たとえこの系を構成する粒子が電気双極子モーメントを持っていても、それは測定することができない。

この定理はこの定理の前提となっている系では電場をかけると電気双極子モーメントを打ち消すような電気双極子モーメントが生じることを意味しており、この効果は Schiff 遮蔽 (Schiff shielding) とも呼ばれる。

常磁性原子

常磁性原子 (paramagnetic atom) では Schiff の定理は相対論的效果で破れており、質量数の大きい原子ほどこの効果は大きくなる。電子の電気双極子モーメントこの効果は以下で与えられる [60–63]。

$$d_{\text{para}}(d_e) \sim 10 \times \frac{Z^3 \alpha^2}{J(J+1/2)(J+1)^2} d_e \quad (3.23)$$

ここで J は角運動量で、 Z は原子番号である。この効果は非常に重要で Z の大きい原子を用いればこの効果は数 100 倍にもなる。例えば Tl の電気双極子モーメントは d_e と CP を破る電子-核子相互作用 C_S を用いて以下のように書ける [63–65]。

$$d_{\text{Tl}} = -585 d_e - e 43 \text{ GeV} \times (C_S^{(0)} - 0.2C_S^{(1)}) \quad (3.24)$$

他にも YbF や PbO, PbF, ThO などの常磁性分子の電気双極子モーメントを測定する試みもされている。実際、ThO を用いた ACME 実験が電子の電気双極子モーメント d_e に最も強い制限を与えており、その値は以下で与えられる [66]。

$$|d_e| < 8.7 \times 10^{-29} [\text{ecm}] \quad (3.25)$$

反磁性原子

反磁性原子 (diamagnetic atom) では Schiff の定理は相対論的效果ではなく有限サイズ効果で破れている。この効果は以下のような形で現れる。

$$d_{\text{dia}} \sim 10Z^2 \left(\frac{R_N}{R_A} \right)^2 \tilde{d}_q \quad (3.26)$$

ここで R_N/R_A は核子と原子の半径の比である。例えば水銀 (Hg) の電気双極子モーメントは以下のように与えられる。

$$d_{\text{Hg}} = 7 \times 10^{-3} e(\tilde{d}_u - \tilde{d}_d) + 10^{-2} d_e + \mathcal{O}(C_S) \quad (3.27)$$

また Hg の電気双極子モーメントの実験的制限は以下のようにになっている [67]。

$$|d_{\text{Hg}}| < 3.1 \times 10^{-29} [\text{ecm}] \quad (3.28)$$

これから陽子の電気双極子モーメントを推定したものが実験的には最も強く、以下で与えられている [67]。

$$|d_p| < 7.9 \times 10^{-25} [\text{ecm}] \quad (3.29)$$

中性子

中性子の電気双極子モーメントは超低温の中性子の技術を用いて測定されている．中性子の電気双極子モーメントは QCD 和則と素朴な次元解析 (naive dimensional analysis) を用いて予言されており，例えば Peccei-Quinn 対称性を課した場合の中性子の電気双極子モーメントは以下のようになる [40]．

$$d_n^{\text{PQ}} = -0.20d_u + 0.78d_d + e(0.29\tilde{d}_u + 0.59\tilde{d}_d) + 20 [\text{MeV}]ew \quad (3.30)$$

ここで最後の項が素朴な次元解析で求められた結果であり，それ以外の項は QCD 和則による結果である．QCD 和則による核子の電気双極子モーメントの詳細は付録 E.5 に与えてある．中性子の電気双極子モーメントの現在の実験的制限は以下で与えられている [41]．

$$|d_n| < 2.9 \times 10^{-26} [\text{ecm}] \quad (3.31)$$

実験結果

現在の電気双極子モーメントの実験的制限と将来の実験の感度をまとめたのが表 3.1 である．

電気双極子モーメントの種類	現在の実験的制限	将来実験の感度
中性子	$ d_n < 2.9 \times 10^{-26} [\text{ecm}]$ [41]	$ d_n \sim 10^{-28} [\text{ecm}]$ [68, 69]
陽子	$ d_p < 7.9 \times 10^{-25} [\text{ecm}]$ [67]	$ d_p \sim 10^{-29} [\text{ecm}]$ [70, 71]
電子	$ d_e < 8.7 \times 10^{-29} [\text{ecm}]$ [66]	$ d_e \sim 10^{-31} [\text{ecm}]$ [72, 73]

表 3.1: 現在の電気双極子モーメントの実験的制限と将来の実験の感度のまとめ．

3.4 標準模型の電気双極子モーメント

第 2.2.2 節で議論したように標準模型の中に存在する CP の破れの源となるのは小林-益川位相のみである．小林-益川行列が標準模型のラグランジアンに出てくるのはクォークの荷電カレント相互作用部分のみであり，以下で与えられる．

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Li} \gamma^\mu (V_{\text{CKM}})_{ij} d_{Lj} W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (3.32)$$

標準模型の CP の破れを表す不変量は以下で定義される Jarlskog パラメータであり，非常に小さい値をとる．

$$J_{CP} \equiv \text{Im}(V_{tb}V_{td}^*V_{cd}V_{cb}^*) \simeq 3 \times 10^{-5} \quad (3.33)$$

さらに式 (2.74) でも見たように標準模型の CP の破れの必要十分条件は同じ電荷を持つクォークの質量差にも比例しているため電気双極子モーメントのようなフレーバーを保ち CP を破る物理量は非常に強く抑制されている．標準模型でクォークの電気双極子モーメントを得るには Jarlskog パラメータの組み合わせを作るため，少なくとも 4 つの V_{CKM} に比例した頂点が必要である．

そのためクォークの電気双極子モーメントを得るには，図 3.2 の左図のような 1 ループのダイアグラムから電気双極子モーメントを得ることはできず，図 3.2 の右図のように最低でも 2 ループが必要

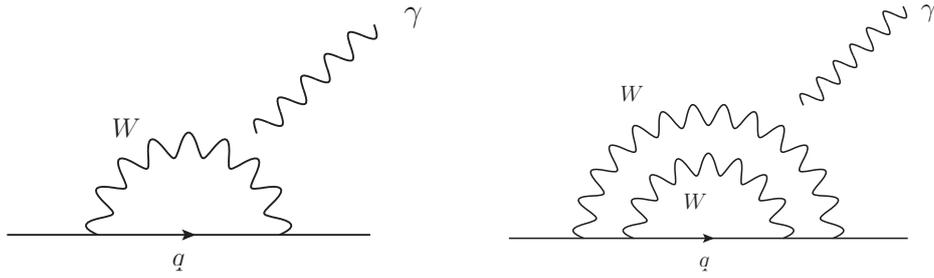


図 3.2: 標準模型において電気双極子モーメント誘導する可能性のあるダイアグラムの例 (左図) 1ループダイアグラム (右図) 2ループダイアグラム . しかしこの2つのダイアグラムの電気双極子モーメントへの寄与はないことがわかっている .

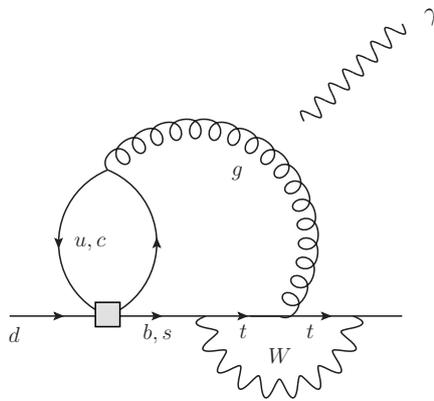


図 3.3: 標準模型における d クォークの電気双極子モーメントの寄与する典型的な 3ループダイアグラム [75] . 図の中の四角い箱は W ボソンを積分することによって得られる 4 フェルミ相互作用を表す .

である . しかし標準模型での 2ループのダイアグラムでは全ての電気双極子モーメントとカラー電気双極子モーメントは完全に消えることが知られおり [6] , 図 3.3 のような 3ループのダイアグラムのみが残る [74, 75] . 3ループの最も効く対数 (leading-log) の近似では d クォークの電気双極子は以下で与えられる [75] .

$$d_d^{\text{CKM}} = e \frac{m_d m_c^2 \alpha_s G_F^2 J_{CP}}{108 \pi^5} \ln^2 \left(\frac{m_b^2}{m_c^2} \right) \ln \left(\frac{m_W^2}{m_b^2} \right) \quad (3.34)$$

ここで G_F はフェルミ定数である . その他の寄与も含めて数値的に評価すると以下ようになる .

$$d_d^{\text{CKM}} \simeq 10^{-34} [\text{ecm}] \quad (3.35)$$

3ループで効く寄与は図 3.4 のようなものもあり , これは Weinberg 演算子を生じる [76] . しかしこの寄与もまた数値的には非常に小さいことが知られている . 事実 , 標準模型において中性子の電気双極子モーメントに最も大きく寄与するのはクォークの電気双極子モーメントやカラー電気双極子モーメントではなく , 図 3.5 で与えられる "強いペンギン" ダイアグラムを介したものである . このダイアグラムから得られる中性子の電気双極子モーメントは以下のように評価されてい

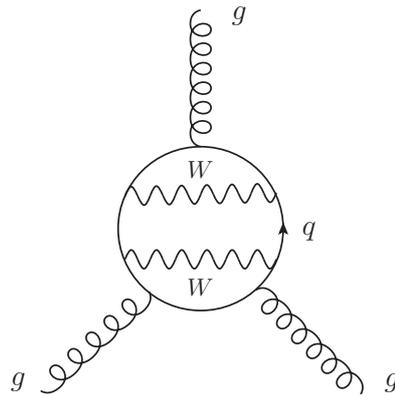


図 3.4: 標準模型において Weinberg 演算子に演算子に寄与する 3 ループダイアグラム .

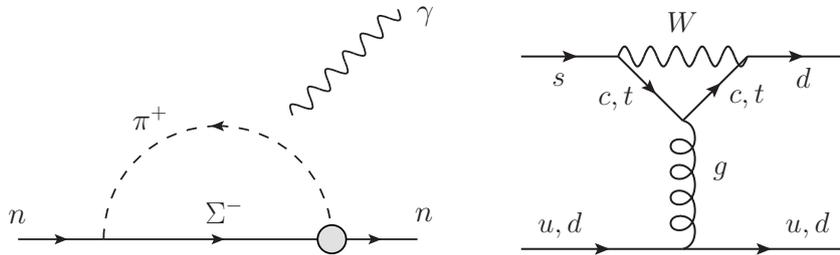


図 3.5: 標準模型において中性子の電気双極子モーメントに最も大きく効く寄与を表すダイアグラム (左図) ハドロンスケールでのダイアグラム (右図) 左図の色のついた丸に対応するダイアグラム . これは "強いペンギン" ダイアグラムと呼ばれる .

る [77-79] .

$$d_n^{\text{CKM}} \simeq 10^{-32} [\text{ecm}] \quad (3.36)$$

しかしこの値は現在の中性子の電気双極子モーメントの実験的制限 $|d_n| < 2.9 \times 10^{-26} [\text{ecm}]$ と比べて 6-7 桁小さい .

レプトンの電気双極子モーメントは閉じたクォークループに W ボソンが付いているダイアグラムから生じる . しかし有限な寄与は 4 ループからしか現れない [80] . そのため標準模型では電子の電気双極子モーメントも非常に抑制されており , 以下のように評価されている .

$$d_e^{\text{CKM}} \leq 10^{-38} [\text{ecm}] \quad (3.37)$$

以上より小林-益川位相が起源の標準模型の電気双極子モーメントはどれも非常に小さい寄与であることがわかる . 標準模型を超える物理を考える際には標準模型の背景事象が非常に小さいので , 電気双極子モーメントは標準模型を超える物理の CP の破れに対して高い感度がある .

第4章 ヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出

ここでは第5章の中で電気双極子モーメントに加えて用いるヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出について説明する．

4.1 ヒッグス粒子の崩壊

標準模型が予言する最後の粒子であるヒッグス粒子は2012年7月にLHCのATLASグループ [4] とCMSグループ [5] で発見され，現在ヒッグス粒子の質量はATLASとCMSの両方の結果から以下の値が得られている [81] ．

$$m_h = 125.09 \pm 0.24 \text{ GeV} \quad (4.1)$$

LHC実験ではヒッグス粒子はグルーオンフュージョン，ベクトルボソンフュージョン，ベクトルボソンの随伴生成，トップクォークの随伴生成から作られる．またヒッグス粒子の崩壊に関してはLHCでは $\gamma\gamma$, ZZ , WW , $\tau\tau$, $b\bar{b}$ の崩壊モードが感度が高く，よく調べられている [82–85] ． $h \rightarrow \gamma\gamma$ はその他の崩壊過程と異なり，ループを介して生じる．これはヒッグス粒子が電氣的に中性であり直接ヒッグス粒子と光子が結合することがないためである．そのためヒッグス粒子と荷電粒子の相互作用があるモデルでは $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊はモデルに対して制限を与える．以下では $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊について一般的に議論する．まず以下のような標準模型のようにヒッグス場から質量を獲得する理論の一般的な相互作用ラグランジアンを考える¹ ．

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{gm_f}{2m_W}\bar{\psi}\psi h + gm_W W_\mu^+ W_\mu^- h - \frac{gm_\phi^2}{m_W}\phi^+\phi^- h + \dots \quad (4.3)$$

ここで ϕ^\pm は複素スカラー粒子で m_ϕ はその質量である．このラグランジアンから得られる $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊幅の1ループの一般式は以下で与えられる [86–89] ．

$$\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2 m_h^3}{256\pi^3 v^2} |\mathcal{A}|^2 = \frac{\alpha^2 m_h^3}{256\pi^3 v^2} \left| \sum_i N_{C_i} Q_i^2 F_i(\tau_i) \right|^2 \quad (4.4)$$

ここで i はループを回る粒子の種類を表し， N_{C_i} と Q_i はそれぞれカラーと粒子の電荷を表す． $\alpha = e^2/4\pi$ は微細構造定数である．また $\tau_i \equiv 4m_i^2/m_h^2$ である．ループ関数 $F_i(x)$ は以下で与えられる．

$$F_0(x) = x[1 - xf(x)] \quad (4.5)$$

$$F_{1/2}(x) = -2x[1 + (1-x)f(x)] \quad (4.6)$$

$$F_1(x) = 2 + 3x[1 + (2-x)f(x)] \quad (4.7)$$

¹ $\Phi = (v+h)/\sqrt{2}$ とすれば以下のようなラグランジアンを考えている．

$$\mathcal{L} = -y_f\bar{\psi}\psi\Phi + gW_\mu^+ W_\mu^- \Phi^2 - \kappa\phi^+\phi^-\Phi^2 \quad (4.2)$$

これからそれぞれの質量は $m_f = yv/\sqrt{2}$, $m_W = gv/2$, $m_\phi^2 = \kappa v^2/2$ となる．

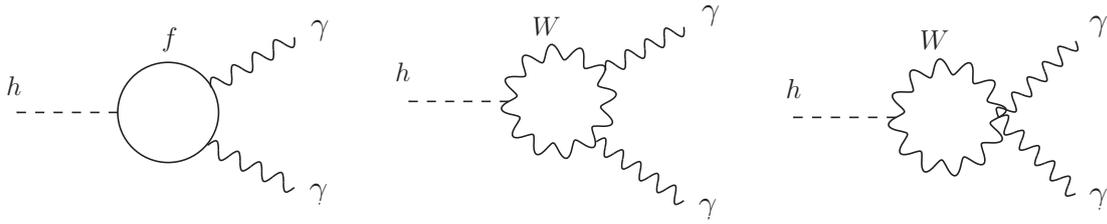


図 4.1: 標準模型において $h \rightarrow \gamma\gamma$ に寄与するダイアグラム． W ボソンが回るダイアグラムにはゴールドストーンボソンやゴーストが回るダイアグラムも存在する．

ここでループ関数についている添字はループを回る粒子のスピンを表す．また $f(x)$ は以下のとおりである．

$$f(x) = \begin{cases} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)^2 & \text{for } x > 1 \\ -\frac{1}{4} \left(\ln \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} - i\pi \right)^2 & \text{for } 0 < x < 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

関数 $F_i(x)$ は $x \rightarrow \infty$ では以下のように振る舞う．

$$F_0(x) \rightarrow -\frac{1}{3} \quad (4.9)$$

$$F_{1/2}(x) \rightarrow -\frac{4}{3} \quad (4.10)$$

$$F_1(x) \rightarrow 7 \quad (4.11)$$

これはループを回る粒子の質量を無限に重くしてもこの寄与が残ることを意味する．

標準模型の場合は $h \rightarrow \gamma\gamma$ に寄与するのは図 4.1 のようなフェルミオンと W ボソンがループに回るダイアグラムである．標準模型の振幅 \mathcal{A}_{SM} はループ関数の振る舞いを考えてやれば W ボソンがループを回る寄与が支配的であり，フェルミオンは最も重いトップクォークが効くことがわかる．数値的には以下ようになる．

$$\mathcal{A}_{\text{SM}} \simeq \mathcal{A}_f + \mathcal{A}_W = -1.83 + 8.32 = 6.49 \quad (4.12)$$

ここで標準模型の正しさを調べる便利な量としてシグナルストレングスを以下のように定義する．

$$\mu_Y \equiv \frac{\sigma(X \rightarrow h) \text{Br}(h \rightarrow Y)}{\sigma^{\text{SM}}(X \rightarrow h) \text{Br}^{\text{SM}}(h \rightarrow Y)} \quad (4.13)$$

ここで $\sigma(X \rightarrow h)$ はヒッグスの生成断面積であり，崩壊分岐比 $\text{Br}(X \rightarrow Y)$ は崩壊幅 Γ を用いて以下で定義されている．

$$\text{Br}(X \rightarrow Y) = \frac{\Gamma(X \rightarrow Y)}{\Gamma(X \rightarrow \text{all})} \quad (4.14)$$

シグナルストレングスは標準模型の値で規格化されているので，実験で得られたシグナルストレングスが $\mu = 1$ であれば標準模型を示唆し， $\mu \neq 1$ であれば実験結果が標準模型からずれていることを示唆している． $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングス $\mu_{\gamma\gamma}$ の実験結果は ATLAS [90] と CMS [91] の実験グループから以下の値が得られている．

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma\gamma} &= 1.17 \pm 0.27 \text{ (ATLAS)} \\ \mu_{\gamma\gamma} &= 1.14^{+0.26}_{-0.23} \text{ (CMS)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

これから標準模型のシグナルストレングス $\mu_{\gamma\gamma} = 1$ は誤差の範囲で一致しており、標準模型からのずれを見るにはより精密な測定が必要である。 $\mu_{\gamma\gamma}$ は高ルミノシティLHC(HL-LHC) [92, 93] や ILC [94] のような将来の加速器実験によって $\mathcal{O}(5)\%$ まで改良されることが期待されている。

ここからは標準模型の $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊にさらなる寄与がある場合にシグナルストレングスが標準模型からどのように変化するかを考える。以下のような一般的な有効ラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L}_{h\gamma\gamma} = C_h h F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \tilde{C}_h h F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (4.16)$$

ここで $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ である。この有効ラグランジアンから得られる振幅は以下ようになる。

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \langle A(p_1), A(p_2) | i\mathcal{L}_{h\gamma\gamma}^{\text{NP}} | h \rangle \\ &= -4iC_h [-p_2^\mu p_1^\nu + (p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu}] \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) + 4i\tilde{C}_h \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) p_{1\rho} p_{2\sigma} \end{aligned} \quad (4.17)$$

これから崩壊幅は以下ようになる。

$$\Gamma^{\text{NP}}(h \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{m_h^3}{4\pi} (|C_h|^2 + |\tilde{C}_h|^2) \quad (4.18)$$

ここより標準模型との比は以下ようになる [95]。

$$R_{\gamma\gamma} \equiv \frac{\Gamma_{\gamma\gamma}^{\text{SM}} + \Gamma_{\gamma\gamma}^{\text{NP}}}{\Gamma_{\gamma\gamma}^{\text{SM}}} = \left| 1 - C_h \frac{8\pi v}{\alpha \mathcal{A}_{\text{SM}}} \right|^2 + \left| \tilde{C}_h \frac{8\pi v}{\alpha \mathcal{A}_{\text{SM}}} \right|^2 \quad (4.19)$$

ここで C_h の前の符号は式 (4.3) のラグランジアンから C_h を求めた時にその寄与が標準模型の粒子と同じ符号で効くようにとってある。もしヒッグス粒子の生成断面積が変化しないのであれば $R_{\gamma\gamma}$ がそのまま $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングスになる。この表式は後の議論でも用いる。

4.2 暗黒物質

暗黒物質 (dark matter, DM) とは宇宙に存在する未知の物質であり、様々な観測事実からその存在が示唆されている。ここでは例として銀河の回転曲線を取り上げる。銀河の回転曲線とは銀河中心からの半径に対してその半径での回転速度をプロットしたものであり、銀河の回転速度は以下の重力と遠心力のつり合い式から得られる。

$$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (4.20)$$

ここで G は重力定数、 $M(r)$ は銀河中心からの半径 r の内部にある質量である。これより回転速度の半径と質量の依存性は $v(r) \propto \sqrt{M(r)/r}$ となる。銀河の明るく見えている部分に質量が分布していると仮定すると、銀河の質量はそのほとんどが中心に集中しており銀河の外側では質量は一定であるとみなせる。すると回転速度は $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$ となることが期待される。しかし実際の観測結果はそれに反して半径が大きい領域では回転速度がほぼ一定であることがわかっている。これは質量分布が $M(r) \propto r$ となるように光を放っていないダークハロー (dark halo) が存在していることを意味する。このダークハローを構成している物質が暗黒物質であり、現在の観測からはそのエネルギー密度は以下の値が得られている [53]。

$$\Omega_{\text{CDM}} h^2 = 0.1198 \pm 0.0026 \quad (4.21)$$

ここで h は規格化された Hubble 定数である．ちなみに通常の物質 (バリオン) のエネルギー密度は以下の値が得られており，暗黒物質はバリオンの約 6 倍程あることがわかる．

$$\Omega_{\text{baryon}} h^2 = 0.02207 \pm 0.00027 \quad (4.22)$$

この暗黒物質の正体を解明することは素粒子論や宇宙論の大きな課題である．

次に暗黒物質の候補を考える．暗黒物質の満たすべき性質は以下のとおりである．

1. 安定性：暗黒物質の寿命は宇宙年齢より長くなければならない (そうでなければ暗黒物質が現在までに崩壊してなくなってしまう.)
2. 電氣的性質：暗黒物質は電氣的に中性でなければならず (そうでなければ光を放つことができ，"暗黒"物質ではなくなってしまう.)
3. 残存量：暗黒物質は現在の残存量を適切に説明できなければならない．
4. 冷たい：暗黒物質は構造形成の時期に非相対論的でなければならず (そうでなければ宇宙の大規模構造が再現できなくなってしまう.)

これらの性質を満たす暗黒物質の候補は原始ブラックホール (primordial black hole)，アクシオン (axion)，ステライルニュートリノ (sterile neutrino)，ウィンプ (WIMP) などが考えられている．ちなみに素粒子標準模型に含まれている粒子には暗黒物質の候補になるものは存在しない．ニュートリノは唯一電氣的に中性な粒子であるが質量が非常に軽く，"熱い"暗黒物質になってしまうからである．そのため暗黒物質を説明するためには素粒子標準模型に拡張する必要がある．

ここでは後の議論でも用いる WIMP 暗黒物質について簡単に紹介する．WIMP 暗黒物質は弱く相互作用をする重い粒子 (Weakly Interacting Massive Particle, WIMP) の総称であり，暗黒物質と標準模型の粒子との相互作用が電弱相互作用と同じ程度でかつ質量が 10 GeV から数 TeV の範囲にあるものである．標準宇宙論ではこのインフレーション後，暗黒物質が標準模型の粒子の熱浴と熱平衡状態 (暗黒物質の対が標準模型粒子に崩壊する過程とその逆反応が等しく起きる.) にあると仮定する．この場合，暗黒物質の数密度 n は暗黒物質の質量 m_χ と温度 T を用いて $n \propto \exp(-m_\chi/T)$ の形で書かれており，温度が $T < m_\chi$ となるときに指数関数的に抑制される．暗黒物質の反応率 Γ は暗黒物質の対消滅断面積 σ_A と 2 つの WIMP 暗黒物質の重心系での速度 v の積を熱平均をとったもの $\langle \sigma_A v \rangle$ と暗黒物質の数密度 n を用いて $\Gamma = n \langle \sigma_A v \rangle$ と書ける．これが宇宙の Hubble 膨張率 H より小さくなった時，暗黒物質は熱浴から脱結合する (反応が起こったらその逆反応は起きない.) これは暗黒物質の熱的生成シナリオと呼ばれる．このシナリオでは現在の暗黒物質の残存量は以下のように見積もられる．

$$\Omega_\chi h^2 \simeq (\text{const.}) \frac{T_0^3}{M_{\text{Pl}}^3 \langle \sigma_A v \rangle} \simeq \frac{10^{-37} \text{ cm}^2 c}{\langle \sigma_A v \rangle} \quad (4.23)$$

ここで T_0 は現在の CMB 温度， M_{Pl} はプランク質量， c は光速であり， $\langle \dots \rangle$ は熱平均を意味する．脱結合の時の速度 v は $v \sim 0.3c$ であるため，対消滅断面積は $\sigma \sim 10^{-35} \text{ cm}^2$ 程度である．もし対消滅断面積が $SU(2)_L$ のゲージ結合定数 g を用いて $\sigma_A \sim g^4/m_\chi^2$ と書けていれば WIMP 暗黒物質の質量は $m_\chi \sim 10^{2-4} \text{ GeV}$ と見積もることができる．式 (4.23) を見ると CMB 温度やプランク質量などが入ってきているにもかかわらず WIMP 暗黒物質の質量が電弱スケール付近になっており，これは WIMP の奇跡と呼ばれる．

この熱的生成シナリオに対して相互作用が弱く、熱平衡状態に達することなく生成される WIMP 暗黒物質も考えられ、これは非熱的生成シナリオと呼ばれる。このシナリオは熱的生成シナリオのように一般的な議論ができないため暗黒物質の質量は広い領域が許される。

WIMP 暗黒物質の代表例としては R パリティを保つ超対称性理論における最も軽い超対称粒子 (lightest supersymmetric particle, LSP) である。超対称標準模型の中には電氣的に中性な粒子としてニュートリノの超対称パートナーであるスニュートリノや電弱ゲージボソンやヒッグス粒子の超対称パートナーであるニュートラリーノが暗黒物質の候補として考えられている。しかしスニュートリノは後で説明する暗黒物質の直接検出の実験で排除されてしまっている [96]。そのため超対称標準模型ではニュートラリーノが暗黒物質の候補として広く研究されている。

その他の WIMP 暗黒物質の例としては標準模型の最も簡単な拡張として $SU(2)_L$ の $(2n+1)$ 次元表現の粒子を導入し、その中性成分を暗黒物質みなす模型が考えられている。これは電弱相互作用をする WIMP (electroweak-interacting massive particle, EW-IMP) [97] や最も簡単な暗黒物質 (minimal dark matter) [13] と呼ばれる。第 5 章では有効理論としてこの模型が出てくるような場合を考える。

次の節では WIMP 暗黒物質を検証する方法の 1 つである暗黒物質の直接検出を議論する。

4.3 暗黒物質の直接検出

暗黒物質の直接検出の基本原理は、WIMP 暗黒物質は非常に弱いながら通常物質と相互作用をしているため、暗黒物質と原子核の散乱が生じるはずでその原子核の反跳エネルギーを観測してしまおうというものである。

地球付近の暗黒物質の速度は太陽の軌道速度と同じ大きさで $v \sim 0.001c$ であり、暗黒物質は非相対論的に扱える。暗黒物質の速度が非常に小さいため移行運動量は暗黒物質の質量や核子の質量に比べ非常に小さくなる。例えば暗黒物質の質量が $m_\chi \approx 100$ GeV で原子核の質量が $m_A \approx 100$ GeV のとき、最も大きい移行運動量は以下ようになる。

$$\sqrt{-Q^2} = 2v \frac{m_\chi m_A}{m_\chi + m_A} \approx 100 \text{ MeV} \approx 0.5 \text{ fm}^{-1} \quad (4.24)$$

つまり WIMP 暗黒物質と核子の弾性散乱は移行運動量が 0 の極限で計算してもいいことが分かる。

次に暗黒物質と原子核の散乱断面積を求める。ここでは後の計算でも使うため暗黒物質がマヨラナフェルミオンであることを仮定する。マヨラナ暗黒物質 ψ_χ と核子 ψ_N の有効相互作用は以下のように与えられる [98]。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & \lambda_N \bar{\psi}_\chi \psi_\chi \bar{\psi}_N \psi_N + \kappa_1 \bar{\psi}_\chi \psi_\chi \bar{\psi}_N i\gamma_5 \psi_N + \kappa_2 \bar{\psi}_\chi i\gamma_5 \psi_\chi \bar{\psi}_N \psi_N + \kappa_3 \bar{\psi}_\chi \gamma_5 \psi_\chi \bar{\psi}_N \gamma_5 \psi_N \\ & + \kappa_4 \bar{\psi}_\chi \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\chi \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi_N + \xi_N \bar{\psi}_\chi \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\chi \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \psi_N \end{aligned} \quad (4.25)$$

非相対論的極限では $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ は消え、 $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi$ は空間成分だけが残る、 $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ は時間成分のみが残る。そのため κ_i に比例した項はすべて消える。残った項は λ_N と ξ_N に比例した項でそれぞれスピンの依存しない項、スピンの依存する項と呼ばれる。

それぞれの散乱断面積を求める²。まずスピンの依存しない相互作用の有効ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}^{\text{SI}} = \lambda_N \bar{\psi}_\chi \psi_\chi \bar{\psi}_N \psi_N \quad (4.26)$$

²ちなみにスピンの依存しない相互作用とスピンの依存する相互作用の干渉項は 0 になるため、それぞれ独立に扱って良い。

ここで $N = p, n$ である．始状態の粒子のスピンについての平均と終状態の粒子のスピンを和をとった後の核子の振幅は以下ようになる．

$$|A_N^{\text{SI}}|^2 = 64(\lambda_N m_\chi m_N)^2 \quad (4.27)$$

ここで m_χ は暗黒物質の質量で m_N は核子の質量である．原子核の振幅は陽子と中性子の寄与を足し上げると以下ようになる³．

$$|A_A^{\text{SI}}|^2 = 64m_\chi^2 m_A^2 (\lambda_p Z + \lambda_n (A - Z))^2 \quad (4.28)$$

ここで m_A は原子核の質量であり， Z は原子番号で A は質量数である．これより WIMP 暗黒物質と原子核のスピンに依存しない散乱断面積は以下ようになる．

$$\sigma_A^{\text{SI}} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{m_\chi m_A}{m_\chi + m_A} \right)^2 (\lambda_p Z + \lambda_n (A - Z))^2 \quad (4.29)$$

これを見れば分かるように核子の散乱断面積がコヒーレントに足し上げられているため， $\lambda_p \approx \lambda_n$ のとき散乱断面積は $\sigma_A^{\text{SI}} \propto A^2$ となり質量数の大きい原子核では散乱断面積が大きくなる．このような効果は次に見るスピンに依存する相互作用では見られないため，スピンに依存しない散乱断面積の方が強い制限を与えている．

次にスピンに依存する相互作用の有効ラグランジアンは以下のように与えられる．

$$\mathcal{L}^{\text{SD}} = \xi_N \bar{\psi}_\chi \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\chi \bar{\psi}_N \gamma^\mu \gamma_5 \psi_N \quad (4.30)$$

始状態の粒子のスピンについての平均と終状態の粒子のスピンを和をとった後の核子の振幅は以下ようになる．

$$|A_N^{\text{SD}}|^2 = 192(\xi_N m_\chi m_N)^2 \quad (4.31)$$

次に原子核の振幅を求める．今の場合はスピンに依存しない場合と異なり，陽子と中性子のスピンの和をそれぞれ取って足し上げなければならない．非相対論的極限では $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi$ は空間成分しか残らず， $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi \propto J_i$ のように角運動量に比例しているはずである．ここで便利のため原子核中の核子の角運動量を以下のように定義する．

$$\mathbf{J}_N^A \equiv S_N^A \frac{\mathbf{J}_A}{|J_A|} \quad (4.32)$$

今 S_N^A は質量数 A の原子核の中の核子 N のスピンの期待値である．その定義より $S_p^p = S_n^n = 1/2$ であり， $S_p^n = S_n^p = 0$ である．これを用いるとラグランジアンは以下のように書ける．

$$\mathcal{L}^{\text{SD}} = C(\xi_p \mathbf{J}_\chi \cdot \mathbf{J}_p^A + \xi_n \mathbf{J}_\chi \cdot \mathbf{J}_n^A) \quad (4.33)$$

ここで C は定数である．振幅の 2 乗のスピンを和を取るときに残る行列要素は以下ようになる．

$$\begin{aligned} & \sum_{s_\chi, s'_\chi} \sum_{s_A, s'_A} \sum_{1 \leq k, l \leq 3} \langle s_\chi | J_\chi^k | s'_\chi \rangle \langle s'_\chi | J_\chi^l | s_\chi \rangle \langle s_A | J_A^k | s'_A \rangle \langle s'_A | J_A^l | s_A \rangle \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq 3} \text{Tr}(J_\chi^k J_\chi^l) \text{Tr}(J_A^k J_A^l) = \frac{1}{3} (2J_\chi + 1) J_\chi (J_\chi + 1) (2J_A + 1) J_A (J_A + 1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

³当然，干渉項が存在するので足してから 2 乗する．

始状態の粒子については平均を取るなのでこの式を $(2J_\chi + 1)(2J_A + 1)$ で割り, $J_\chi = 1/2$ を用いると原子核の振幅は以下ようになる.

$$|\mathcal{A}^{\text{SD}}|^2 = 256 m_\chi^2 m_A^2 \frac{J_A + 1}{J_A} (\xi_p S_p^A + \xi_n S_n^A)^2 \quad (4.35)$$

ここで式 (4.33) の定数 C は A が核子のときに式 (4.33) に一致するように決めた. 以上よりスピンの依存する散乱断面積は以下ようになる [99].

$$\sigma_A^{\text{SD}} = \frac{16}{\pi} \frac{J_A + 1}{J_A} (\xi_p S_p^A + \xi_n S_n^A)^2 \quad (4.36)$$

今までは WIMP 暗黒物質と核子, 原子核の相互作用を考えてきた. しかしより根源的には WIMP 暗黒物質はクォークやグルーオンと相互作用しているはずである. そこで核子や原子核の場合と同様に暗黒物質がマヨラナフェルミオンの場合を考える. WIMP 暗黒物質 χ_0 と軽いクォーク ($q = u, d, s$) およびグルーオンとの有効相互作用を書き下すと以下ようになる [97, 99–101]⁴.

$$\mathcal{L} = \sum_{q=u,d,s} \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= f_q m_q \bar{\chi}_0 \chi_0 \bar{q} q + d_q \bar{\chi}_0 \gamma^\mu \gamma_5 \chi_0 \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q \\ &\quad + \frac{g_q^{(1)}}{M} \bar{\chi}_0 i \partial^\mu \gamma^\nu \chi_0 \mathcal{O}_{\mu\nu}^q + \frac{g_q^{(2)}}{M} \bar{\chi}_0 (i \partial^\mu) (i \partial^\nu) \chi_0 \mathcal{O}_{\mu\nu}^q \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\mathcal{L}_g = f_G \bar{\chi}_0 \chi_0 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (4.39)$$

ここで M と m_q はそれぞれ暗黒物質とクォークの質量であり, $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ である. $\mathcal{O}_{\mu\nu}^q$ はクォークのツイスト 2 演算子と呼ばれ以下で定義されるものである.

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}^q \equiv \frac{1}{2} \bar{q} i \left(D_\mu \gamma_\nu + D_\nu \gamma_\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \not{D} \right) q \quad (4.40)$$

ここで $D_\mu = \partial_\mu - i g_s t^a G_\mu^a$ は共変微分である.

この有効ラグランジアンから核子 ($N = p, n$) と暗黒物質の散乱断面積を求めると以下のようになる.

$$\sigma_N = \frac{4}{\pi} \left(\frac{M m_N}{M + m_N} \right)^2 (|f_N|^2 + 3|a_N|^2) \quad (4.41)$$

ここで m_N は核子の質量である. また f_N と a_N はそれぞれスピンの依存しない有効結合定数とスピンの依存する有効結合定数であり, 以下で定義されるものである.

$$f_N/m_N = \sum_{q=u,d,s} f_q f_{Tq} + \sum_{q=u,d,s,c,b} \frac{3}{4} (q(2) + \bar{q}(2)) (g_q^{(1)} + g_q^{(2)}) - \frac{8\pi}{9\alpha_s} f_{TG} f_G \quad (4.42)$$

$$a_N = \sum_{q=u,d,s} d_q \Delta q_N \quad (4.43)$$

⁴ 歴史的な理由で結合定数の前にマヨラナフェルミオンの統計因子の $1/2$ が付いていないことに注意する. 例えば $\mathcal{L} = f_q m_q \bar{\chi}_0 \chi_0$ は $\mathcal{L} = (1/2) f_q m_q \bar{\chi}_0 \chi_0$ と結合定数を定義する方がよく使われている.

(for proton)	
f_{Tu}	0.023
f_{Td}	0.032
f_{Ts}	0.020
(for neutron)	
f_{Tu}	0.017
f_{Td}	0.041
f_{Ts}	0.020

(for proton)			
$u(2)$	0.22	$\bar{u}(2)$	0.034
$d(2)$	0.11	$\bar{d}(2)$	0.036
$s(2)$	0.026	$\bar{s}(2)$	0.026
$c(2)$	0.019	$\bar{c}(2)$	0.019
$b(2)$	0.012	$\bar{b}(2)$	0.012

(for proton)	
Δu_p	0.77
Δd_p	-0.49
Δs_p	-0.15

表 4.1: クォークとグルーオンの行列要素のパラメータ。

また核子の行列要素は以下のように与えられる。

$$\langle N | m_q \bar{q} q | N \rangle / m_N = f_{Tq} \quad (4.44)$$

$$\langle N(p) | \mathcal{O}_{\mu\nu}^q | N(p) \rangle = \frac{1}{m_N} \left(p_\mu p_\nu - \frac{1}{4} m_N^2 g_{\mu\nu} \right) (q(2) + \bar{q}(2)) \quad (4.45)$$

$$\langle N | m_q \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q | N \rangle = 2s_\mu \Delta q_N \quad (4.46)$$

$$f_{TG} = 1 - \sum_{q=u,d,s} f_{Tq} \quad (4.47)$$

ここで後で用いるためそれぞれの量の数値を表 4.1 にまとめておく [101–104]。

WIMP 暗黒物質の直接検出において現在最も強い制限を与えているのは Xe を用いた LUX 実験であり, WIMP 暗黒物質と核子のスピンの依存しない散乱断面積に対する制限は図 4.2 で与えられている [105]。横軸は WIMP 暗黒物質の質量で縦軸がスピンに依存しない散乱断面積を表す。青色の線が LUX 実験の結果で影の付いた領域が $\pm 1\sigma$ の領域に対応している。

将来実験において σ_{SI}^p は XENON1T 実験で 1 桁以上改良され [106], LZ 実験ではそれ以上に改良されると期待されている [107]。

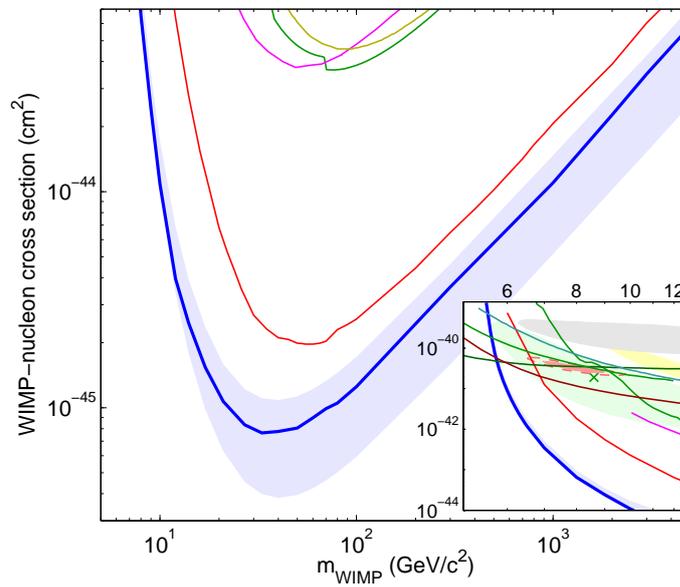


図 4.2: WIMP 暗黒物質と核子の弾性散乱においてスピんに依存しない散乱断面積に対する実験的制限を表した図．横軸は WIMP 暗黒物質の質量で縦軸がスピんに依存しない散乱断面積を表す．青色の線が LUX 実験の結果で影の付いた領域が $\pm 1\sigma$ の領域に対応している．それ以外の線は別の実験の結果である．この図は文献 [105] から転載した．

第5章 電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論

この章ではこの博士論文の1つ目の主題である電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論について議論する．ここでの内容は副論文 [108] に基づいている．

5.1 導入

4.2 節で導入したように暗黒物質は素粒子論と宇宙論の両方にまたがる問題であり，これは解決されなければならない問題である．数ある暗黒物質の候補の中でも有力なものに WIMP 暗黒物質がある．その WIMP 暗黒物質の最も簡単なものに電弱相互作用をする暗黒物質 (electroweak-interacting massive particle, EW-IMP) や最も簡単な暗黒物質 (minimal dark matter) と呼ばれるものがあり，近年よく研究されている [7–14]．これは暗黒物質は $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージ相互作用を通じてのみ標準模型の粒子と相互作用をするというものである．このモデルでは暗黒物質が熱的に生成されたと仮定すると現在の暗黒物質の残存量を説明するには暗黒物質の質量が完全決まってしまう．例えばハイパチャージが $Y = -1/2$ (0) で $SU(2)_L$ の 2 重項 (3 重項) に属する暗黒物質の場合では暗黒物質の質量はおおよそ 1 (3) TeV となる．一方で暗黒物質が非熱的に生成されるシナリオでは暗黒物質は例えば超対称標準模型におけるグラビティーのような重い粒子の崩壊によって非熱的に生成される．そのような場合には暗黒物質の質量は数 TeV である必要性はなく， $\mathcal{O}(100)$ GeV 程の軽い質量を持ってよい．

この電弱相互作用をする暗黒物質は高いエネルギースケールの理論の有効理論として実現されることも知られている．例えば超対称標準模型においてはそれぞれヒッグシーノ (ウィーノ) が対応する．そのためこの章ではボトムアップの立場を取り，この電弱相互作用をする暗黒物質が高いスケールで実現されている何らかの理論の有効理論であるとする．この方法は低エネルギーにこの有効理論を生じるモデルに対して高いスケールのモデルの詳細に依らず一般的な解析ができる．この意味でこの方法をモデルに依存しない方法と呼ぶことにする．

今回の解析では有効理論の仮定として暗黒物質は $SU(2)_L$ の $(2n+1)$ 次元表現に属するフェルミオンでありヒッグス粒子と相互作用をしているとする．このような相互作用は後で見るように次元 5 の演算子として実現される．一般にこのような相互作用は CP を破る結合定数を持つため電気双極子モーメントのような CP を破る観測量を预言する．そのためこの有効理論を調べるためには電気双極子モーメントは非常に良い物理量であることが分かる．またこの有効理論に制限を与えるものとしてヒッグス粒子の崩壊や暗黒物質の直接検出などがあるためこれらも考慮する．

5.2 有効理論

ここでは実際に電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論を構成する．暗黒物質を含む多重項に関して次の仮定をおく．

1. 安定である .
2. フェルミオンであり , $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ のゲージチャージを持つ .
3. $SU(2)_L$ の $N(\equiv 2n + 1)$ 次元表現である .
4. ヒッグス粒子と相互作用をする .
5. 非熱的生成シナリオによってつくられ $\mathcal{O}(100)$ GeV の質量を持つ .

この仮定を満たすように有効理論を構成する . ハイパーチャージの値によって相互作用の形が変わるので $Y = 0$ の場合と $Y \neq 0$ の場合で場合分けをする ¹ .

$Y = 0$ の場合

まずは暗黒物質を含む多重項が $U(1)_Y$ ハイパーチャージを持たない場合を考える . 暗黒物質の多重項を $SU(2)_L$ の固有値 i でラベルして χ_i ($i = -n, \dots, n$) と表す . 今の場合 χ_i はハイパーチャージを持たないため , 分数電荷を持つことを防ぐため n は自然数である . この 0 成分 χ_0 が電気に中性になり , 暗黒物質になる . また簡単のため χ_i はカイラルフェルミオン ($\chi_i = P_L \chi_i$) とする .

この多重項でゲージ相互作用とゲージ不変な質量項を書くと以下のようになる .

$$\mathcal{L}_{\text{dim4}} = \bar{\chi} i \not{D} \chi - \frac{1}{2} M (\bar{\chi}^c \chi + \text{h.c.}) \quad (5.1)$$

ここで C は荷電共役を表し $\psi^c \equiv C(\bar{\psi})^T$ で定義される . C は荷電共役行列で $C \equiv i\gamma^0 \gamma^2$ である . 共変微分は以下のように定義されている .

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - g W_\mu^a T^a - g' B_\mu Y \\ &= \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) - ie Q A_\mu \end{aligned} \quad (5.2)$$

ちなみにこの共変微分の定義では素電荷 e は電子の素電荷で $e = -|e|$ であることに注意する ² . またその他の量は以下で与えられる .

$$Q = T^3 + Y \quad (5.3)$$

$$(T_n^\pm)_{jk} = (T_n^1 \pm iT_n^2)_{jk} = \sqrt{n(n+1) - k(k \pm 1)} \delta_{j, k \pm 1} \quad (5.4)$$

$$(T_n^3)_{jk} = k \delta_{jk} \quad (5.5)$$

ここで T_n^a は $SU(2)$ の $(2n + 1)$ 次元表現の生成子を表す . また χ の足のつづし方をあらわに書くと以下のようになっている .

$$\bar{\chi} i \not{D} \chi = \sum_{i=-n}^n \bar{\chi}_i (i \not{D} \chi)_i, \quad \bar{\chi}^c \chi = \sum_{i=-n}^n (-1)^i \bar{\chi}_i^c \chi_{-i} \quad (5.6)$$

ここで χ の添字 i は $SU(2)_L$ の固有値を表す足である . この関係式は次のように導出される .

まず $SU(2)_L$ のゲージ変換を以下のように定義する .

$$\chi_i \rightarrow (e^{iT^a \alpha^a})_{ij} \chi_j, \quad \bar{\chi}_i \rightarrow \bar{\chi}_j (e^{-iT^a \alpha^a})_{ji}, \quad \bar{\chi}_i^c \rightarrow (e^{iT^a \alpha^a})_{ij} \bar{\chi}_j^c \quad (5.7)$$

¹同様のセットアップでの計算は文献 [109] でもなされている . またヒッグシーノ暗黒物質に関する同様の計算も文献 [110] でなされている .

²逆に共変微分の符号を逆にすれば e は陽電子の素電荷で $e = +|e|$ である .

このゲージ変換のもとでは運動項は明らかにゲージ不変である。質量項をゲージ不変にするために以下の様な計量 A_{ij} を導入する。

$$\overline{\chi^c} \chi = \sum_{i=-n}^n \overline{\chi_i^c} A_{ij} \chi_j \quad (5.8)$$

すると質量項のゲージ変換は以下のようになる。

$$\overline{\chi_i^c} A_{ij} \chi_j \rightarrow \overline{\chi_{i'}^c} (e^{iT^a \alpha^a})_{i'i} A_{ij} (e^{iT^b \alpha^b})_{jj'} \chi_j \simeq \overline{\chi_i^c} A_{ij} \chi_j + i\alpha^a \overline{\chi_i^c} \left[(T^a)_{ii'} A_{i'j} + A_{ij'} (T^a)_{j'j} \right] \chi_j \quad (5.9)$$

よって、質量項をゲージ不変にするための計量 A に対する条件は以下のようになる。

$$T^{aT} A + A T^a = 0 \quad (5.10)$$

この条件式から A_{ij} が具体的にどのように書けるかを考える。まずは $a = 3$ の場合は以下のようになる。

$$0 = (T^{3T})_{ij} A_{jk} + A_{ij} (T^3)_{jk} = (i+k) A_{ik} \quad (5.11)$$

よって計量はこの条件から以下の形に制限される。

$$A_{ij} = C_i \delta_{-i,j} \quad (5.12)$$

この結果と $a = 1$ の場合から C_i に対して以下の漸化式が成り立つ³。

$$C_i = -C_{i-1} \quad (5.13)$$

以上より計量 A_{ij} は以下のようになる。

$$A_{ij} = c(-1)^i \delta_{-i,j} \quad (5.14)$$

ここで c は規格化定数で $c = \pm 1$ である。この博士論文では $c = 1$ を採用する。以下では添字なしの χ が出てきたらこの足のつづし方をしているとす。さらにここではゲージ不変な質量 M は実であるとす。

ここまではカイラルフェルミオン（ワイルフェルミオン） χ を用いてきたが実際の計算の際はディラックフェルミオンを用いる方が便利であることの方が多い。そこでディラックフェルミオン $\psi^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) を 2 つのカイラルフェルミオンを用いて以下のように定義する。

$$\psi^{(i)} \equiv \chi_i + (-1)^i (\chi_{-i})^c = P_L \chi_i + (-1)^i P_R (\chi_{-i})^c \quad (5.15)$$

このディラックフェルミオンでくりこみ可能なラグランジアンを書き直すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dim4}} &= \overline{\psi} i \not{D} \psi - M \overline{\psi} \psi + \overline{\chi_0} i \not{D} \chi_0 - \frac{1}{2} M (\overline{\chi_0^c} \chi_0 + \text{h.c.}) \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\psi^{(i)}} i \not{D} \psi^{(i)} - M \sum_{i=1}^n \overline{\psi^{(i)}} \psi^{(i)} + \overline{\chi_0} i \not{D} \chi_0 - \frac{1}{2} M (\overline{\chi_0^c} \chi_0 + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

³ $a = 2$ の場合からも同様の漸化式が得られる。

はじめの 2 項はディラックフェルミオンのゲージ相互作用と質量項を表し，後の 2 項は暗黒物質のゲージ相互作用とマヨラナ質量項を表す．また 2 行目は足のつぎし方をあらわに書いたものであり，以下では添字が省略されているときはこの足のつぎし方をしていると解釈する．また和を取る範囲がワイルフェルミオンの $-n, \dots, n$ から $1, \dots, n$ の変わったことにも注意する．

次に暗黒物質の多重項 χ とヒッグス場との相互作用を考える． χ はフェルミオンであるためヒッグス場とゲージ不変な相互作用は次元 5 の演算子で以下で与えられる．

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} = -\frac{1}{2\Lambda} |\Phi|^2 \overline{\chi^c} (g + i\gamma_5 f) \chi + \text{h.c.} \quad (5.17)$$

ここで g, f はそれぞれ CP を保つ結合定数と CP を破る結合定数である．また Λ は理論のカットオフスケールである．もちろんこれらのパラメータのうち独立に取れるのは 2 つだけであるが，ここでは計算結果を見やすくするためこのようにおいた．これらは一般性を失うことなく実にとることができる．またここ有効演算子の次元を 5 までで止めているのはカットオフスケール Λ が大きく摂動論の近似がうまくいっているとしているためである．そのため，後の計算結果もこの摂動論の範囲でのみ有効であることに注意しなければならない．

またこのような有効相互作用を導く高エネルギーの理論の例として後の章でも議論する高いスケールの超対称性理論が考えられる．しかしここでの議論では特定の高エネルギーの理論を考えることはしない．

このラグランジアンをディラックフェルミオンで書き換えると以下のようになる．

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} = -\frac{1}{\Lambda} |\Phi|^2 \overline{\psi} (g + i\gamma_5 f) \psi - \frac{1}{2\Lambda} |\Phi|^2 \left[\overline{\chi_0^c} (g + i\gamma_5 f) \chi_0 + \text{h.c.} \right] \quad (5.18)$$

以上より $Y = 0$ の場合の有効理論は以下で定義される．

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{dim4}} + \mathcal{L}_{\text{dim5}} \quad (5.19)$$

まずは暗黒物質の多重項 χ_i の質量 M_{phys} を求める．これはヒッグス場に真空期待値 $\langle \Phi \rangle = (0, v/\sqrt{2})^T$ を代入することで以下のようになる．

$$M_{\text{phys}}^2 = m_R^2 + m_I^2 \quad (5.20)$$

ここで m_R と m_I は以下で定義される．

$$m_R = M + g \frac{v^2}{2\Lambda}, \quad m_I = f \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (5.21)$$

これを見てわかるようにツリーレベルでは χ_i の質量は全て縮退している．しかし量子補正によって質量差が生まれる． χ_i のゲージ相互作用は i の違いによって異なるので図 5.1 のようなダイアグラムで与えられる量子補正によって以下のような質量差が得られる⁴．

$$\Delta M_{j,j-1} = \frac{\alpha_2}{4\pi} (2j-1) [f(x_W) - \cos^2 \theta_W f(x_Z) - \sin^2 \theta_W f(0)] M_{\text{phys}} \quad (5.22)$$

ここで $\Delta M_{j,j-1} = M_j - M_{j-1}$ であり，ループ関数 $f(x)$ は以下で定義される．

$$f(x) = \int_0^1 dz 2(z+1) \ln [z^2 + (1-z)x] \quad (5.23)$$

⁴ $n = 1$ の場合の質量差は文献 [111] で導出されている．また χ_i とヒッグス粒子との量子補正もあるが，ヒッグス粒子の相互作用は式 (5.17) を見てもわかるようにどの i に対しても同じなので質量差は出さない．

さらに x_W と x_Z は次で定義される .

$$x_W \equiv \frac{m_W^2}{M_{\text{phys}}^2}, \quad x_Z \equiv \frac{m_Z^2}{M_{\text{phys}}^2} \quad (5.24)$$

この量子補正の結果 , 暗黒物質の多重項の電氣的に中性な成分 χ_0 が最も軽くなる . この質量差は数値的には $200 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}} \lesssim 3000 \text{ GeV}$ の時以下のようになる .

$$\Delta M_{j,j-1} \simeq (2j-1) \times (167-174) \text{ MeV} \quad (5.25)$$

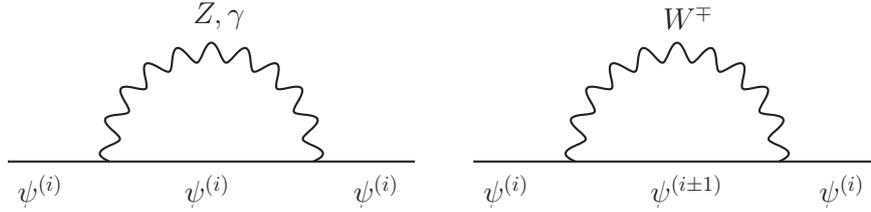


図 5.1: 暗黒物質の多重項の質量差を生じさせるゲージ相互作用の寄与 .

$Y \neq 0$ の場合

次に $Y \neq 0$ の場合を考える . この場合暗黒物質の多重項としてディラックフェルミオン $\psi^{(i)}$ ($i = -n, \dots, n$) を導入する . ゲージ相互作用とゲージ不変な質量項は以下で与えられる .

$$\mathcal{L}_{\text{dim4}} = \bar{\psi} i \not{D} \psi - M \bar{\psi} \psi \quad (5.26)$$

また ψ とヒッグス場の相互作用は以下のようになる .

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} = -\frac{1}{\Lambda} |\Phi|^2 \bar{\psi} (g_1 + i\gamma_5 f_1) \psi - \frac{1}{\Lambda} \Phi^\dagger T_2^a \Phi \bar{\psi} (g_2 + i\gamma_5 f_2) T_n^a \psi \quad (5.27)$$

ここで T_2^a は $SU(2)_L$ の 2 次元表現の生成子でパウリ行列 σ^a を用いて $T_2^a = \sigma^a/2$ で与えられる . T_n^a は $SU(2)_L$ の $(2n+1)$ 次元表現の生成子である . 以上より $Y \neq 0$ の場合の有効理論は以下で定義される .

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{dim4}} + \mathcal{L}_{\text{dim5}} \quad (5.28)$$

$Y = 0$ の場合と同様に $\psi^{(i)}$ の質量 $M_{\text{phys}}^{(i)}$ は以下のようになる .

$$M_{\text{phys}}^{(i)2} = m_R^{(i)2} + m_I^{(i)2} \quad (5.29)$$

ここで $m_R^{(i)}$ と $m_I^{(i)}$ は以下で与えられる .

$$m_R^{(j)} = M + g_1 \frac{v^2}{2\Lambda} - g_2 \frac{j}{2} \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (5.30)$$

$$m_I^{(j)} = f_1 \frac{v^2}{2\Lambda} - f_2 \frac{j}{2} \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (5.31)$$

式 (5.27) の第 1 項はどの $\psi^{(i)}$ に対しても共通の補正を出す第 2 項は i の値によって異なる補正を与えるため質量差が生じる．この表式から i が大きくなるほど $\psi^{(i)}$ の質量は小さくなることがわかる．つまり最も軽い成分は $\psi^{(n)}$ であり，この成分を電氣的に中性にするためハイパーチャージの値は $Y = -n$ としなくてはならない．一方で式 (5.27) の第 2 項が無視できる場合はツリーレベルでは $\psi^{(i)}$ の質量は全て縮退する．この場合は $Y = 0$ の場合と同様，ゲージ相互作用を通じて質量差が生じ，電荷 Q と電荷 $Q - 1$ の成分の質量差は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \Delta M_{Q,Q-1} &= \frac{\alpha_2}{4\pi} (2Q - 1) [f(x_W) - \cos^2 \theta_W f(x_Z) - \sin^2 \theta_W f(0)] M_{\text{phys}} \\ &+ \frac{\alpha_2}{4\pi} 2Y (f(x_Z) - f(x_W)) M_{\text{phys}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

ここでの記号は式 (5.23) と (5.24) で定義されている．また数値的には以下ようになる．

$$\Delta M_{Q,Q-1} \simeq (2Q - 1) \times (167-174) \text{ MeV} \quad (5.33)$$

すなわち中性成分へのツリーレベルの寄与とループレベルの寄与が偶然相殺するようなことがない限り，中性成分が最も軽くなるのはハイパーチャージが $Y = \pm n$ の時のみである．以降の議論では $Y = -n$ とする．

ここからは暗黒物質の直接検出に関連してディラックフェルミオン型の暗黒物質についての注意点を述べる．現在，暗黒物質の直接検出ができたことを示す実験結果が得られていないことから， $\bar{\psi}_\chi \gamma^\mu \psi_\chi \bar{\psi}_N \gamma_\mu \psi_N$ (ψ_χ : 暗黒物質， ψ_N : 核子) のようなベクトル結合に対して非常に強い制限を与えている．つまり，このようなベクトル相互作用を禁止するため，暗黒物質はマヨラナフェルミオンでなくてはならない．今，中性成分 $\psi^{(n)}$ は 2 つのマヨラナフェルミオン χ_0, η_0 を用いて以下のように分解できる．

$$\psi^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_0 + i\eta_0) \quad (5.34)$$

するとベクトル結合は以下ようになる．

$$\bar{\psi}^{(n)} \gamma^\mu \psi^{(n)} = \frac{i}{2} \bar{\chi}_0 \gamma^\mu \eta_0 - \frac{i}{2} \bar{\eta}_0 \gamma^\mu \chi_0 \quad (5.35)$$

このような相互作用が暗黒物質の直接検出に影響を与えないようにするには χ_0 と η_0 の間に質量差が $\mathcal{O}(10)$ keV ほどなければならない．そのような質量差は以下のようなフェルミオン数を破る高次演算子をから生じる．

$$\mathcal{L}_{HM} = \frac{1}{\Lambda_M^{4n-1}} [\Phi^{2n} \bar{\psi}^C][\Phi^{2n} \psi] + \text{h.c.} \quad (5.36)$$

ここで $[\dots]$ は $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ の不変量であることを表す．この相互作用によって軽い質量を持つ粒子が暗黒物質であり，ここではそれを χ_0 とする．

5.3 現象論

ここでは式 (5.19) と (5.28) で定義される有効理論から導かれる現象を議論する．具体的には電気双極子モーメント，ヒッグス粒子の崩壊，暗黒物質の直接検出である．

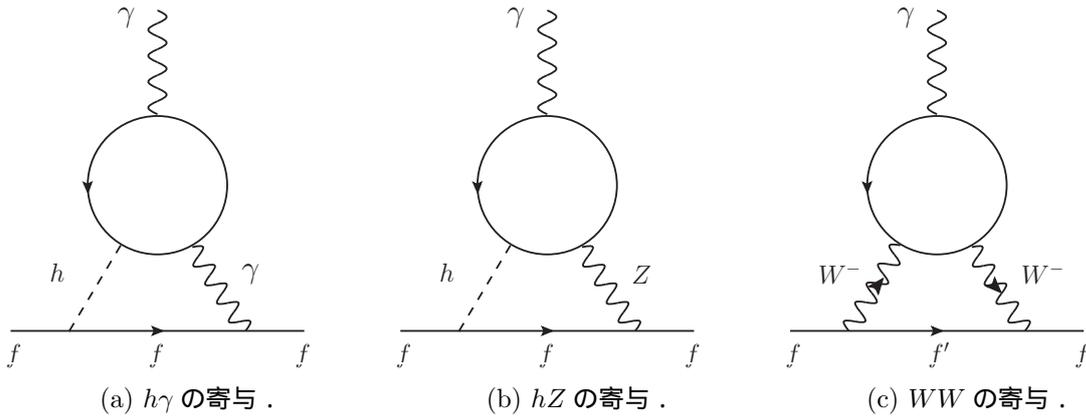


図 5.2: 式 (5.19) と (5.28) で定義される有効理論において考えられる Barr-Zee ダイアグラム．フェルミオンループには暗黒物質の多重項が回っている．また (c) のダイアグラムについては W ボソンの内線をゴールドストーンボソンに置き換えたダイアグラムも存在する．

5.3.1 電気双極子モーメント

第 3 章でも議論したように，フェルミオン f の電気双極子モーメント d_f は以下のラグランジアンで定義される物理量である．

$$\mathcal{L}_{\text{EDM}} = -i \frac{d_f}{2} \bar{f} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 f F_{\mu\nu} \quad (5.37)$$

ここでそれぞれの量は以下で与えられる．

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.38)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (5.39)$$

電気双極子モーメントは CP を破る物理量であり，今考えている有効理論には式 (5.17) や (5.27) を見ればわかるようにヒッグス粒子と暗黒物質の間の CP を破る相互作用が存在する．そのためこの有効理論は電気双極子モーメントを生じる可能性がある．実際ヒッグス粒子が CP を破る相互作用を持っている場合 Barr-Zee ダイアグラムと呼ばれる 2 ループのダイアグラム通じて電気双極子モーメントが生じることが知られている [112]．この有効理論での Barr-Zee ダイアグラムは図 5.2 のものが考えられる．ここではそれぞれのダイアグラムからの寄与を以下のように書き表す．

$$d_f = d_f^{h\gamma} + d_f^{hZ} + d_f^{WW} \quad (5.40)$$

ここでは Barr-Zee ダイアグラムによる電気双極子モーメントを求めるための方針を述べ，計算の詳細は付録 D.3, D.4 に与えることにする．

以下では図 5.2 の (a) のダイアグラムを例にして計算の方針を説明する．まずこのダイアグラムには暗黒物質の多重項 $\psi^{(i)}$ が回るループとそれをフェルミオン f につないでいる 2 つのループが存在する．今の議論では暗黒物質の多重項の質量はその他の粒子の質量よりも大きいことを仮定しているため，暗黒物質の多重項を先にループ積分をして有効頂点を作りその後フェルミオンにつながっているループを積分するということができる．まず $\psi^{(i)}$ が回る図 5.3 のダイアグラムを考える．ここで運動量は頂点から外に出ていく向きで定義されている．また $A_\mu(p_1)$ の光子は

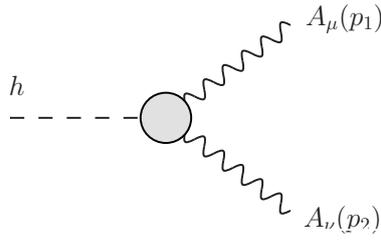


図 5.3: ヒッグス粒子と光子の有効頂点 (1 つ目のループ) . 運動量は頂点から外に出ていく向きで定義されている . $A_\mu(p_1)$ の光子は on-shell であり , $A_\nu(p_2)$ の光子は off-shell である .

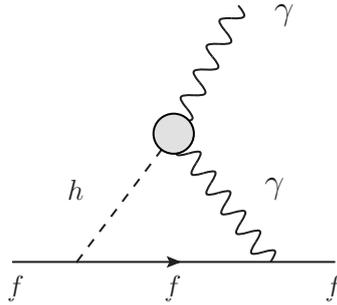


図 5.4: ヒッグス粒子と光子の有効頂点を用いたループダイアグラム (2 つ目のループ) .

図 5.2 の外線の光子であるため on-shell であり , $A_\nu(p_2)$ の光子はループの内線を走る光子であるため off-shell である . このダイアグラムの振幅を用いて有効頂点 $\Gamma^{\mu\nu}$ を以下のように定義する .

$$i\mathcal{M} \equiv i\Gamma^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \quad (5.41)$$

この有効頂点はガンマ行列が含まれていないため , ローレンツの足の構造から一般的に以下のように書き下すことができる .

$$\Gamma^{\mu\nu} = A_0 g^{\mu\nu} + A_1 p_1^\mu p_1^\nu + A_2 p_2^\mu p_2^\nu + A_{12} p_1^\mu p_2^\nu + A_{21} p_2^\mu p_1^\nu + \Gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \quad (5.42)$$

今 $\epsilon^{0123} = +1$ である . ここで p_1 の on-shell 条件 $p_1 \cdot \epsilon^*(p_1) = 0$ を使えば p_1^μ に比例する項は落とすことができる . さらに Ward 恒等式 $p_{1\mu} \Gamma^{\mu\nu} = 0$ [113] を用いれば有効頂点 $\Gamma^{\mu\nu}$ は以下の形に制限される .

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \Gamma(p_1, p_2) [-(p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} + p_2^\mu p_1^\nu] + \Gamma_5(p_1, p_2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \quad (5.43)$$

ここで第 1 項は CP を保つ有効頂点で , 第 2 項が CP を破る有効頂点である . 電気双極子モーメントに寄与するのはヒッグス粒子が CP を破る相互作用を持っている時なので第 1 項は電気双極子モーメントには効かない . そのため $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する部分のみを考えればよい . 次にこの有効頂点を用いて図 5.4 の 2 つ目のループを計算する . すると最終的には図 5.5 のようになる . この計算で得られた振幅と式 (5.37) の電気双極子モーメントの有効ラグランジアンから得られる振幅をつり合わせることによって $d_f^{h\gamma}$ が得られる .

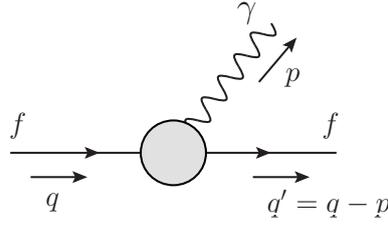


図 5.5: 電気双極子モーメントの有効演算子から得られる振幅 .

以下では得られた計算結果を列挙する . $Y = 0$ の場合電気双極子モーメントは以下ようになる .

$$d_f^{h\gamma} = -\frac{|e|^3 m_f Q_f}{64\pi^4 M \Lambda} a_n^{h\gamma} f F_0 \left(\frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (5.44)$$

$$d_f^{hZ} = -\frac{|e|g^2 m_f}{128\pi^4 M \Lambda} (T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W) a_n^{hZ} f F_1 \left(\frac{m_Z^2}{m_h^2}, \frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (5.45)$$

$$d_f^{WW} = 0 \quad (5.46)$$

ここで Q_f と m_f はそれぞれフェルミオン f の電荷と質量である . T_f^3 は $f = u$ に対しては $T_f^3 = 1/2$ であり , $f = d, e$ に対しては $T_f^3 = -1/2$ である . また m_h と m_Z はそれぞれヒッグス粒子の質量と Z ボソンの質量を表す . ループ関数は以下で定義されている .

$$F_0(r) = r \int_0^1 dx \frac{1}{r - x(1-x)} \ln \left[\frac{r}{x(1-x)} \right] \quad (5.47)$$

$$F_1(r_1, r_2) = \frac{1}{1-r_1} \left[F_0(r_2) - r_1 F_0 \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right] \quad (5.48)$$

その他の量は以下で与えられる .

$$a_n^{h\gamma} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad (5.49)$$

$$a_n^{hZ} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad (5.50)$$

これよりフェルミオン f の電気双極子モーメントは n が大きくなると大きく寄与することがわかる .

$Y \neq 0$ の場合電気双極子モーメントは以下ようになる ⁵ .

$$d_f^{h\gamma} = -\frac{|e|^3 m_f Q_f}{64\pi^4 M \Lambda} (a_n^{h\gamma(1)} f_1 - a_n^{h\gamma(2)} f_2) F_0 \left(\frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (5.51)$$

$$d_f^{hZ} = -\frac{|e|g^2 m_f}{128\pi^4 M \Lambda} (T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W) (a_n^{hZ(1)} f_1 - a_n^{hZ(2)} f_2) F_1 \left(\frac{m_Z^2}{m_h^2}, \frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (5.52)$$

$$d_f^{WW} = \frac{|e|g^2 m_f T_f^3}{512\pi^4 M \Lambda} a_n^{WW} f_2 F_0 \left(\frac{M^2}{m_W^2} \right) \quad (5.53)$$

⁵ここで d_f^{WW} の結果は文献 [109] の結果の n を $2n+1$ に置き換えたものと符号を除いて一致している .

ここでそれぞれの量は以下で定義されている．

$$a_n^{h\gamma(1)} = \frac{1}{3}(2n+1)[n(n+1)+3Y^2] \quad (5.54)$$

$$a_n^{h\gamma(2)} = \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)Y \quad (5.55)$$

$$a_n^{hZ(1)} = \frac{1}{3}(2n+1)[n(n+1)-3Y^2 \tan^2 \theta_W] \quad (5.56)$$

$$a_n^{hZ(2)} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)Y(1-\tan^2 \theta_W) \quad (5.57)$$

$$a_n^{WW} = \frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)Y \quad (5.58)$$

今 $Y = -n$ であるため， n が大きい時には f_2 からの寄与の方がより大きくなることがわかる．

以上の結果を見ればわかるように電気双極子モーメントに対する Barr-Zee ダイアグラムの寄与は CP を破る結合定数に比例し，どれも $1/(M\Lambda)$ の形で抑制されている．一般に，電気双極子モーメントは Λ より大きい高エネルギーの理論において 1 ループの寄与も存在するが，そのような寄与は低エネルギーでは $1/\Lambda^2$ で抑制されたかたちで現れるので， $M \ll \Lambda$ である限りはそのような寄与は主要なものではないため無視できる．また $M \ll \Lambda$ が成り立っていなければ，有効理論そのものが破綻しているのでこれらの計算結果は正しくない．

またここでの計算は式 (5.17) や (5.27) のようなくりこみ不可能な相互作用を使ってループダイアグラムを求めている．そのような場合にループダイアグラムから発散が出てしまうと元のくりこみ可能な理論のパラメータで発散を吸収することができなくなり，予言能力を失ってしまう．今回の電気双極子モーメントの計算ではループダイアグラムは発散していないためそのような問題は生じない．次に求める $h \rightarrow \gamma\gamma$ の計算でもループダイアグラムは発散しない．

この章での結果を見ればわかるように，Barr-Zee ダイアグラムから得られるクォークの電気双極子モーメントと電子の電気双極子モーメントの間には以下のような関係が成り立つ．

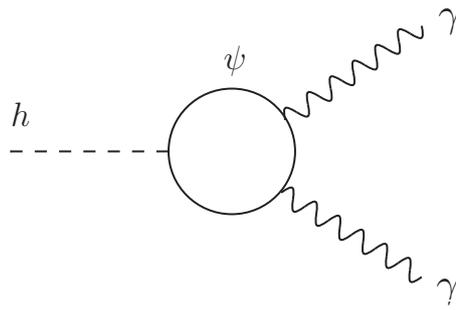
$$\left| \frac{d_q}{d_e} \right| = \frac{Q_q m_q}{Q_e m_e} \quad (5.59)$$

さらに QCD 和則から中性子の電気双極子モーメントとクォークの電気双極子モーメントの間には $d_n \simeq 0.79d_d - 0.20d_u$ [40, 114] という関係が成り立っている．ここで現在の実験結果は電子の電気双極子モーメントは $|d_e| < 8.7 \times 10^{-29}$ [ecm] [66] であり，一方で中性子の電気双極子モーメントは $|d_n| < 2.9 \times 10^{-26}$ [ecm] [41] となっているため，電子の電気双極子モーメントの方が強い制限になっていることがわかる．そのため後で行う数値解析では，電気双極子モーメントの実験的制限は電子のものを用いる．また電子の電気双極子モーメントの場合，電子と Z ボソンの結合定数が $(T_e^3/2 - Q_e \sin^2 \theta_W) = -(1/4 - \sin^2 \theta_W) \simeq -0.02$ と非常に小さくなっているため d_e^{hZ} は主要な寄与ではなくなり， $d_e^{h\gamma}$ と d_e^{WW} が主要な寄与になる．

5.3.2 ヒッグス粒子の崩壊

今考えている有効理論には新たに電荷を持った粒子が存在するので $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊に寄与する可能性がある．実際，図 5.6 のようなダイアグラムを通じて暗黒物質の多重項が新たに $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊に寄与する⁶．計算の詳細は付録 D.5 に与え，ここでは結果のみを書き下す． $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグ

⁶ この寄与はヒッグス粒子の低エネルギー定理からも求められる [95, 115, 116] ．


 図 5.6: 暗黒物質の多重項による $h \rightarrow \gamma\gamma$ への新たな寄与 .

ナルストレングスを以下のようにパラメトライズする .

$$\mu_{\gamma\gamma} = \left| 1 - \frac{G_R}{\mathcal{A}_{\text{SM}}} \right|^2 + \left| \frac{G_I}{\mathcal{A}_{\text{SM}}} \right|^2 \quad (5.60)$$

ここで $\mathcal{A}_{\text{SM}} = 6.49$ は標準模型の振幅であり, 式 (4.12) で定義されている .

G_R と G_I は $Y = 0$ のときは以下ようになる .

$$G_R = \frac{8Mv^2}{m_h^2\Lambda} (1 + (1 - \tau_\psi)f(\tau_\psi)) a_n^{h\gamma} g \quad (5.61)$$

$$G_I = -\frac{8Mv^2}{m_h^2\Lambda} f(\tau_\psi) a_n^{h\gamma} f \quad (5.62)$$

ここで $\tau_\psi = 4M^2/m_h^2$ であり, $a_n^{h\gamma}$ は式 (5.49) で定義されているものである . またループ関数 $f(x)$ は式 (4.8) で定義されているもので, 今の場合以下で与えられる .

$$f(x) = \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)^2 \quad (5.63)$$

$Y \neq 0$ のときは以下ようになる .

$$G_R = \frac{8Mv^2}{m_h^2\Lambda} (1 + (1 - \tau_\psi)f(\tau_\psi)) (a_n^{h\gamma(1)} g_1 - a_n^{h\gamma(2)} g_2) \quad (5.64)$$

$$G_I = -\frac{8Mv^2}{m_h^2\Lambda} f(\tau_\psi) (a_n^{h\gamma(1)} f_1 - a_n^{h\gamma(2)} f_2) \quad (5.65)$$

ここで $a_n^{h\gamma(1)}$ と $a_n^{h\gamma(2)}$ は (5.54) と (5.55) で定義されている .

また $\tau_\psi \rightarrow \infty$ とみなせるときには式 (4.10) より G_R と G_I の近似された表式が得られ, $Y = 0$ の場合には以下のようになり,

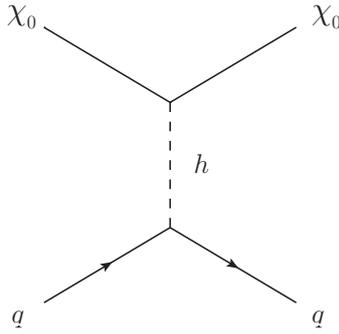
$$G_R = \frac{4v^2}{3M\Lambda} a_n^{h\gamma} g \quad (5.66)$$

$$G_I = -\frac{v^2}{3M\Lambda} a_n^{h\gamma} f \quad (5.67)$$

$Y \neq 0$ の場合は以下ようになる .

$$G_R = \frac{4v^2}{3M\Lambda} (a_n^{h\gamma(1)} g_1 - a_n^{h\gamma(2)} g_2) \quad (5.68)$$

$$G_I = -\frac{2v^2}{M\Lambda} (a_n^{h\gamma(1)} f_1 - a_n^{h\gamma(2)} f_2) \quad (5.69)$$


 図 5.7: $\overline{\chi}_0 \chi_0 \bar{q} q$ の有効演算子にツリーで効く寄与 .

$h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングスの結果は電気双極子モーメントの結果と同じく $1/(M\Lambda)$ で抑制され, n が大きくなると寄与が大きくなる形になっている. しかし結合定数に関しては CP を保つものと破るものの両方の寄与がある.

5.3.3 暗黒物質の直接検出

ここでは暗黒物質の直接検出について議論する. 式 (4.38), (4.39) の暗黒物質とクォークの有効ラグランジアンを再掲する.

$$\mathcal{L} = \sum_{q=u,d,s} \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & f_q m_q \overline{\chi}_0 \chi_0 \bar{q} q + d_q \overline{\chi}_0 \gamma^\mu \gamma_5 \chi_0 \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q \\ & + \frac{g_q^{(1)}}{M} \overline{\chi}_0 i \partial^\mu \gamma^\nu \chi_0 \mathcal{O}_{\mu\nu}^q + \frac{g_q^{(2)}}{M} \overline{\chi}_0 (i \partial^\mu) (i \partial^\nu) \chi_0 \mathcal{O}_{\mu\nu}^q \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\mathcal{L}_g = f_G \overline{\chi}_0 \chi_0 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (5.72)$$

今考えている有効理論では暗黒物質 χ_0 は式 (5.27) よりヒッグス粒子と以下のように相互作用を持つ.

$$\mathcal{L}_{\chi\chi h} = -\frac{1}{2} \hat{g}_{\psi\psi h}^{S(n)} \overline{\chi}_0 \chi_0 \quad (5.73)$$

ここでそれぞれの記号の定義は付録 D.1, D.2 で与えてある. この相互作用は図 5.7 のダイアグラムを通じて暗黒物質とクォークの有効相互作用を導く. またこのツリーの寄与の他に電弱ゲージボソンが飛び暗黒物質とクォークの有効演算子に寄与する 1 ループのダイアグラムや暗黒物質とグルーオンの有効演算子 2 ループの寄与があり, これらの寄与を電弱ゲージボソンの寄与と呼ぶことにする [97, 101, 117]. ツリーの寄与が効くのは f_q だけであり, 電弱ゲージボソンの寄与と合わせて以下のようにになっている.

$$f_q = f_q^{\text{tree}} + f_q^{\text{EW}} \quad (5.74)$$

$$f_q^{\text{tree}} = \frac{1}{2m_h^2 v} \hat{g}_{\psi\psi h}^{S(n)} \quad (5.75)$$

$$f_q^{\text{EW}} = [N^2 - (4Y^2 + 1)] f_q^W + Y^2 f_q^Z \quad (5.76)$$

ここで m_h はヒッグス粒子の質量で v はヒッグスの真空期待値であり, $N = 2n + 1$ である. また f_q^W, f_q^Z は定数である. 電弱ゲージボソンの寄与の完全な表式は文献 [97] で与えられており, 具体的な式は付録 D.7 に載せてある.

ここではツリーレベルの寄与の振る舞いを見るため f_q^{tree} のみを考える. すると陽子と暗黒物質のスピンに依存しない散乱断面積は以下ようになる.

$$\sigma_{\text{SI}}^p = \frac{2m_p^4 (\hat{g}_{\psi\psi h}^{S(n)})^2}{\pi m_h^4 v^2} \left(\frac{1}{9} f_{TG} + \frac{1}{2} \sum_{q=u,d,s} f_{Tq} \right)^2 \quad (5.77)$$

ここで m_p は陽子の質量である. $1/\Lambda$ の摂動を考えれば $Y = 0$ のときは $\hat{g}_{\psi\psi h}^{S(n)}$ は以下で与えられる.

$$\hat{g}_{\psi\psi h}^{S(n)} = \frac{v}{\Lambda} g \quad (5.78)$$

同様に $Y \neq 0$ のときは以下で与えられる.

$$\hat{g}_{\psi\psi h}^{S(n)} = \frac{v}{\Lambda} \left(g_1 - g_2 \frac{n}{2} \right) \quad (5.79)$$

これらは $1/\Lambda$ で抑制されている. 電気双極子モーメントや $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングスとは異なり, これはツリーレベルの寄与であるため暗黒物質の多重項がループで回る寄与がなく, n の冪に比例した因子は出てこない. また結合定数に関しては CP を保つもののみが寄与する.

電弱ゲージボソンの寄与はカットオフスケール Λ に依存しないため, カットオフスケールを大きくしていくとあるスケールでツリーの寄与と電弱ゲージボソンの寄与が逆転する. これは後で行う数値計算で見る.

5.4 結果

この章では今までに計算してきた物理量の数値的に評価し, 有効理論のパラメータに対する制限を考える. ここでの解析では CP を保つ結合定数を 1 と置き, 有効理論に含まれているパラメータは有効理論のカットオフスケール Λ と CP を破る結合定数とみなす.

またここで用いる実験値は以下のとおりである.

電子の電気双極子モーメント [66].

$$d_e < 8.7 \times 10^{-29} \text{ [ecm]} \quad (5.80)$$

暗黒物質と陽子のスピンに依存しない散乱断面積 [105].

$$\sigma_{\text{SI}}^p \lesssim 10^{-45} \text{ [cm}^2\text{]} \quad (5.81)$$

$h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングス [90, 91].

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma\gamma} &= 1.17 \pm 0.27 \text{ (ATLAS)} \\ \mu_{\gamma\gamma} &= 1.14_{-0.23}^{+0.26} \text{ (CMS)} \end{aligned} \quad (5.82)$$

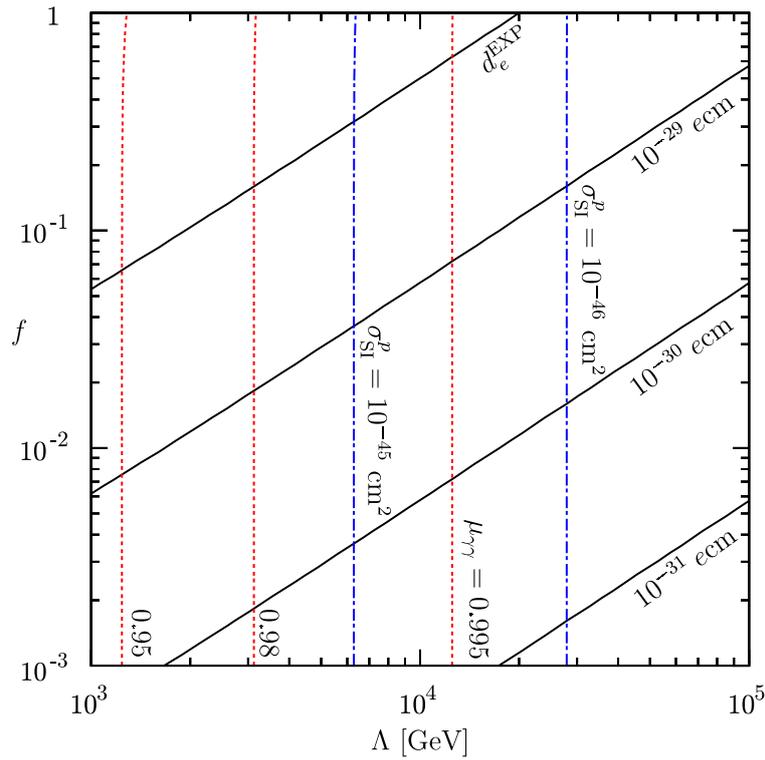


図 5.8: $Y = 0$ で $n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合にスケール Λ と CP を破る結合定数 f の平面で $|d_e|$ と σ_{SI}^p と $\mu_{\gamma\gamma}$ の値を書いた図．ここでは $M = 400$ GeV としている．

$Y = 0, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合

まずは $Y = 0$ で $n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合を考える．図 5.8 はスケールと CP を破る結合定数の (Λ, f) 平面で $|d_e|, \sigma_{\text{SI}}^p, \mu_{\gamma\gamma}$ をプロットしたものである．ここでは $M = 400$ GeV としている．この場合暗黒物質の質量は $400 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}} \lesssim 431 \text{ GeV}$ である．黒色の線は電子の電気双極子モーメントの値を表し，それぞれの線は上から $d_e^{\text{exp}} = 8.7 \times 10^{-29} [\text{ecm}], 10^{-29} [\text{ecm}], 10^{-30} [\text{ecm}], 10^{-31} [\text{ecm}]$ に対応している．図を見てわかるように $f = 0.1(1.0)$ の時，現在の電気双極子モーメントの実験的制限を満たすためには Λ が 2(20) TeV より大きくなければならないことがわかる． M が大きくなると $|d_e|$ は $1/M$ でスケールする．

青色の縦の線はスピンに依存しない散乱断面積の値を表し，それぞれの線は左から $\sigma_{\text{SI}}^p = 10^{-45} \text{ cm}^2, \sigma_{\text{SI}}^p = 10^{-46} \text{ cm}^2$ に対応している．式 (5.78) からわかるように σ_{SI}^p は f と M には依存していないためこのような振る舞いをする．今の場合，電弱ゲージボソンによる寄与は $\sigma_{\text{SI}}^{p(\text{EW})} \simeq 1.4 \times 10^{-47} \text{ cm}^2$ であり， $\Lambda \gtrsim 47 \text{ TeV}$ のときツリーの寄与 $\sigma_{\text{SI}}^{p(\text{tree})}$ の方が小さくなり $\Lambda = 100 \text{ TeV}$ のとき $\sigma_{\text{SI}}^{p(\text{tree})} \simeq 3.0 \times 10^{-48} \text{ cm}^2$ まで小さくなる．

赤色の縦の線はシグナルストレングス $\mu_{\gamma\gamma}$ を表しており，左からそれぞれ $\mu_{\gamma\gamma} = 0.95, 0.98, 0.995$ に対応している．今は $|Q| = 1$ の電荷を持つフェルミオンが存在し，シグナルストレングス $\mu_{\gamma\gamma}$ は $\Lambda \lesssim 3 \text{ TeV}$ で 2% 以下しか変化しない．式 (5.60) の形から $\mu_{\gamma\gamma}$ の 1 からのずれに効くのは G_R の方であり， $1/(M\Lambda)$ の形でスケールしている．

$Y = -n, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合

次は $Y \neq 0$ で $n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合を考える．この場合の結果は図 5.9 に示した．ここでは簡単のため $f_1 = f_2 \equiv f$ とし， $M = 400$ GeV ととってある．それぞれの色の対応は図 5.8 と同じである．今の場合 $|Q| = 0, 1, 2$ の電荷を持つフェルミオンが存在しており，その物理的な質量はそれぞれ次の範囲をとっている．

$$400 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}}^{(j=1) (|Q|=0)} \lesssim 415 \text{ GeV} \quad (5.83)$$

$$400 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}}^{(j=0) (|Q|=1)} \lesssim 431 \text{ GeV} \quad (5.84)$$

$$400 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}}^{(j=-1) (|Q|=2)} \lesssim 448 \text{ GeV} \quad (5.85)$$

今は $|Q| = 2$ の電荷をもつフェルミオンがいるせいで $Y = 0, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合とは結果が大きく異なる．電子の電気双極子モーメントの制限については現在の実験値から許されている領域 $|d_e| < |d_e^{\text{exp}}|$ が前の場合に比べて小さくなっている．例えば $f = 0.1$ に対しては $\Lambda \gtrsim 15$ TeV となっていなければならない， $f = 1.0$ に対してはスケールを $\Lambda = 100$ TeV にとっても許される領域はない．

σ_{SI}^p については $Y = 0, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合に比べて小さくなっており， Λ が大きい領域では $\sigma_{\text{SI}}^p = \mathcal{O}(10^{-48}) \text{ cm}^2$ 程になっている．式 (5.76) を見てもわかるように電弱ゲージボソンの寄与は Y が大きくなると小さくなる．

$\mu_{\gamma\gamma}$ については $Y = 0, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合に比べより小さくなっている．例えば $\Lambda \simeq 2$ TeV の時 $\mu_{\gamma\gamma} = 0.8$ となっている．これは $|Q| = 2$ の電荷をもつフェルミオンの寄与が主要なものとなっている．

この例では簡単のため $f_1 = f_2$ としたが $f_1 \neq f_2$ の時には式 (5.51) からわかるようにパラメータの選び方によっては d_e を相殺するようにできるので，電子の電気双極子モーメントの制限は緩くなると考えられる．

$Y = -n, n = 1/2$ (アイソスピン 2 重項) の場合

$Y \neq 0$ で $n = 1/2$ (アイソスピン 2 重項) の場合の結果は図 5.10 で与えられている．インプットパラメータは図 5.9 の時と同じである． $|Q| = 0, 1$ の電荷を持つフェルミオンの質量の取る範囲は以下のとおりである．

$$400 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}}^{(1/2) (|Q|=0)} \lesssim 423 \text{ GeV} \quad (5.86)$$

$$400 \text{ GeV} \lesssim M_{\text{phys}}^{(-1/2) (|Q|=1)} \lesssim 440 \text{ GeV} \quad (5.87)$$

この場合のフェルミオンの構成は $Y = 0, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合と同じであるが，式 (5.27) の第 2 項があるため電子の電気双極子モーメントとシグナルストレングス $\mu_{\gamma\gamma}$ は大きくなる．一方で σ_{SI}^p は $Y = -n, n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合と同様 $Y \neq 0$ なので電弱ゲージボソンによる寄与が小さくなるため全体として小さくなる．

熱的シナリオの場合

ここでは簡単に熱的な暗黒物質のシナリオを議論する． $(Y, n) = (0, 1), (-1/2, 1/2)$ の時の結果を図 5.11 に示す．この時の暗黒物質の質量はそれぞれ $M = 2.9$ TeV, $M = 1.0$ TeV である．また

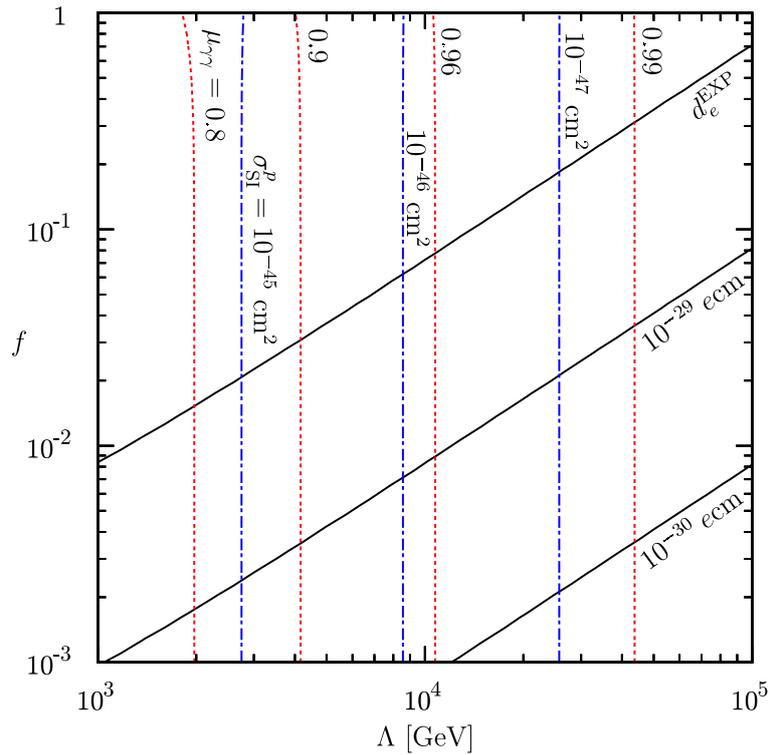


図 5.9: $Y = -n$ で $n = 1$ (アイソスピン 3 重項) の場合にスケール Λ と CP を破る結合定数 f の平面で $|d_e|$ と σ_{SI}^p と $\mu_{\gamma\gamma}$ の値を書いた図．ここでは $f_1 = f_2 \equiv f$ で $M = 400$ GeV としている．

ここでは $(Y, n) = (-1, 1)$ の場合は考えない．これは正しい質量を求めるための Sommerfeld 効果がこの場合には知られていないからである．スケール Λ は有効理論が正当化される条件 $M \ll \Lambda$ を満たすように $\Lambda = 10^4$ GeV から始まっている．今暗黒物質の多重項の質量が大きいため $\mu_{\gamma\gamma}$ の標準模型からのずれは 1% 以下になってしまい，図には現れない．同様に電子の電気双極子モーメントの現在の実験的制限も $(Y, n) = (-1/2, 1/2)$ の場合の非常に小さな領域を除いてこのパラメータ領域では制限になっていない．暗黒物質の直接検出の結果は $(Y, n) = (0, 1)$ の場合は Λ が大きくなるに連れてゆるやかに小さくなっていき， $\Lambda = 10^6$ GeV では $\sigma_{\text{SI}}^p = 1.5 \times 10^{-47}$ cm² になる．一方で $(Y, n) = (-1/2, 1/2)$ の場合は $Y \neq 0$ のため電弱ゲージボソンによる寄与が抑制され， $(Y, n) = (0, 1)$ の場合と比べ小さくなっている．

将来実験

最後に将来実験について触れておく．電子の電気双極子モーメントは $d_e \sim 10^{-30}$ ecm まで改良されると期待されている [118–120]．暗黒物質の直接検出については σ_{SI}^p は XENON1T 実験で 1 桁以上改良され [106]，LZ 実験ではさらに改良されると期待されている [107]． $\mu_{\gamma\gamma}$ については高ルミノシティ LHC (HL-LHC) [92, 93] や ILC [94] のような将来の加速器実験によって $\mathcal{O}(5)\%$ まで改良されることが期待されている．これらのデータを全て組み合わせれば熱的生成でない暗黒物質のシナリオに対してはほとんど全ての領域を調べることができる．

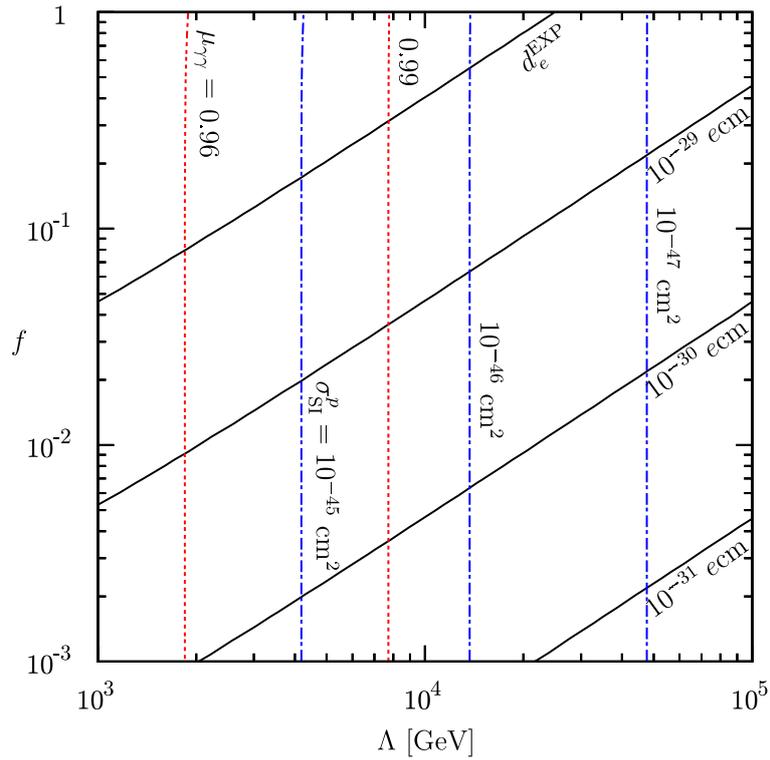


図 5.10: $Y = -n$ で $n = 1/2$ (アイソスピン 2 重項) の場合にスケール Λ と CP を破る結合定数 f の平面で $|d_e|$ と σ_{SI}^p と $\mu_{\gamma\gamma}$ の値を書いた図．ここでは $f_1 = f_2 \equiv f$ で $M = 400$ GeV としている．

5.5 第 5 章の結論

ここでは第 5 章の結論をまとめる．この章では $\mathcal{O}(100)$ GeV の質量を持ち電弱相互作用をするフェルミオン暗黒物質の有効理論の現象論を議論した．まずヒッグス場と $SU(2)_L$ 多重項のフェルミオンとの有効理論を構築し，電気双極子モーメント， $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングス，暗黒物質と核子の散乱断面積を求めた．

ベンチマークとして $SU(2)_L$ 多重項のフェルミオンの質量を 400 GeV とし，フェルミオンが (1) $Y = 0$ で 3 重項，(2) $Y \neq 0$ で 3 重項，(3) $Y \neq 0$ で 2 重項の 3 つの場合を調べた．その結果 LUX 実験の暗黒物質の直接検出の制限 ($\sigma_{\text{SI}}^p \sim 10^{-45} \text{ cm}^2$) はカットオフスケール Λ が数 TeV の領域まで探れ，3 つの中でも (1) の場合がこれによって最も強く制限されることがわかった．もしヒッグス粒子とフェルミオンの CP を破る結合定数が 1 ととったら，現在の電子の電気双極子モーメントの制限から (1) と (3) の場合では $\Lambda \gtrsim 20$ TeV でなければならず，その一方で (2) の場合では $\Lambda \gtrsim 100$ TeV でなければならない． $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングスについては (1) と (3) の場合は 1 から数%しかずれないが，(2) の場合は 20%ずれている領域もある．しかし現在の実験値の精度ではこれらのずれは全て許されている．今回の解析で現在の実験値で制限されていないパラメータ領域も将来実験を考慮すれば 3 つ全ての場合でほとんどすべてのパラメータ領域が調べられることがわかった．

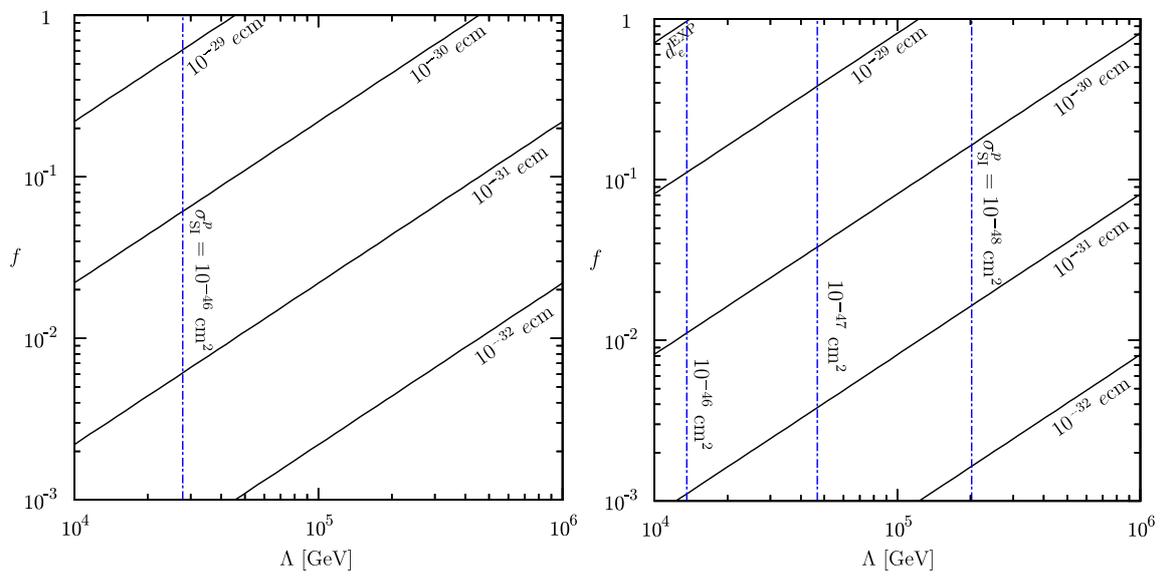


図 5.11: 熱的な暗黒物質のシナリオの場合にスケール Λ と CP を破る結合定数 f の平面で $|d_e|$ と σ_{SI}^p と $\mu_{\gamma\gamma}$ の値を書いた図。(左図) $Y = 0, n = 1$ で $M = 2.9$ TeV である。(右図) $Y = -1/2, n = 1/2$ で $M = 1.0$ TeV である。

第6章 超対称標準模型

超対称性 (supersymmetry, SUSY) とはボゾンとフェルミオンを入れ替える対称性であり, 標準模型に超対称性を導入した模型は超対称標準模型 (supersymmetric standard model, SUSY SM) と呼ばれる. この章では最も単純な超対称標準模型である最小超対称標準模型 (minimal supersymmetric standard model, MSSM) とその拡張である高いスケールの超対称模型 (high-scale SUSY model) について説明する. なおここでの内容は文献 [121] を参考にした.

6.1 最小超対称標準模型

最小超対称標準模型 (minimal supersymmetric standard model, MSSM) に含まれる粒子は表 6.1 にまとめてある. またフェルミオン ψ とスカラー ϕ に対して以下のような表記を用いる場合もある.

$$\psi_L = \psi_{2\text{-comp}}, \quad \psi_R = \bar{\psi}_{2\text{-comp}} \quad (6.1)$$

$$\tilde{\phi}_L = \tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}_R = \tilde{\phi} \quad (6.2)$$

最小超対称標準模型のスーパーポテンシャルは以下で与えられる.

$$W_{\text{MSSM}} = (Y_u)_{ij} \bar{U}_i Q_j H_u - (Y_d)_{ij} \bar{D}_i Q_j H_d - (Y_e)_{ij} \bar{E}_i L_j H_d + \mu_H H_u H_d \quad (6.3)$$

ここで $SU(3)_C$ の足 α と $SU(2)_L$ の足 a, b は以下のように暗に潰している.

$$\bar{U}_i Q_j H_u = \epsilon_{ab} \bar{U}_{i\alpha} Q_i^{\alpha a} H_u^b, \quad H_u H_d = \epsilon_{ab} H_u^a H_d^b \quad (6.4)$$

また $\epsilon_{12} = 1$ である¹.

ゲージ不変なスーパーポテンシャルは式 (6.3) の他にもバリオン数, レプトン数を破るものとして以下のものが考えられる.

$$W_{\Delta L=1} = \frac{1}{2} \lambda_{ijk} L_i L_j \bar{E}_k + \lambda'_{ijk} L_i Q_j \bar{D}_k + \mu'_i L_i H_u \quad (6.5)$$

$$W_{\Delta B=1} = \frac{1}{2} \lambda''_{ijk} \bar{U}_i \bar{D}_j \bar{D}_k \quad (6.6)$$

ここで $\Delta L = 1$ と $\Delta B = 1$ はそれぞれレプトン数 L とバリオン数 B が 1 変化することを意味する. また添字 $i = 1, 2, 3$ は世代の足を表す. このようなレプトン数やバリオン数を破る相互作用が抑制されずに図 6.1 で表わされるような過程から陽子崩壊が簡単に生じてしまう. この過程の崩壊幅を次元解析で求めると以下ようになる.

$$\Gamma_{p \rightarrow e^+ \pi^0} \sim m_p^5 \sum_{i=2,3} \frac{|\lambda'_{11i} \lambda''_{11i}|^2}{m_{d_i}^4} \quad (6.7)$$

¹ ちなみに 2 成分表示の ϵ は $\epsilon^{12} = -\epsilon_{12} = 1$ である.

超場	スピン 0	スピン 1/2	スピン 1	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$	B	L
$Q = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}$	$\tilde{q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$		$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{3}$	0
\bar{U}	\tilde{u}_R^c	u_R^c		$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$	$-\frac{1}{3}$	0
\bar{D}	\tilde{d}_R^c	d_R^c		$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	0
$L = \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}$	$\tilde{l}_L = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$		$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	0	1
\bar{E}	\tilde{e}_R^c	e_R^c		$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$	0	-1
V_G		\tilde{G}	G	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$	0	0
$\begin{pmatrix} V_{W^+} \\ V_{W^0} \\ V_{W^-} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{W}^0 \\ \tilde{W}^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} W^+ \\ W^0 \\ W^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$	0	0
V_B		\tilde{B}	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	0	0
$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	$\tilde{H}_u = \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}$		$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$	0	0
$H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	$H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	$\tilde{H}_d = \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}$		$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	0	0

表 6.1: 最小超対称標準模型に存在する粒子

ここで m_p は陽子の質量, $m_{\tilde{d}}$ はダウン型のスクォークの質量である. 陽子の寿命は実験的に非常に強く制限されており, また陽子崩壊以外にも様々なフレーバーの物理からこのレプトン数とバリオン数を破る相互作用の結合定数は非常に小さくなくてはならないということが知られている [122–129].

そこでこのような現象論的に危険な相互作用を禁止するため R パリティもしくはマターパリティと呼ばれる離散的な対称性を理論に課すことにする [130–134]. それぞれの粒子に対して R パリティは以下で定義される².

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \quad (6.9)$$

ここで B, L はそれぞれバリオン数, レプトン数で s は粒子の持つスピンである. ここから標準模型の粒子は $R = +1$ でその超対称パートナー粒子は $R = -1$ になる. また R パリティは超場形式を用いると以下のように定義される.

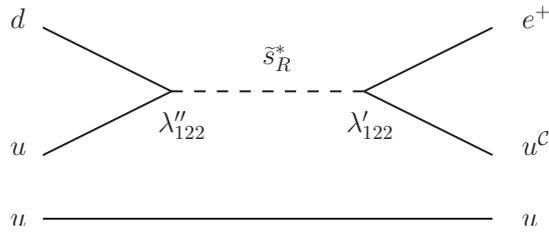
$$\Phi(x, \theta) \rightarrow -\Phi(x, -\theta) \quad (\text{物質のカイラル超場の場合}) \quad (6.10)$$

$$\Phi(x, \theta) \rightarrow \Phi(x, -\theta) \quad (\text{ヒッグスのカイラル超場の場合}) \quad (6.11)$$

最も軽い超対称粒子 (lightest supersymmetric particle, LSP) はこの R パリティのため崩壊できず安定になる. そのため暗黒物質の魅力的な候補になりうる [135, 136]. また最小超対称標準模型と

² R パリティと等価なものとしてマターパリティを考える場合もある. マターパリティは以下で定義される.

$$P_M = (-1)^{3(B-L)} \quad (6.8)$$


 図 6.1: R パリティを破る項によって生じる陽子崩壊の例 .

いった場合には R パリティは理論に課されているとする .

電弱スケールに超対称パートナー粒子が存在しないことから超対称性は低エネルギーでは破れていなければならない . そこで超対称性をソフトに破るラグランジアンを一般的に書くと以下のようになる .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{MSSM}} = & -\frac{1}{2} \left[M_3 \tilde{g}^a \tilde{g}^a + M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a + M_1 \tilde{B} \tilde{B} + \text{h.c.} \right] \\
 & - \left[(A_u)_{ij} \tilde{u}_i \tilde{q}_j H_u + (A_d)_{ij} \tilde{d}_i \tilde{q}_j H_d + (A_e)_{ij} \tilde{e}_i \tilde{l}_j H_d + \text{h.c.} \right] \\
 & - (m_q^2)_{ij} \tilde{q}_i^\dagger \tilde{q}_j - (m_l^2)_{ij} \tilde{l}_i^\dagger \tilde{l}_j - (m_{\tilde{u}}^2)_{ij} \tilde{u}_i \tilde{u}_j^\dagger - (m_{\tilde{d}}^2)_{ij} \tilde{d}_i \tilde{d}_j^\dagger - (m_{\tilde{e}}^2)_{ij} \tilde{e}_i \tilde{e}_j^\dagger \\
 & - m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - [B\mu_H H_u H_d + \text{h.c.}]
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

ここで 1 行目はゲージノの質量項 , 2 行目は A 項と呼ばれるスカラーの 3 点相互作用 . 3 行目はスフェルミオンのソフトな質量項 , 4 行目はヒッグスのソフトな質量項である . ここで導入された質量 (行列) や結合定数 (行列) は一般に非対角成分を持ち , さらに複素位相も持つため , フレーバーを破る過程や CP を破る過程を生じる . このような過程は実験で厳しく制限されているため , ソフトな質量や結合定数の非対角成分や複素位相は小さくしなければならない . これらはそれぞれ超対称フレーバー問題 (SUSY flavor problem) , 超対称 CP 問題 (SUSY CP problem) と呼ばれる . これらの問題は様々な解決策が提案されているが後で紹介する高いスケールの超対称模型ではこの問題は深刻にはならないことを見る .

ここからは最小超対称標準模型での電弱対称性の破れの構造を見る . 最小超対称標準模型のヒッグスのスカラーポテンシャルは以下で与えられる .

$$\begin{aligned}
 V = & (|\mu_H|^2 + m_{H_u}^2)(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2) + (|\mu_H|^2 + m_{H_d}^2)(|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) \\
 & + [B\mu_H(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + \text{h.c.}] \\
 & + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2)(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 + \frac{1}{2} g^2 |H_u^+ H_d^{0*} + H_u^0 H_d^{-*}|^2
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

このスカラーポテンシャルからヒッグス場の中性成分は真空期待値を持ち , これを以下のように定義する .

$$\langle H_u^0 \rangle = \frac{v_u}{\sqrt{2}} , \quad \langle H_d^0 \rangle = \frac{v_d}{\sqrt{2}} \tag{6.14}$$

また標準模型のヒッグスの真空期待値 $v \sim 246$ GeV との関係は以下のとおりである .

$$v^2 = v_u^2 + v_d^2 \tag{6.15}$$

これらの真空期待値の比は理論に含まれるパラメータで以下のように定義したものをよく使う．

$$\tan\beta \equiv \frac{v_u}{v_d} \quad (6.16)$$

最小超対称標準模型では物理的なヒッグス粒子として CP を保つヒッグス粒子 h, H , CP を破るヒッグス粒子 A , 電荷を持つヒッグス粒子 H^\pm が存在する．ツリーレベルではこれらの粒子の質量は以下のように与えられる．

$$m_A^2 = \frac{2B\mu_H}{\sin(2\beta)} = 2|\mu_H|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 \quad (6.17)$$

$$m_{h,H}^2 = \frac{1}{2} \left(m_A^2 + m_Z^2 \mp \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2 + 4m_Z^2 m_A^2 \sin^2(2\beta)} \right) \quad (6.18)$$

$$m_{H^\pm}^2 = m_A^2 + m_W^2 \quad (6.19)$$

ここで CP を保つヒッグス粒子の中で軽い方 h は標準模型のヒッグス粒子と同一視できるはずであるが，ツリーレベルではこのヒッグス粒子に対して以下のように上限が与えられている．

$$m_h^2 \leq m_Z^2 \cos^2(2\beta) \quad (6.20)$$

そのためツリーレベルではヒッグス粒子の質量を説明することはできない．量子効果はストップがループに回る寄与が最も主要なもので近似的な表式は以下で与えられる [137–141] ．

$$m_h^2 \approx m_Z^2 \cos^2 2\beta + \frac{3}{8\pi^2} \frac{m_t^2}{v^2} \left[\ln \frac{m_t^2}{m_t^2} + \frac{X_t^2}{m_t^2} \left(1 - \frac{X_t^2}{12m_t^2} \right) \right] \quad (6.21)$$

ここで $m_t^2 = m_{q_3} m_{\bar{u}_3}$ であり， $X_t = A_t - \mu_H \cot \beta$ である．最小超対称標準模型ではストップの質量が $\mathcal{O}(1)$ TeV 付近である場合にはこの寄与でも観測されたヒッグス粒子の質量を説明することは難しく，模型を拡張する必要がある．

次の章では最小超対称標準模型の拡張として高いスケールの超対称模型を考える．

6.2 高いスケールの超対称模型

高いスケールの超対称模型 (high-scale SUSY model) は最小超対称標準模型の拡張であり，次のような質量スペクトルを持つ理論として定義される [20–22] ．標準模型のヒッグス粒子を除く全てのスカラー粒子は $\mathcal{O}(10^2\text{--}10^3)$ TeV の質量を持ち，一方でゲージノは $\mathcal{O}(1)$ TeV の質量を持つ．このような質量スペクトルはアノマリー媒介機構 (anomaly mediation) を通して実現される [27, 28] ．また超対称性の破れを起こすセクターに 1 重項の超場は存在しないと仮定する．すると標準模型のヒッグス粒子を除くスカラー粒子は超重力理論のツリーレベルでの相互作用を通じて生じ，グラビティーの質量と同じオーダーの質量を持つ．一方でゲージノの質量はツリーレベルでは存在せず 1 ループの寄与で生じ，以下ようになる [27, 28] ．

$$M_a^{\text{AMSB}} = \frac{\beta(g_a)}{g_a} m_{3/2} \quad (6.22)$$

ここで添字 $a = 1, 2, 3$ はそれぞれ $U(1)_Y$, $SU(2)_L$, $SU(3)_C$ を意味する．また， $\beta(g_a)$ はゲージ結合定数 g_a に対するベータ関数であり， $m_{3/2}$ はグラビティーノの質量である． $U(1)_Y$ のゲージ結

合定数に関しては $SU(5)$ の規格化 $g_1 \equiv \sqrt{5/3}g'$ を用いている．またウィーノとビーノの質量に対してはヒッグシーノ-ヒッグス粒子のループを介して生じる補正も存在し，ヒッグシーノの質量スケール以下ではこの補正は以下で与えられる [27]．

$$M_1^{\tilde{h}H} = \frac{g_1^2}{16\pi^2} \frac{3}{5} L, \quad M_2^{\tilde{h}H} = \frac{g_2^2}{16\pi^2} L \quad (6.23)$$

ここで L は以下で定義されるループ関数である．

$$L = \mu_H \sin 2\beta \frac{m_A^2}{|\mu_H|^2 - m_A^2} \ln \frac{|\mu_H|^2}{m_A^2} \quad (6.24)$$

μ_H と m_A はそれぞれヒッグシーノの質量と重いヒッグス粒子の質量を表す．また $\tan \beta \equiv v_u/v_d$ であり， $\langle H_u^0 \rangle = v_u/\sqrt{2}$ ， $\langle H_d^0 \rangle = v_d/\sqrt{2}$ である．

このスフェルミオンは 100 TeV 付近の質量を持っており，一方でゲージノは数 TeV 付近の質量を持っているという質量スペクトルは次のような非常に良い性質を持っている．

- 標準模型のヒッグス粒子の質量 125 GeV を説明できる [21, 22] ．
- 危険なフレーバーや CP を破る過程は重いスフェルミオンによって抑制されるため，超対称フレーバー問題や超対称 CP 問題の解決が簡単になる [23] ．
- 電氣的に中性なウィーノが数 TeV の質量を持つ最も軽い超対称粒子となり，熱的な暗黒物質のシナリオとの相性が良い [12] ．
- 高いスケールの超対称性理論に基づく大統一理論においては大統一スケールでゲージ結合定数の統一の精度が非常に良くなる [24] ．
- カラーを持つヒッグス (colored Higgs) 粒子の交換によって生じる危険な陽子崩壊も重いスカラーの質量によって抑制される [25, 26] ．

第 7 章の計算で用いるため，以下のスフェルミオンと重いヒッグス粒子を積分したあとの有効ラグランジアンを与えておく [142] ．

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \left[(f_u)_{ij} q_j^\dagger \tilde{u}_i^\dagger \tilde{\Phi}^* + (f_d)_{ij} q_j^\dagger \tilde{d}_i^\dagger \Phi + (f_e)_{ij} l_j^\dagger \tilde{e}_i^\dagger \Phi + \text{h.c.} \right] \\ & - \left[\frac{1}{2} M_3 \tilde{g}^a \tilde{g}^a + \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a + \frac{1}{2} M_1 \tilde{B} \tilde{B} + \mu_H \tilde{H}_u \tilde{H}_d + \text{h.c.} \right] \\ & - \sqrt{2} \left(\tilde{g}_u \Phi^\dagger \tilde{W}^a T^a \tilde{H}_u + \tilde{g}'_u Y_{H_u} \Phi^\dagger \tilde{B} \tilde{H}_u + \tilde{g}_d \tilde{\Phi}^\dagger \tilde{W}^a T^a \tilde{H}_d + \tilde{g}'_d Y_{H_d} \tilde{\Phi}^\dagger \tilde{B} \tilde{H}_d + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

ここで Φ は標準模型のヒッグス場を表す．

第7章 高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメント

この章では高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメントを調べる．ここでの内容は主に副論文 [143] に基づいている．

7.1 導入

6.2 節で議論したように高いスケールの超対称性理論は多くの良い性質があることから魅力的な模型である．高いスケールの超対称性理論の最も単純な模型はアノマリー媒介機構によるものである [27, 28]．一方でより一般的な模型として超対称性の破れのセクターにゲージ媒介機構を含む模型も提案されている [29, 30]．このような拡張された模型ではゲージノの質量の表式が最も簡単な模型とは異なる．ここでメッセンジャーとして導入されるベクトル多重項は Giudice-Masiero 機構 [144] によってグラビティーノの質量に比例した質量を得る．またこの新たに導入したベクトル多重項が $SU(5)$ の表現に属していると仮定すればこのような模型でもゲージ結合定数の統一は維持される．そのためここではこの拡張された模型を考える．

電気双極子モーメントは CP を破る物理量であるため超対称性の破れのセクターにおける CP の破れを調べるために重要な物理量である．第 3.4 節で示したように標準模型における電気双極子モーメントは非常に小さいので標準模型を超える物理の CP の破れに対して高い感度を持っている [6]．高いスケールの超対称性理論での一般的な CP 位相は電気双極子モーメントが 1 ループで生じて重いスフェルミオンの質量で抑制されているため実験的には許されている．しかし電気双極子モーメントの将来実験では高いスケールの超対称模型の CP 位相を測れるまで感度が良くなると期待されている．

最も簡単な高いスケールの超対称模型における電気双極子モーメントへの主要な寄与は 2 ループの Barr-Zee ダイアグラムであり，特にチャージノとニュートラリーノが回るダイアグラムである．ヒッグシーノやウィーノの質量が数 TeV の時には電子の電気双極子モーメントの現在の実験的制限はこの模型に制限を与えている．また電子と核子の電気双極子モーメントの比も予想でき，この比を測定することで質量スペクトルを読み取れる可能性もある．

最も簡単な高いスケールの超対称模型にゲージ媒介機構の寄与を含めた拡張された模型では，電気双極子モーメントに対してこれとは別のグルイーノからの寄与が存在する．アノマリー媒介機構とゲージ媒介機構から生じるグルイーノの質量の位相が物理的な位相として残り，これとさらにグルイーノとメッセンジャーのベクトル多重項との CP を破る相互作用によって，グルイーノのカラー電気双極子モーメントが生じる．これは低エネルギーでは CP を破る Weinberg 演算子 [57] に寄与し，これが核子の電気双極子モーメントに寄与する．

この章の主な目的はこの拡張された模型において電気双極子モーメントに対するグルイーノの寄与を調べることである．

ちなみに左巻きと右巻きのスフェルミオンがフレーバーを破るソフトな質量項を持っている場合には 1 ループの電気双極子モーメントが生じ、フレーバーのや破れが $\mathcal{O}(1)$ の時にはこの寄与がかなり大きくなる [114, 145, 146] . しかしフレーバーの破れが小さくなるとこの寄与は急速に小さくなるので今回の解析ではフレーバーの破れから生じる電気双極子モーメントの寄与は考えない .

7.2 ゲージノの質量と複素位相

今回考える模型では超対称性の破れを起こすセクターに 1 重項の超場は存在しないと仮定する . この仮定のもとではソフトなパラメータは次のように与えられる . スカラー成分の質量はプランクスケールで抑制された高次元の演算子によって生じ、ゲージノの質量とスカラーの 3 点結合はアノマリー媒介機構によって 1 ループで抑制されて生じる [27, 28] . 特にアノマリー媒介機構でのゲージノの質量は以下のような形で与えられる .

$$M_a^{\text{AMSB}} = \frac{\beta(g_a)}{g_a} m_{3/2} \quad (7.1)$$

ここで添字 $a = 1, 2, 3$ はそれぞれ $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ を意味する . また、 $\beta(g_a)$ はゲージ結合定数 g_a に対するベータ関数であり、 $m_{3/2}$ はグラビティーの質量である .

もしこの模型にゲージ媒介機構のメッセンジャーと呼ばれるベクトル的な超場が存在したならばこれらのソフトなパラメータは単純な高いスケールの超対称模型とは異なる¹ . ここではゲージ結合定数の統一を維持するためメッセンジャー超場は $5 + \bar{5}$ もしくは $10 + \bar{10}$ の表現に属していると仮定する . メッセンジャー超場の質量項は Giudice-Masiero 機構によって生じる [144] . 今の場合ケーラーポテンシャルは以下のように与えられている .

$$K = |\bar{\Phi}|^2 + |\Phi|^2 + (c_\Phi \bar{\Phi}\Phi + \text{h.c.}) \quad (7.2)$$

ここで Φ と $\bar{\Phi}$ はメッセンジャーのカイラル超場である . 一方でスーパーポテンシャル $W(\Phi, \bar{\Phi})$ にもメッセンジャー超場の質量項は存在し、以下のように与えられる .

$$W(\Phi, \bar{\Phi}) = M_\Phi \bar{\Phi}\Phi \quad (7.3)$$

ここで導入したメッセンジャー超場 $\Phi, \bar{\Phi}$ のそれぞれの成分を以下のように表す .

$$\Phi = \phi + \theta\psi_\Phi \quad (7.4)$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\phi} + \theta\psi_{\bar{\Phi}} \quad (7.5)$$

すると上記のケーラーポテンシャルとスーパーポテンシャルから得られる Φ と $\bar{\Phi}$ のスカラー成分の質量項は以下ようになる .

$$\mathcal{L} = -(\phi^*, \bar{\phi}) m_\phi^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi}^* \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

ここで m_ϕ^2 はメッセンジャーのスカラー成分の質量行列であり、以下で与えられる .

$$m_\phi^2 = \begin{pmatrix} |M_\Phi + c_\Phi m_{3/2}|^2 & c_\Phi^* m_{3/2}^2 \\ c_\Phi m_{3/2}^2 & |M_\Phi + c_\Phi m_{3/2}|^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} |M|^2 & -|F|e^{-i\theta_F} \\ -|F|e^{i\theta_F} & |M|^2 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

¹このようなセットアップのシナリオは文献 [147] でも考えられている .

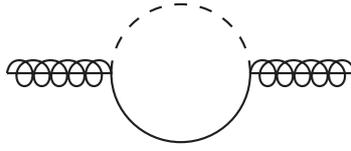


図 7.1: グルイーノの質量に寄与するダイアグラム .

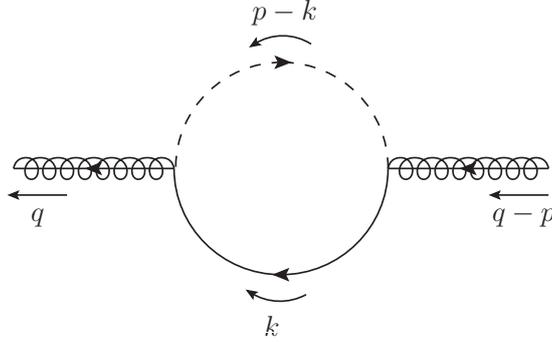


図 7.2: 完全な理論でのグルイーノのカラー電気双極子モーメントの運動量の割り当て .

ここで $m_{3/2}$ に比例している項が Giudice-Masiero 機構によって生じた部分である．後の計算を見やすくするため質量行列のパラメータを M , F , θ_F で再定義した．

この模型ではゲージノの質量はアノマリイ媒介機構とゲージ媒介機構の両方の機構によって 1 ループで生じる．以下の議論ではグルイーノについて考えるのでグルイーノの質量項を以下のよ

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2}\tilde{g}^a [M_3^{\text{AMSB}} + M_3^{\text{GMSB}}] \tilde{g}^a \quad (7.8)$$

ここで M_3^{AMSB} と M_3^{GMSB} はそれぞれアノマリイ媒介機構の寄与とゲージ媒介機構の寄与である．まずアノマリイ媒介機構によるグルイーノ質量への寄与は以下で与えられる [27, 28] .

$$M_3^{\text{AMSB}} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} b_3 m_{3/2} \quad (7.9)$$

$$b_3 = -3 + N_5 + 3N_{10} \quad (7.10)$$

ここで b_3 は $SU(3)_C$ のゲージ結合定数 g_3 に対するベータ関数の係数であり, N_5 と N_{10} はそれぞれ $5 + \bar{5}$ と $10 + \bar{10}$ の表現のメッセンジャーの組の数を表す．また簡単のため M_3^{AMSB} は実にとる． M_3^{GMSB} は図 7.1 のようなダイアグラムから生じる．

ここでは一般のゲージ群の場合のメッセンジャーによるゲージノの質量に対する寄与を見る．この計算で用いるラグランジアンは付録 E.1.1 に与えてある．図 7.2 のように運動量を割り当てるとゲージノの自己エネルギー関数 $\Sigma_{\pm}(p)$ は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{\pm}(p) &= 2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-ig) [P_L \pm e^{-i\theta_F} P_R] (T_{\Phi}^b)^i_j \frac{i(k + m_f)}{k^2 - m_f^2} \delta_l^j \\ &\quad \times (-ig) [P_R \pm e^{i\theta_F} P_L] (T_{\Phi}^a)^l_k \frac{i}{(k-p)^2 - m_{\pm}^2} \delta_i^k \\ &= 2i \frac{g^2}{16\pi^2} T(\Phi) \delta^{ab} (p \pm C_{\Gamma} m_f) \int_0^1 dx \left[\Delta_{\epsilon}^{\overline{\text{MS}}} - \ln \frac{\Delta_{\pm}}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

ここで符号の \pm は ϕ_{\pm} に対応している．一行目の最初の 2 はゲージノがマヨラナフェルミオンであることからきている． $D = 4 - 2\epsilon$ であり，またそれぞれの量は以下で定義されている．

$$\text{Tr}(T_{\Phi}^a T_{\Phi}^b) = T(\Phi)\delta^{ab} \quad (7.12)$$

$$C_{\Gamma} \equiv e^{i\theta_F} P_L + e^{-i\theta_F} P_R = \cos\theta_F - i \sin\theta_F \gamma_5 \quad (7.13)$$

$$\Delta_{\epsilon}^{\overline{\text{MS}}} \equiv \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \quad (7.14)$$

$$\Delta_{\pm} \equiv x m_{\pm}^2 + (1-x)m_f^2 - x(1-x)p^2 \quad (7.15)$$

$\overline{\text{MS}}$ 処方によって $\Delta_{\epsilon}^{\overline{\text{MS}}} = 0$ とすると，ゲージノの自己エネルギー関数は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p}) &= \Sigma_+(\not{p}) + \Sigma_-(\not{p}) \\ &= 2 \frac{g^2}{16\pi^2} T(\Phi)\delta^{ab} \left[\left(\int_0^1 dx x \ln \frac{\Delta_+ \Delta_-}{\mu^2} \right) \not{p} + \left(\int_0^1 dx \ln \frac{\Delta_+}{\Delta_-} \right) C_{\Gamma} m_f \right] \\ &\equiv A(p^2)\not{p} + B(p^2) \end{aligned} \quad (7.16)$$

これよりメッセンジャーの寄与によって得られるゲージノの質量は以下ようになる [148] ．

$$M_{\alpha}^{\text{GMSB}} = B(0) = \frac{g_{\alpha}^2}{16\pi^2} (\cos\theta_F - i \sin\theta_F \gamma_5) 2T_{\alpha}(\Phi) \left| \frac{F}{M} \right| g(x) \quad (7.17)$$

ここで α はゲージ群の種類を表す添字であり，ここで $x \equiv |F/M^2|$ である．またループ関数 $g(x)$ は以下で与えられる．

$$g(x) \equiv \frac{(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x)}{x^2} = \int_0^1 dt \ln \frac{1+xt}{1-xt} \quad (7.18)$$

これよりメッセンジャーによるグルイーノの質量に対する寄与は以下ようになる [149] ．

$$M_3^{\text{GMSB}} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} (\cos\theta_F - i \sin\theta_F \gamma_5) 2T_3(\Phi) \left| \frac{F}{M} \right| g(x) \quad (7.19)$$

今， M_3^{AMSB} は実にとってあるが M_3^{GMSB} のためグルイーノの質量全体としては複素位相を持つ．そこで後の便利のため実のグルイーノ質量 $M_{\tilde{g}}$ とグルイーノの質量の位相 θ を以下のように定義する．

$$M_{\tilde{g}} e^{i\gamma_5 \theta} = M_3^{\text{AMSB}} + M_3^{\text{GMSB}} \quad (7.20)$$

この位相はグルイーノの場を以下のようにカイラル変換することでグルイーノの質量は完全に実にとることができる．

$$\tilde{g}^a \rightarrow \tilde{g}'^a = e^{-i\gamma_5 \theta/2} \tilde{g}^a \quad (7.21)$$

しかしこのグルイーノの位相の再定義により，グルイーノとメッセンジャーの相互作用項に θ_F に加えてこの複素位相も現れることになる．この相互作用ラグランジアンは付録 E.1.2 にまとめられている．次の章で示すようにこの複素位相によってグルイーノのカラー電気双極子モーメントが生じる．さらにグルイーノの質量スケール以下では，そのグルイーノのカラー電気双極子モーメントによって CP を破る Weinberg 演算子が生じる．

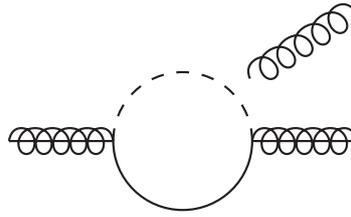


図 7.3: グルイーノのカラー電気双極子モーメントを生じるダイアグラム .

このグルイーノの位相の振る舞いを見やすくするために位相をそれぞれの質量で表す . 式 (7.19) のゲージ媒介機構によって生じるグルイーノの質量を以下のように書く .

$$M_3^{\text{GMSB}} \equiv \text{Re } M_3^{\text{GMSB}} + i\gamma_5 \text{Im } M_3^{\text{GMSB}} \quad (7.22)$$

これを用いて θ は以下のように書ける .

$$\cos \theta = \frac{M_3^{\text{AMSB}} + \text{Re } M_3^{\text{GMSB}}}{M_{\tilde{g}}}, \quad \sin \theta = \frac{\text{Im } M_3^{\text{GMSB}}}{M_{\tilde{g}}} \quad (7.23)$$

ここで $M_{\tilde{g}} = |M_3^{\text{AMSB}} + \text{Re } M_3^{\text{GMSB}} + i\text{Im } M_3^{\text{GMSB}}|$ である .

7.3 ゲージノのカラー電気双極子モーメントと Weinberg 演算子

この模型ではグルイーノのカイラル変換をした後にグルイーノとメッセンジャーの相互作用に CP 位相が存在するため , 図 7.3 のようなメッセンジャーが回るダイアグラムを通じてグルイーノのカラー電気双極子モーメントが生じる . グルイーノのカラー電気双極子モーメント $\tilde{d}_{\tilde{g}}$ は以下で定義される .

$$\mathcal{L}_{\tilde{g}\text{CEDM}} = -\frac{i}{4} \tilde{d}_{\tilde{g}} \tilde{g}^a \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 [t_{\text{adj}}^b]^{ac} \tilde{g}^c G_{\mu\nu}^b = \frac{1}{4} \tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \tilde{g}^a \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \tilde{g}^c G_{\mu\nu}^b \quad (7.24)$$

ここで $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ であり , $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ である . 随伴表現は $[t_{\text{adj}}^a]_{bc} = -if^{abc}$ で与えられる .

ここからはメッセンジャーの質量スケール \hat{M}_{mess} からグルイーノの質量スケール $\hat{M}_{\tilde{g}}$ までの CP を破る演算子の発展をくりこみ群方程式を用いて評価する . くりこみ群方程式の評価をするために以下のような次元 6 のグルイーノのカラー電気双極子モーメントの演算子 $\mathcal{O}_{\tilde{g}}$ を定義すると便利である .

$$\mathcal{O}_{\tilde{g}} = \frac{1}{4} M_{\tilde{g}} g_3 f^{abc} \tilde{g}^a \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \tilde{g}^c G_{\mu\nu}^b \quad (7.25)$$

またグルイーノのカラー電気双極子モーメント $\tilde{d}_{\tilde{g}}$ は $\mathcal{O}_{\tilde{g}}$ の Wilson 係数 $C_{\tilde{g}}$ を用いて以下のように書ける .

$$\tilde{d}_{\tilde{g}} = M_{\tilde{g}} g_3 C_{\tilde{g}} \quad (7.26)$$

この Wilson 係数 $C_{\tilde{g}}$ は図 7.3 のダイアグラムから以下のようになる .

$$C_{\tilde{g}} = -\frac{g_3^2}{32\pi^2} \frac{M}{M_{\tilde{g}} m_+^2} \sin(\theta + \theta_F) [A(r_+) + B(r_+)] - (m_+, r_+ \rightarrow m_-, r_-) \quad (7.27)$$

ここで $m_{\pm}^2 = |M|^2 \pm |F|$ はメッセンジャーのスカラー成分の質量行列 m_{ϕ}^2 の固有値であり, $r_{\pm} \equiv |M|^2/m_{\pm}^2$ である. θ と θ_F はそれぞれグルイーノの質量と m_{ϕ}^2 の非対角成分 F の位相である. またループ関数は以下で定義されている [150].

$$A(r) \equiv \frac{1}{2(1-r)^2} \left(3 - r + \frac{2 \ln r}{1-r} \right) \quad (7.28)$$

$$B(r) \equiv \frac{1}{2(1-r)^2} \left(1 + r + \frac{2r \ln r}{1-r} \right) \quad (7.29)$$

これらの計算の詳細は付録 E.2 で行っている.

次にグルイーノのグルイーノの質量スケール $\hat{M}_{\tilde{g}}$ でのカラー電気双極子モーメント $\tilde{d}_{\tilde{g}}$ をくりこみ群方程式を用いて評価する. Wilson 係数 $C_{\tilde{g}}(\mu)$ に対する 1 ループのくりこみ群方程式は以下で与えられる.

$$\mu \frac{d}{d\mu} C_{\tilde{g}}(\mu) = \gamma_{\mathcal{O}_{\tilde{g}}} C_{\tilde{g}}(\mu), \quad \gamma_{\mathcal{O}_{\tilde{g}}} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} \gamma_{\mathcal{O}_{\tilde{g}}}^{(1)} \quad (7.30)$$

ここで異常次元の係数は $\gamma_{\mathcal{O}_{\tilde{g}}}^{(1)} = 12N_C$ であり, $N_C (= 3)$ はカラーの数を表す. この異常次元は $b \rightarrow s\gamma$ の双極子型の演算子における異常次元のカシミア演算子 $C_F = 4/3$ を $C_A = N_C$ と置き換えることで得られる [151, 152]. ゲージ結合定数に対するくりこみ群方程式は以下で与えられる.

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_3 = \frac{g_3^3}{16\pi^2} b_3^{(1)} \quad (7.31)$$

ここでベータ関数の係数は $b_3^{(1)} = -7|_{\text{SM}} + 2|_{\text{gluino}}$ であり, 添字の SM と gluino はそれぞれ標準模型の粒子とグルイーノの寄与を表す. グルイーノの質量に対するくりこみ群方程式は以下で与えられる.

$$\mu \frac{d}{d\mu} M_{\tilde{g}} = -\gamma_{M_{\tilde{g}}} M_{\tilde{g}}, \quad \gamma_{M_{\tilde{g}}} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} \gamma_{M_{\tilde{g}}}^{(1)} \quad (7.32)$$

ここで $\gamma_{M_{\tilde{g}}}^{(1)} = 6N_C$ である. これらのくりこみ群方程式を解けばグルイーノの質量スケールでのグルイーノのカラー電気双極子モーメントは以下のように求められる.

$$\frac{\tilde{d}_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\text{mess}})}{\tilde{d}_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\tilde{g}})} = \left[\frac{C_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\text{mess}})}{C_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\tilde{g}})} \right] \left[\frac{M_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\text{mess}})}{M_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\tilde{g}})} \right] \left[\frac{g_3(\hat{M}_{\text{mess}})}{g_3(\hat{M}_{\tilde{g}})} \right] = \left[\frac{\alpha_s(\hat{M}_{\text{mess}})}{\alpha_s(\hat{M}_{\tilde{g}})} \right]^{\gamma_{\mathcal{O}_{\tilde{g}}}^{(1)}/2b_3^{(1)} - \gamma_{M_{\tilde{g}}}^{(1)}/2b_3^{(1)} + 1/2} \quad (7.33)$$

グルイーノの質量スケールでは CP を破る Weinberg 演算子が図 7.4 のようなグルイーノグループを回るダイアグラムから生じる. 今, Weinberg 演算子の有効ラグランジアンは以下で定義されている [57].

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= C_W \mathcal{O}_W \\ \mathcal{O}_W &= -\frac{1}{6} g_3 f^{abc} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\lambda}^a G_{\nu}^b G_{\rho\sigma}^c \end{aligned} \quad (7.34)$$

ここで $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソルで $\epsilon^{0123} = +1$ である. 図 7.4 のダイアグラムを評価することでグルイーノの質量スケールでの Weinberg 演算子の Wilson 係数 C_W は以下ようになる².

$$C_W(\hat{M}_{\tilde{g}}) = \frac{N_C g_3^2}{32\pi^2} C_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\tilde{g}}) \quad (7.35)$$

²文献 [153–156] では重いクォークの CP を破る結合定数から生じるより小さな効果について議論している.

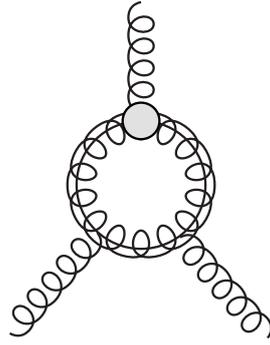


図 7.4: グルイーノのカラー電気双極子モーメントによる Weinberg 演算子への寄与を表すダイアグラム．色付きの丸がグルイーノのカラー電気双極子モーメントの演算子が挿入されている頂点を表す．

この関係式を求める詳細は付録 E.3 に書かれている．

スクォークの (カラー) 電気双極子モーメントはメッセンジャーの多重項を積分した後で 3 ループの寄与から生じる．Weinberg 演算子はこの演算子のスクォークやメッセンジャーを積分することで生じる寄与もある．しかしこれらの寄与はスクォークの質量とメッセンジャーの質量で抑制されている．そのためグルイーノの質量がスクォークやメッセンジャーに比べて十分小さいとみなせる限り，Weinberg 演算子に寄与するのはグルイーノのカラー電気双極子モーメントが主要なものである．

7.4 核子の電気双極子モーメント

前の節ではグルイーノの質量スケールにおけるグルイーノのカラー電気双極子モーメントによって生じる Weinberg 演算子の表式を示した．クォークの電気双極子モーメントも存在し，これは Barr-Zee ダイアグラムを通じて誘導される [112]．この Barr-Zee ダイアグラムによる寄与は高いスケールの超対称模型のシナリオに基づく超対称標準模型ではチャージノとニュートラリーノがループに回るダイアグラムのみが主要なものである [157]．クォークのカラー電気双極子モーメントは Weinberg 演算子からもループを介して生じるがこの寄与は主要なものではない．

この節ではハドロンスケール ($\mu = 1 \text{ GeV}$) での核子の電気双極子モーメントを得るために CP を破る演算子のくりこみ群方程式と QCD 和則および素朴な次元解析の結果をまとめる．

グルイーノの質量スケールより下での QCD セクターにおける CP を破る演算子は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CP} = & \bar{\theta} \frac{g_3^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu} \\ & - \frac{i}{2} \sum_{q=u,d,s} d_q \bar{q} (F \cdot \sigma) \gamma_5 q - \frac{i}{2} \sum_{q=u,d,s} \tilde{d}_q g_3 \bar{q} (G \cdot \sigma) \gamma_5 q \\ & + \frac{1}{3} w f^{abc} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{b,\nu\rho} G_{\rho}^c \end{aligned} \quad (7.36)$$

ここで $F_{\mu\nu}$ と $G_{\mu\nu}^a$ はそれぞれ電磁場とグルーオン場の場の強さテンソルである．さらに $F \cdot \sigma = F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ ， $G \cdot \sigma = G_{\mu\nu}^a \sigma^{\mu\nu} t^a$ ， $\tilde{G}^{a,\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}^a$ である．この式の第 1 項は次元 4 の CP を破る項

で QCD θ 項と呼ばれる．この項はくりこみ群で他の CP を破る演算子と混ざることには無いので今の解析ではこの項は無視する．第 2 項と第 3 項はそれぞれクォークの電気双極子モーメントとカラー電気双極子モーメントに対応している．最後の演算子は Weinberg 演算子と呼ばれる [57]．Weinberg 演算子の Wilson 係数は前の節で定義した C_W とは以下のように関係付いている．

$$w = -g_3 C_W \quad (7.37)$$

核子の電気双極子モーメントの数値計算の中ではこれらの CP を破る演算子についてのグルイーノの質量スケールとハドロンスケール $\mu = 1 \text{ GeV}$ の間のくりこみ群方程式の発展は取り込んである．Wilson 係数に対する主要な寄与のくりこみ群方程式は文献 [152] で与えられ，詳細は付録 E.4 に与えてある．

次にクォークの（カラー）電気双極子モーメントによって生じる核子の電気双極子モーメントの QCD 和則による結果を示す．文献 [40] によると中性子の電気双極子モーメント d_n はくりこみスケール $\mu = 1 \text{ GeV}$ での QCD 和則を用いてクォークの（カラー）電気双極子モーメント関係付いている．同様に陽子の電気双極子モーメント d_p もまた $\mu = 1 \text{ GeV}$ でクォークの（カラー）電気双極子モーメントと関係付いている．これらの関係式は以下のように与えられている．

$$d_p = -1.2 \times 10^{-16} [e \text{ cm}] \bar{\theta} + 0.78 d_u - 0.20 d_d + e(-0.28 \tilde{d}_u + 0.28 \tilde{d}_d + 0.021 \tilde{d}_s) \quad (7.38)$$

$$d_n = 8.2 \times 10^{-17} [e \text{ cm}] \bar{\theta} - 0.12 d_u + 0.78 d_d + e(-0.30 \tilde{d}_u + 0.30 \tilde{d}_d - 0.014 \tilde{d}_s) \quad (7.39)$$

QCD 和則のあらわな表式と数値は付録 E.5 に与えてある．この核子の電気双極子モーメントに対するクォークの電気双極子モーメント寄与は最近の格子 QCD のシミュレーションの結果と一致している [158]．以下の数値解析では $\bar{\theta} = 0$ の QCD 和則による結果を用いる³．

Weinberg 演算子から生じる核子の電気双極子モーメントは以下で与えられる [159]．

$$d_N(w) \sim e(10 - 30) \text{ MeV } w(1 \text{ GeV}), \quad (N = n, p) \quad (7.40)$$

これは素朴な次元解析 (naive dimensional analysis) を用いて求められており，Weinberg 演算子の寄与の符号には不定性がある．以下の数値解析では $d_N(w)/e = 20 \text{ MeV } w(1 \text{ GeV})$ を用いる．

7.5 数値解析

ここでは高いスケールの超対称模型における電子と中性子の電気双極子モーメントを数値的に評価する．

グルイーノのカラー電気双極子モーメントから生じる核子の電気双極子モーメント

はじめにグルイーノのカラー電気双極子モーメントによって生じる核子の電気双極子モーメント $d_N(w)$ のパラメータ依存性を考える．この評価の中ではスフェルミオンや重いヒッグスボソン，グラビティーノの質量は全て縮退していると仮定し， M_S と表す．さらにここでは $M_S = 100 \text{ TeV}$

³ もし Peccei-Quinn 対称性を課したらパラメータ $\bar{\theta}$ が生じ，核子の電気双極子モーメント，特に \tilde{d}_q の係数が変化する（あらわな式は付録 E.5 に与えてある．）しかし今考えている模型ではクォークのカラー電気双極子モーメントはくりこみ群方程式による演算子の混合によってのみ生じるため主要な寄与ではなく，どちらの場合も結果はほとんど変わらない．

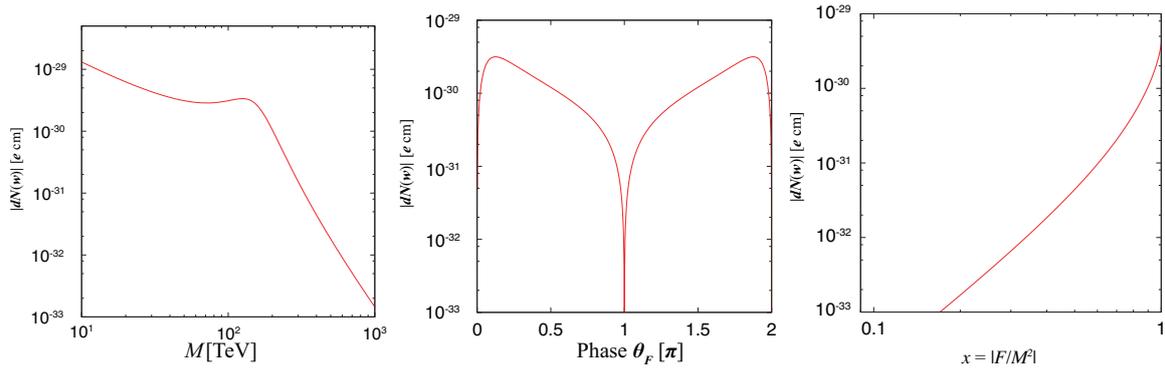


図 7.5: スフェルミオンの質量スケールを $M_S = 100$ TeV と固定した時の $d_N(w)$ のパラメータ依存性を表した図 (左図) $\theta_F = 0.125\pi$, $x = 0.99$ としたときのメッセジャーの質量 M の依存性を表した図 (中央図) $M = M_S$, $x = 0.99$ とした時の位相 θ_F の依存性を表した図 (右図) $\theta_F = 0.125\pi$, $M = M_S$ とした時の $x (\equiv |F/M^2|)$ の依存性を表した図.

ととる. M_S を決めてしまえば, 核子の電気双極子モーメントはメッセジャーのスカラー成分の質量の M と $|F|$ そして F の複素位相 θ_F の 3 つのパラメータで書ける. ここでの数値解析では便利のためパラメータとして $M, \theta_F, x \equiv |F/M^2|$ を用いる.

図 7.5 はグルイーノのカラー電気双極子モーメントによって生じる核子の電気双極子モーメント $d_N (N = p, n)$ のパラメータ依存性を示したものである. 図 7.5 の中央図はグルイーノによって生じる核子の電気双極子モーメントの θ_F 依存性を示したものである. ここでは $M = 100$ TeV, $x = 0.99$ としている. $\theta_F = 0, \pi$ の場合には M_3^{GMSB} およびゲージノとメッセジャーの結合定数が実になってしまうので, $d_N(w)$ の寄与はなくなってしまう. また最も $d_N(w)$ の寄与が大きくなるのは $\theta_F \sim 0.125\pi$ の時である. グルイーノの質量の実部と虚部が同じ大きさの時, グルイーノの位相 θ は最も大きくなる. Weinberg 演算子の係数は $\sin(\theta + \theta_F)/M_{\tilde{g}}$ に比例しているため, $\theta + \theta_F \sim \pi/2$ かつ $M_{\tilde{g}}$ が小さい時が最も大きい寄与を生じる.

図 7.5 の右図は $d_N(w)$ の x 依存性を示したものである. ここでは $M = 100$ TeV, $\theta_F = 0.125\pi$ としてある. グルイーノのカラー電気双極子モーメントは $x \rightarrow 1$ のとき最大になる. 一方で $x = 1$ の時メッセジャーのスカラー成分のうち軽いほうの質量が 0 になってしまう. そこで以下の計算ではメッセジャーの質量が 0 になることを防ぐため $x = 0.99$ としている.

図 7.5 の左図は核子の電気双極子モーメントの M 依存性を示したものである. この図では $x = 0.99$, $\theta_F = 0.125\pi$ としている. 式 (7.34) の Weinberg 演算子の Wilson 係数は以下のように振る舞う.

$$C_W \propto \begin{cases} \frac{1}{M_S M} \sin(\theta + \theta_F) & (M \ll M_S) \\ \frac{1}{M^2} \sin(\theta + \theta_F) & (M \gg M_S) \end{cases} \quad (7.41)$$

$M \gg M_S$ のとき, グルイーノの質量はゲージ媒介機構が主要な寄与となり Weinberg 演算子の Wilson 係数は M^2 で非常に強く抑制され, $\sin(\theta + \theta_F)$ の CP 位相も抑制される. $M \ll M_S$ のときはアノマリー媒介機構が主要な寄与になるので Weinberg 演算子の Wilson 係数は $M_S M$ の形で抑制される. 一方で $M \sim M_S$ の領域になると核子の電気双極子モーメントは M_3^{GMSB} と M_3^{AMSB} が同じくらい大きくなり, グルイーノの質量の CP 位相が最大になるため僅かに大きくなる.

Barr-Zee ダイアグラムから生じる電子の電気双極子モーメント

次に高いスケールの超対称模型における Barr-Zee ダイアグラムの寄与によって生じる核子と電子の電気双極子モーメントと、グルイーノのカラー電気双極子モーメントによる寄与によって生じる核子と電子の電気双極子モーメントを比較する．高いスケールの超対称模型のシナリオでは標準模型のヒッグス粒子を除く，最小超対称標準模型の全てのスカラー粒子は重いと仮定している．最小超対称標準模型において電子と核子の電気双極子モーメントへの主要な寄与は Barr-Zee 型の 2 ループの寄与から生じる [157]．このダイアグラムはチャージーノとニュートラリーノのループを含み，電気双極子モーメントへの寄与は $m_f/M_2\mu_H$ の形で抑制されている⁴（電子もしくはクォークの質量 m_f がクォークと電子の電気双極子モーメントに現れているのは，電気双極子モーメントの演算子がカイラリティを反転しているためである．）具体的な表式は付録 E.6 に与えてある．ヒッグシーノの質量 μ_H は模型に依存しないパラメータであるため $\mu_H/M_S \in [10^{-2}, 1]$ の範囲で電気双極子モーメントを評価する．ヒッグシーノの質量 μ_H の CP 位相もまた模型に依存しないパラメータである．そのためチャージーノとニュートラリーノの質量行列の CP 位相は Barr-Zee ダイアグラムの寄与が最大になるように取る．また $\tan\beta$ もまた模型に依存しないパラメータなので $\tan\beta = 3$ と置く⁵．この他のパラメータとして付録 E.6 に書いてあるように 2 つの独立な位相 ϕ_1 と ϕ_2 がある．以下の数値計算の中では特に断らないかぎり以下のようにとっている⁶．

$$\sin\phi_1 = \sin\phi_2 = 1 \quad (7.42)$$

以下の数値解析では標準模型のヒッグス粒子を除く全ての MSSM のスカラー粒子は同じ質量 M_S を持つと仮定する．またグルイーノのカラー電気双極子モーメントから生じる核子の電気双極子モーメントに付随する 3 つのパラメータ $M, \theta_F, x \equiv |F/M^2|$ はグルイーノのカラー電気双極子モーメントの寄与を最大にするために以下のようにとる．

$$M = M_S, \quad \theta_F = 0.125\pi, \quad x = 0.99 \quad (7.43)$$

ヒッグシーノの質量 μ_H は次のように評価している．まずヒッグシーノの質量のインプットの値をくりこみスケール $\mu = M_S$ で与え，これを付録 E.6 で与えてあるヒッグシーノとゲージーノに対する 1 ループのくりこみ群方程式を用いて $\mu = \mu_H(M_S)$ でのヒッグシーノの質量を求める．

Barr-Zee ダイアグラムの寄与は次のように評価している．まずチャージーノとニュートラリーノの質量行列のパラメータを $\mu = \mu_H(M_S)$ のスケールで評価する．またチャージーノとニュートラリーノのループを計算するときに必要な結合定数もまた $\mu = \mu_H(M_S)$ で評価し，それ以外の結合定数は電弱スケールで評価する．この計算に用いたチャージーノとニュートラリーノの質量行列の具体的な形や結合定数のくりこみ群方程式は付録 E.6 に与えてある．

はじめに高いスケールの超対称模型のシナリオでの電子の電気双極子モーメント d_e を示す．結果は図 7.6 のとおりである．この図ではメッセンジャーの超場がない場合（これは $N_5 = 0$ であり，図 7.6 の破線に対応している．）とメッセンジャーの超場が存在する場合（これは $N_5 = 1$ であ

⁴この Barr-Zee ダイアグラムの寄与の振る舞いはヒッグシーノを積分した後のウィーノの有効理論を用いて理解できる [108]．これは式 (5.44)-(5.45) の Λ を μ_H に M を M_2 に置き換えることに対応して．

⁵この研究ではこのパラメータセットで観測されているヒッグス粒子の質量が実現できるかどうかは考えていない．そのためこの計算の中でのヒッグス粒子の質量は与えられた値にとっている．

⁶ここでこの位相を $\sin\phi_1 = \sin\phi_2 = -1$ ととっても Barr-Zee ダイアグラムの寄与の絶対値は最大になる．Barr-Zee ダイアグラムの寄与の絶対値を考える場合には ± 1 どちらをとっても構わないがその他の寄与と合わせる場合にはこの符号をどちらに取るかによって結果が変わる．

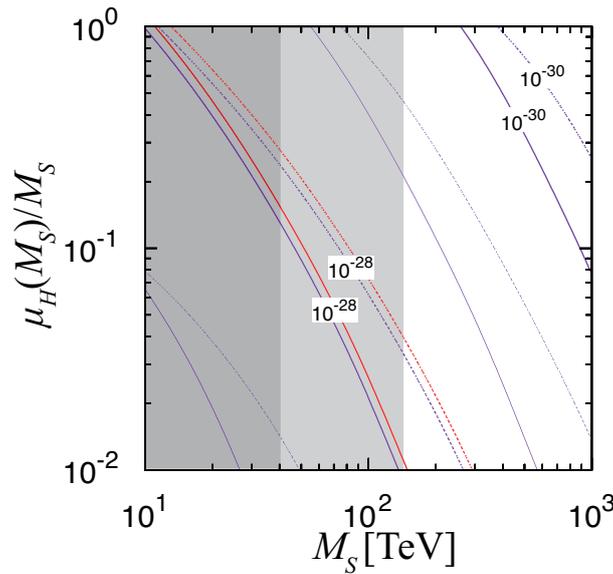


図 7.6: 高いスケールの超対称模型における電子の電気双極子モーメントを評価した図．横軸はスフェルミオンの質量 M_S であり，縦軸はスフェルミオンの質量スケールでのヒッグシーノの質量 $\mu_H(M_S)$ を M_S で割ったものである．破線と実線はそれぞれ $N_5 = 0$ と $N_5 = 1$ の場合に対応している．赤線は現在の電子の電気双極子モーメントの制限 $|d_e| < 8.7 \times 10^{-29} \text{ ecm}$ [66] に対応している．また濃い影と薄い影が付いた領域は LHC でのグルイーノの探索から排除されている領域でそれぞれ $N_5 = 0$ と $N_5 = 1$ の場合に対応している．

り，図 7.6 の実線に対応している．) を示している．影の付いた領域は LHC におけるグルイーノの直接探索によって実験的に排除されている領域であり，これはグルイーノの極質量 (pole mass) が $M_g^{\text{pole}} < 1.3 \text{ TeV}$ の領域を表している [160, 161]．また濃い影と薄い影はそれぞれ $N_5 = 0$ と $N_5 = 1$ の場合に対応している．グルイーノの極質量と走る質量 (running mass) との関係は付録 E.6 に与えてある．赤線は ACME 実験での電子の電気双極子モーメントの制限 $|d_e| < 8.7 \times 10^{-28} \text{ [ecm]}$ を表している．ここで電子の電気双極子モーメントの測定の将来実験は $|d_e| \sim 10^{-30} \text{ [ecm]}$ ほどの感度が期待されており，これからそれぞれの場合で超対称の破れのスケールに対して $M_S \sim 10^3 \text{ TeV}$ 程の感度があることが分かる．

メッセンジャーを含んだ高いスケールの超対称模型とメッセンジャーを含まない高いスケールの超対称模型では電子の電子の電気双極子モーメントの振る舞いには異なる点がある．1 つはグルイーノの直接探索による超対称性の破れのスケール M_S に対する制限がメッセンジャーを含む模型のほうがより厳しくなることである．これは今グルイーノのカラー電気双極子モーメントを最大化するようにパラメータを決めているため，メッセンジャーを含む模型ではアノマリー媒介機構とゲージ媒介機構の間に打ち消し合いが生じることでグルイーノの質量が小さくなるためである．一方で電子の電気双極子モーメントによる超対称性の破れのスケール M_S に対する制限は，メッセンジャーを含まない模型のほうが厳しい．これはメッセンジャーを含む模型ではゲージノの質量がメッセンジャーを含まない模型よりも大きくなり，Barr-Zee ダイアグラムによる寄与がわずかに抑制されるためである．

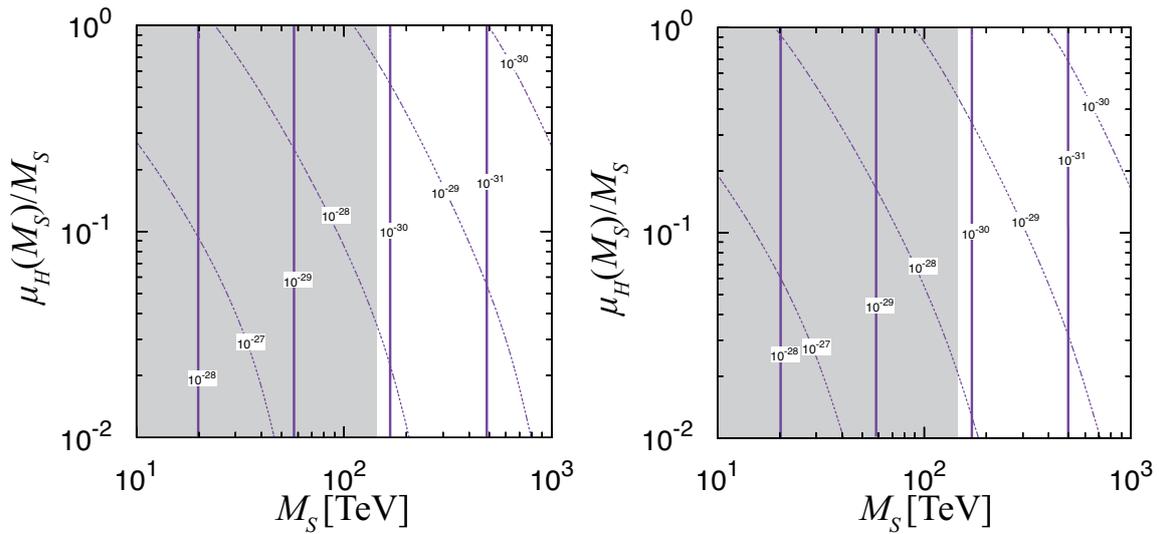


図 7.7: 高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメントを評価した図．左図が中性子の電気双極子モーメントで右図が陽子の電気双極子モーメントを表す．横軸はスフェルミオンの質量 M_S であり，縦軸はスフェルミオンの質量スケールでのヒッグシーノの質量 $\mu_H(M_S)$ を M_S で割ったものである．実線と破線はそれぞれグルイーノのカラー電気双極子モーメントのみの寄与と Barr-Zee ダイアグラムの寄与に対応している．また影が付いた領域は LHC でのグルイーノの探索から排除されている領域である．両方の図でメッセンジャーの数は $N_5 = 1$ としている．

グルイーノのカラー電気双極子モーメントと Barr-Zee ダイアグラムから生じる核子の電気双極子モーメント

次は高いスケールの超対称模型における核子の電気双極子モーメントを調べる．まずはグルイーノのカラー電気双極子モーメントのみから生じる核子の電気双極子モーメントと Barr-Zee ダイアグラムによる寄与のみから生じる核子の電気双極子モーメントを比較する．図 7.7 はグルイーノのカラー電気双極子モーメントのみから生じる核子の電気双極子モーメント（実線）と Barr-Zee ダイアグラムによる寄与から生じる核子の電気双極子モーメント（破線）を示している．図 7.7 の左図が中性子の電気双極子モーメントで右図が陽子の電気双極子モーメントである．核子の電気双極子モーメントは Barr-Zee ダイアグラムの寄与がなければグルイーノのカラー電気双極子モーメントによる寄与のみから生じ，グルイーノに物理的な位相が存在しなければ Barr-Zee ダイアグラムの寄与のみから生じるという構造になっている．もしこれらの寄与の大きさが大きく異なっていれば核子の電気双極子モーメントを求める際に主要な寄与のみを考慮すればよいが，図 7.7 を見れば分かるように同じパラメータ領域，特にヒッグシーノの質量が大きい領域で両者に寄与が同程度の大きさになることが分かる．そのため核子の電気双極子モーメントを求める際にはこれらの両方の寄与を考慮しなければならないことがわかる．

核子の電気双極子モーメントを正確に決めるのに問題になるのは式 (7.38), (7.39) の QCD θ 項及びクォークの（カラー）電気双極子モーメントによる寄与と式 (7.40) の Weinberg 演算子による寄与の相対符号が決まっていないという点である．そこで以下では Barr-Zee ダイアグラムの寄与による中性子の電気双極子モーメントと Weinberg 演算子の寄与による中性子の電気双極子モーメントの比を考える．図 7.8 は Weinberg 演算子によって生じる中性子の電気双極子モーメント d_{nW}

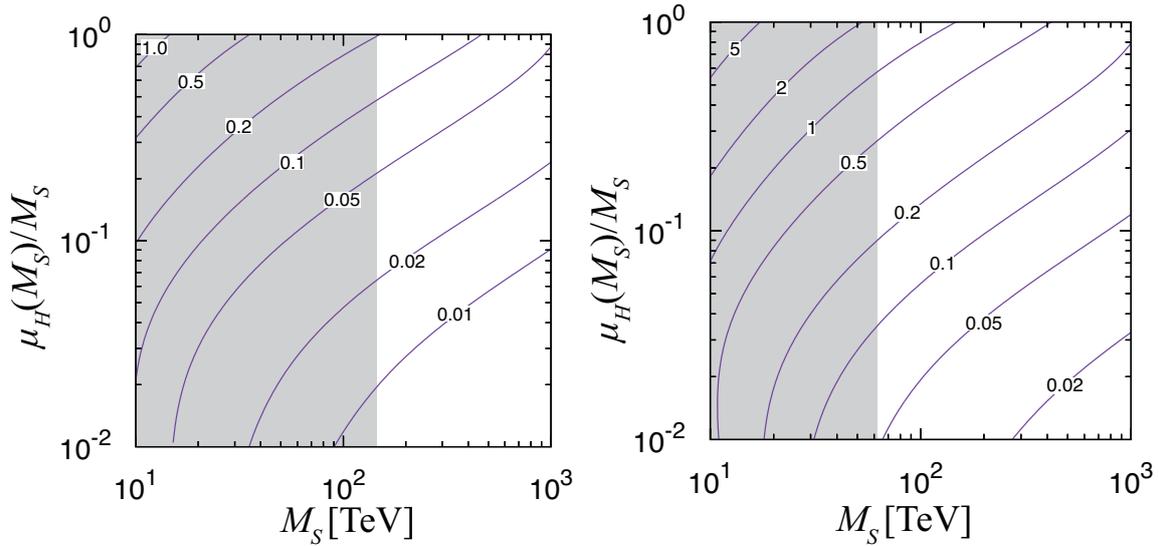


図 7.8: Weinberg 演算子から生じる中性子の電気双極子モーメントと Barr-Zee ダイアグラムから生じる中性子の電気双極子モーメントの比 $|d_{nW}/d_{nBZ}|$ を表した図．左図はメッセンジャーの質量を $M = M_S$ とした場合で，右図は $M = 0.1M_S$ とした場合である．両方の図でメッセンジャーの数は $N_5 = 1$ としている．

と Barr-Zee ダイアグラムによって生じる中性子の電気双極子モーメント d_{nBZ} の比を表した図である．クォークの(カラー)電気双極子モーメントはくりこみ群方程式を通じて Weinberg 演算子と互いに混合することから，中性子の電気双極子モーメントを Barr-Zee ダイアグラムから生じる(カラー)電気双極子モーメントの寄与と低エネルギーでの Weinberg 演算子から生じる(カラー)電気双極子モーメントの寄与に区別することは困難である．しかし Weinberg 演算子と(カラー)電気双極子モーメントとの混合はくりこみ群方程式を通じてのみ生じるものでその寄与は 1 ループで抑制されているため無視できる．そのためここでは Barr-Zee ダイアグラムによって生じる中性子の電気双極子モーメント d_{nBZ} は式 (7.39) で定義される d_n とし，Weinberg 演算子によって生じる中性子の電気双極子モーメント d_{nW} は式 (7.40) で定義される $d_n(w)$ であるとする．

図 7.8 の左図はメッセンジャーの質量を $M = M_S$ と取った時の比 $|d_{nW}/d_{nBZ}|$ を示したものである．Barr-Zee ダイアグラムによる寄与は $d_f \sim m_f/M_2\mu_H$ の形で抑制されているため，ヒッグシーノの質量 μ_H が大きい極限では Barr-Zee ダイアグラムの寄与は抑制される．一方でスフェルミオンの質量スケール M_S が小さい領域ではグルイーノの質量が小さくなることによって，グルイーノのカラー電気双極子モーメントによって生じる中性子の電気双極子モーメントは大きくなる．つまり， M_S が小さく μ_H が大きい領域ではグルイーノのカラー電気双極子モーメントの寄与が支配的であることがわかる．しかしそのような領域はグルイーノの直接探索の実験から強い制限がかけられている．

最後にメッセンジャーの質量が軽い場合を考える．この場合ではグルイーノの質量はアノマリー媒介機構による寄与が主要なものになるため，グルイーノのカラー電気双極子モーメントは位相 θ_F が含まれているグルイーノとメッセンジャーの CP を破る結合定数によって生じる．もしメッセンジャーの質量 M が超対称性の破れのスケール M_S より小さくなるとグルイーノのカラー電気双極子モーメントの M での抑制は緩和される．そのためグルイーノのカラー電気双極子モーメン

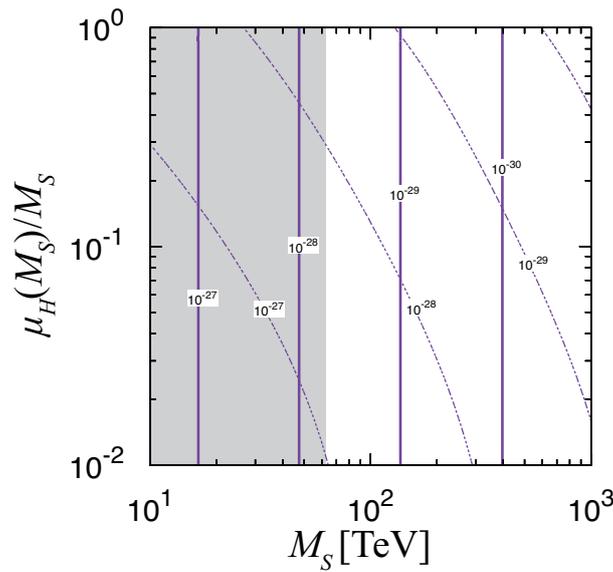


図 7.9: メッセンジャーの質量が軽い場合の中性子の電気双極子モーメントを表した図．メッセンジャーの質量は $M = 0.1M_S$ とおいている．実線と破線はそれぞれ Barr-Zee ダイアグラムの寄与がない場合とグルイーノのカラー電気双極子モーメントの寄与がない場合に対応している．影の付いた領域は LHC のグルイーノの直接探索によって排除されている領域である．またメッセンジャーの数は $N_5 = 1$ としている．

トによって生じる核子の電気双極子モーメントはメッセンジャーが重い場合と比べて大きくなる．

メッセンジャーが軽い場合では，式 (7.23) を見れば分かるようにグルイーノの質量の位相 θ は近似的に 0 になり，グルイーノのカラー電気双極子モーメントは $\sin \theta_F$ に比例する．従って以下の数値解析ではグルイーノのカラー電気双極子モーメントを最大にするために $\theta_F = \pi/2$ とおいている．もしメッセンジャーの超対称な質量 M が軽過ぎると，メッセンジャーのスカラー成分の軽い方が電弱スケールより軽くなってしまふ．よって以下の解析では x を $x = 0.99$ とつたうでメッセンジャーのスカラー成分が軽くなり過ぎないようにするため，メッセンジャーの質量スケールを $M = 0.1M_S$ と置くことにする．

図 7.9 はメッセンジャーの質量が軽い場合の中性子の電気双極子モーメント d_n を表したものである．実線と破線はそれぞれ Barr-Zee ダイアグラムによる寄与がない場合とグルイーノのカラー電気双極子モーメントの寄与がない場合を表している．この場合では予想したようにグルイーノのカラー電気双極子モーメントによって生じる中性子の電気双極子モーメントはメッセンジャーが重い場合に比べて大きくなっている．一方で Barr-Zee ダイアグラムの寄与はメッセンジャーの質量が重い場合と同じくらい大きさである．そのためこの状況では中性子の電気双極子モーメントを求める際にグルイーノのカラー電気双極子モーメントによる寄与がより重要になってくる．しかし Weinberg 演算子によって生じる核子の電気双極子モーメントには符号の不定性があるため，Barr-Zee ダイアグラムによる寄与とグルイーノのカラー電気双極子モーメントによる寄与が核子の電気双極子モーメントを大きくする方にはたらくか小さくする方にはたらくかはわからない．

メッセンジャーの質量が重い場合と同様にメッセンジャーの質量が軽い場合でもグルイーノのカラー電気双極子モーメントと Barr-Zee ダイアグラムそれぞれによって生じる中性子の電気双極子モーメントの比 $|d_{nW}/d_{nBZ}|$ を表したのが図 7.8 の右図である． $M < M_S$ の場合 Weinberg 演算

子からの寄与は式 (7.41) で述べたように軽いメッセンジャーによって大きくなる．つまりメッセンジャーが軽いシナリオではより広い領域で d_{nW} の寄与が重要になってくる．

図 7.7 では Barr-Zee ダイアグラムとグルイーノのカラー電気双極子モーメントから生じる陽子の電気双極子モーメントの振る舞いは中性子の電気双極子モーメントと似ていることを示した．メッセンジャーの質量が軽いシナリオでも陽子の電気双極子モーメントの振る舞いは中性子の場合と似ている．陽子の電気双極子モーメントの将来実験の感度は $d_p \sim 10^{-29}$ ecm 程であると期待されているので陽子の電気双極子モーメントによってグルイーノのカラー電気双極子モーメントの効果が見える可能性はある．

この章の結論を述べる前に数値計算の不定性について述べておく．インプットとして用いた $SU(3)_C$ の結合定数 $\alpha_s(m_Z) = 0.1185 \pm 0.0006$ の誤差は結果に $\mathcal{O}(1)\%$ 程の影響しか与えないので数値解析の中ではこの影響は現れない．そのため結果の不定性を生じる主要なものは、クォークの(カラー)電気双極子モーメントと Weinberg 演算子から核子の電気双極子モーメントを得るときに使った QCD 和則と素朴な次元解析 (naive dimensional analysis) である．特に Weinberg 演算子の素朴な次元解析の不定性は大きく、その符号もまた決まっていない．メッセンジャーの数が増えると Weinberg 演算子の寄与が大きくなるため、上の計算では中性子の電気双極子モーメントの不定性を小さくするようにメッセンジャーの数を $N_5 = 1, N_{10} = 0$ とおいている．

7.6 第 7 章の結論

この章では高いスケールの超対称模型において核子と電子の電気双極子モーメントを評価した．アノマリー媒介機構によって生じるゲージノの質量を実にとったとしても、その他の寄与によってゲージノの質量に物理的な位相が生じる可能性がある．この章ではアノマリー媒介機構とゲージ媒介機構の両方の寄与が存在する高いスケールの超対称模型でこれを示した．グルイーノの質量の物理的な位相とグルイーノの CP を破る結合定数によってグルイーノのカラー電気双極子モーメントが生じ、これがさらに CP を破る Weinberg 演算子を生じる．このグルイーノのカラー電気双極子モーメントの効果を評価し、グルイーノのカラー電気双極子モーメントによって生じる核子の電気双極子モーメントの表式を示した．MSSM では核子の電気双極子モーメントに最も主要な寄与をするのはチャージーノとニュートラリーノがループに回る 2 ループの Barr-Zee ダイアグラムである．高いスケールの超対称模型においてはこのグルイーノのカラー電気双極子モーメントによる寄与が核子の電気双極子モーメントの予言に影響を与える可能性があることを示した．特に超対称性の破れのスケール M_S と比べてメッセンジャーの質量が軽い場合やヒッグシーノの質量が重い場合にグルイーノのカラー電気双極子モーメントの寄与が大きくなるため重要である．しかし Weinberg 演算子によって生じる核子の電気双極子モーメントを求める際に用いている素朴な次元解析 (naive dimensional analysis) ではその符号も含めて大きな不定性があるため、核子の電気双極子モーメントの完全な予言を与えることはできない．もしこの寄与が正確に求められたら陽子と中性子の電気双極子モーメントの振る舞いから、メッセンジャーやヒッグシーノなどの高いスケールの超対称模型の詳細が得られる．そのため核子と電子の電気双極子モーメントやそれらの比を測定することはより重要になる．

第8章 結論

この博士論文では電気双極子モーメントを用いて2つの標準模型を超える物理の研究を行った。1つ目は「電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論」についての研究である。この研究では暗黒物質がフェルミオンでヒッグス粒子と相互作用をしているという仮定の下で電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論を構成した。一般にヒッグス粒子と暗黒物質の相互作用には CP を破る結合定数が含まれるため電気双極子モーメントを生じる。これとさらにヒッグス粒子の崩壊と暗黒物質の直接検出の実験を用いてこの有効理論を解析した。解析の結果、暗黒物質の量子数が変わるとこれら3つの物理量の振る舞いが変化することがわかり、特に $\mathcal{O}(100)$ GeV の質量を持つ暗黒物質に対しては将来実験を用いれば標準模型を超える物理のスケールが $\mathcal{O}(100)$ TeV までの領域をほとんど全て調べられ、暗黒物質の量子数を区別できる可能性があることが分かった。

2つ目の主題は「高いスケールの超対称性模型における核子の電気双極子モーメント」である。この研究では超対称性の破れのセクターにアノマリー媒介機構とゲージ媒介機構を含む高いスケールの超対称模型での核子の電気双極子モーメントについて調べた。このような拡張された模型ではゲージノの質量に物理的な位相が生じ、さらにゲージノと超対称性の破れを伝えるメッセンジャーとの間の相互作用にも物理的な位相が生じる。これらの位相は新たな CP の破れの源となり、グルイーノのカラー電気双極子モーメントを生じ、核子の電気双極子モーメントに対して新たな寄与となる。この研究ではこの拡張された高いスケールの超対称模型において、核子の電気双極子モーメントに対するグルイーノの寄与の詳細を明らかにした。その結果、この新たな寄与が最も単純な模型では主要な Barr-Zee ダイアグラムの寄与と同程度の寄与になるパラメータ領域があることがわかり、核子の電気双極子モーメントを用いて模型を区別できる可能性を示した。

謝辞

この博士論文を作成するにあたり、指導教員である久野純治先生には研究についての助言や議論などで辛抱強く指導していただきました感謝します。またこの博士論文の元となった副論文の共同研究者である瀬名波栄問さん、永田夏海さん、桑原拓巳さん、森直哉さん、倉本渉さんには論文作成にあたりお世話になりました感謝します。またポスドクの大村雄司さん、山中真人さんには日頃の議論や日常生活でお世話になりました。また研究室のスタッフ方、先輩、後輩にも非常にお世話になりました。そして同期の皆さんや家族にもお世話になりました。ありがとうございました。

この博士論文の一部の研究は日本学術振興会特別研究員奨励費 26004521 の助成を受けたものです。

付録A 記法と慣習

計量テンソル

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

反変ベクトル

$$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}) \quad (\text{A.2})$$

共変ベクトル

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\boldsymbol{x}) \quad (\text{A.3})$$

内積

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \quad (\text{A.4})$$

4次元微分

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (\text{A.5})$$

完全反対称テンソル

$$\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123} \quad (\text{A.6})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.7})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\text{A.8})$$

マクスウェル方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu \quad (\text{Maxwell equation}) \quad (\text{A.9})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad (\text{Bianchi identity}) \quad (\text{A.10})$$

マクスウェル方程式に関連した量の定義

$$A^\mu = (\Phi, \boldsymbol{A}) \quad (\text{A.11})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{A.12})$$

$$E^i \equiv -F^{0i} \quad (\text{A.13})$$

$$\epsilon^{ijk} B^k \equiv -F^{ij} \quad (\text{A.14})$$

$$e = -|e| \quad (\text{A.15})$$

標準模型の関係式ゲージボソンの質量

$$m_W = \frac{1}{2} g v \quad (\text{A.16})$$

$$m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{1}{2} g_Z v \quad (\text{A.17})$$

$$m_W = m_Z \cos \theta_W \quad (\text{A.18})$$

ワインバーグ角

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{A.19})$$

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{A.20})$$

電荷

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{A.21})$$

$$e = -|e| = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{A.22})$$

Z ボソンの結合定数

$$g_Z = \frac{g}{\cos \theta_W} = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} = \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (\text{A.23})$$

フェルミ定数

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{1}{2v^2} \quad (\text{A.24})$$

$$G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (\text{A.25})$$

ヒッグスの質量

$$m_h^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2 \quad (\text{A.26})$$

ヒッグスの結合定数の関係

$$\mu^2 = \lambda v^2 \quad (\text{A.27})$$

$$v \sim 246 \text{ GeV} \quad (\text{A.28})$$

$$v' = \frac{v}{\sqrt{2}} \sim 174 \text{ GeV} \quad (\text{A.29})$$

付録B 離散的対称性

B.1 P変換

スカラー場

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P\phi(\tilde{x}) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{P}\phi^*(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P^*\phi^*(\tilde{x}) \quad (\text{B.2})$$

フェルミオン場

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P\gamma^0\psi(\tilde{x}) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P^*\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^0 \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{P}\psi^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{P}^\dagger = -\eta_P^*\gamma^0\psi^{\mathcal{C}}(\tilde{x}) \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{P}\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{P}^\dagger = -\eta_P\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(\tilde{x})\gamma^0 \quad (\text{B.6})$$

ベクトル場

$$\mathcal{P}V_\mu(x)\mathcal{P}^\dagger = -\eta_P V^\mu(\tilde{x}) \quad (\text{B.7})$$

ここで \mathcal{P} は生成消滅演算子に作用するユニタリ演算子であり, η_P は P 変換の位相因子である ($|\eta_P| = 1$)。また, $\tilde{x} \equiv (x^0, -\mathbf{x})$ である。

B.2 C変換

スカラー場

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C\phi^*(x) \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{C}\phi^*(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C^*\phi(x) \quad (\text{B.9})$$

ディラック場¹

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C\psi^{\mathcal{C}}(x) \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C^*\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{C}\psi^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C^*\psi(x) \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C\bar{\psi}(x) \quad (\text{B.13})$$

ベクトル場

$$\mathcal{C}V_\mu(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C V_\mu^*(x) \quad (\text{B.14})$$

¹ $\psi^{\mathcal{C}} \equiv C(\bar{\psi})^T$ であり, 荷電共役行列は $C \equiv i\gamma^0\gamma^2$ である。

B.3 T 変換

スカラー場

$$\mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T\phi(-\tilde{x}) \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{T}\phi^*(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T^*\phi^*(-\tilde{x}) \quad (\text{B.16})$$

ディラック場

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_TB\psi(-\tilde{x}) \quad (\text{B.17})$$

$$\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T^*\bar{\psi}(-\tilde{x})B^\dagger \quad (\text{B.18})$$

$$\mathcal{T}\psi^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T^*B\psi^{\mathcal{C}}(-\tilde{x}) \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{T}\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(-\tilde{x})B^\dagger \quad (\text{B.20})$$

ここで B は時間反転行列で $B \equiv \gamma^1\gamma^3$ である。また \mathcal{T} は反ユニタリ演算子であるので以下のような式変形に注意する。

$$\mathcal{T}\bar{\psi}\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}\psi^\dagger\gamma^0\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}\psi^\dagger\mathcal{T}^\dagger(\gamma^0)^* \quad (\text{B.21})$$

ベクトル場

$$\mathcal{T}V_\mu(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_TV^\mu(-\tilde{x}) \quad (\text{B.22})$$

B.4 まとめ

スカラー場

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P\phi(\tilde{x}) \quad (\text{B.23})$$

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C\phi^*(x) \quad (\text{B.24})$$

$$\mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T\phi(-\tilde{x}) \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{P}\phi^*(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P^*\phi^*(\tilde{x}) \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{C}\phi^*(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C^*\phi(x) \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{T}\phi^*(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T^*\phi^*(-\tilde{x}) \quad (\text{B.28})$$

ディラック場

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P\gamma^0\psi(\tilde{x}) \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C\psi^{\mathcal{C}}(x) \quad (\text{B.30})$$

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_TB\psi(-\tilde{x}) \quad (\text{B.31})$$

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(x)\mathcal{P}^\dagger = \eta_P^*\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^0 \quad (\text{B.32})$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C^*\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x) \quad (\text{B.33})$$

$$\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T^*\bar{\psi}(-\tilde{x})B^\dagger \quad (\text{B.34})$$

$$\mathcal{P}\psi^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{P}^\dagger = -\eta_P^* \gamma^0 \psi^{\mathcal{C}}(\tilde{x}) \quad (\text{B.35})$$

$$\mathcal{C}\psi^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{C}^\dagger = +\eta_C^* \psi(x) \quad (\text{B.36})$$

$$\mathcal{T}\psi^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{T}^\dagger = +\eta_T^* B\psi^{\mathcal{C}}(-\tilde{x}) \quad (\text{B.37})$$

$$\mathcal{P}\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{P}^\dagger = -\eta_P \bar{\psi}^{\mathcal{C}}(\tilde{x})\gamma^0 \quad (\text{B.38})$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_C \bar{\psi}(x) \quad (\text{B.39})$$

$$\mathcal{T}\bar{\psi}^{\mathcal{C}}(x)\mathcal{T}^\dagger = \eta_T \bar{\psi}^{\mathcal{C}}(-\tilde{x})B^\dagger \quad (\text{B.40})$$

ベクトル場

$$\mathcal{P}V_\mu(x)\mathcal{P}^\dagger = -\eta_P V^\mu(\tilde{x}) \quad (\text{B.41})$$

$$\mathcal{C}V_\mu(x)\mathcal{C}^\dagger = +\eta_C V_\mu^*(x) \quad (\text{B.42})$$

$$\mathcal{T}V_\mu(x)\mathcal{T}^\dagger = +\eta_T V^\mu(-\tilde{x}) \quad (\text{B.43})$$

B.5 フェルミオン双一次形式

フェルミオン双一次形式

同種のフェルミオンの場合

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(x)\Gamma^{\dots}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger = \epsilon_\Gamma^P \bar{\psi}(\tilde{x})\Gamma^{\dots}\psi(\tilde{x}) \quad (\text{B.44})$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\Gamma^{\dots}\psi(x)\mathcal{C}^\dagger = \epsilon_\Gamma^C \bar{\psi}(x)\Gamma^{\dots}\psi(x) \quad (\text{B.45})$$

$$\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\Gamma^{\dots}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger = \epsilon_\Gamma^T \bar{\psi}(-\tilde{x})\Gamma^{\dots}\psi(-\tilde{x}) \quad (\text{B.46})$$

ここで Γ^{\dots} と Γ^{\dots} はローレンツの足の位置を表す．今 Γ は以下のように定義してある．

$$\Gamma \equiv \{\mathbf{1}, i\gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}, i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\} \quad (\text{B.47})$$

ここで i はフェルミオン双一次形式がエルミートになるようにつけている．このエルミート性は P 変換と C 変換の場合は関係ないが，反ユニタリ変換である T 変換に対しては関係がある．また ϵ は以下のように与えられる．

$$\epsilon_\Gamma^P = \begin{cases} +1 & \text{for } \Gamma = \mathbf{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} \\ -1 & \text{for } \Gamma = i\gamma_5, \gamma^\mu\gamma_5, i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

$$\epsilon_\Gamma^C = \begin{cases} +1 & \text{for } \Gamma = \mathbf{1}, i\gamma_5, \gamma^\mu\gamma_5 \\ -1 & \text{for } \Gamma = \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

$$\epsilon_\Gamma^T = \begin{cases} +1 & \text{for } \Gamma = \mathbf{1}, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 \\ -1 & \text{for } \Gamma = i\gamma_5, \sigma^{\mu\nu} \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

この結果は以下の表にもまとめる．

	$\mathbf{1}$	$i\gamma_5$	γ^μ	$\gamma^\mu\gamma_5$	$\sigma^{\mu\nu}$	$i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5$
ϵ_Γ^P	+	-	+	-	+	-
ϵ_Γ^C	+	+	-	+	-	-
ϵ_Γ^T	+	-	+	+	-	+

(B.51)

一般の場合

$$\mathcal{P}\bar{\psi}_1(x)\Gamma\cdots\psi_2(x)\mathcal{P}^\dagger = \epsilon_\Gamma^P \eta_{P1}^* \eta_{P2} \bar{\psi}_1(\tilde{x})\Gamma\cdots\psi_2(\tilde{x}) \quad (\text{B.52})$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}_1(x)\Gamma\cdots\psi_2(x)\mathcal{C}^\dagger = \epsilon_\Gamma^C \eta_{C1}^* \eta_{C2} \bar{\psi}_2(x)\Gamma\cdots\psi_1(x) \quad (\text{B.53})$$

$$\mathcal{T}\bar{\psi}_1(x)\Gamma\cdots\psi_2(x)\mathcal{T}^\dagger = \epsilon_\Gamma^T \eta_{T1}^* \eta_{T2} \bar{\psi}_1(-\tilde{x})\Gamma\cdots\psi_2(-\tilde{x}) \quad (\text{B.54})$$

B.6 非相対論的な場合

位置ベクトル

$$\mathcal{P}\mathbf{r}\mathcal{P}^\dagger = -\mathbf{r} \quad (\text{B.55})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{r}\mathcal{T}^\dagger = +\mathbf{r} \quad (\text{B.56})$$

運動量

$$\mathcal{P}\mathbf{p}\mathcal{P}^\dagger = -\mathbf{p} \quad (\text{B.57})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{p}\mathcal{T}^\dagger = -\mathbf{p} \quad (\text{B.58})$$

角運動量

$$\mathcal{P}\mathbf{J}\mathcal{P}^\dagger = +\mathbf{J} \quad (\text{B.59})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{J}\mathcal{T}^\dagger = -\mathbf{J} \quad (\text{B.60})$$

電場

$$\mathcal{P}\mathbf{E}\mathcal{P}^\dagger = -\mathbf{E} \quad (\text{B.61})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{E}\mathcal{T}^\dagger = +\mathbf{E} \quad (\text{B.62})$$

$$\mathcal{C}\mathbf{E}\mathcal{C}^\dagger = -\mathbf{E} \quad (\text{B.63})$$

磁場

$$\mathcal{P}\mathbf{B}\mathcal{P}^\dagger = +\mathbf{B} \quad (\text{B.64})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{B}\mathcal{T}^\dagger = -\mathbf{B} \quad (\text{B.65})$$

$$\mathcal{C}\mathbf{B}\mathcal{C}^\dagger = -\mathbf{B} \quad (\text{B.66})$$

電荷密度

$$\mathcal{P}\rho\mathcal{P}^\dagger = +\rho \quad (\text{B.67})$$

$$\mathcal{T}\rho\mathcal{T}^\dagger = +\rho \quad (\text{B.68})$$

$$\mathcal{C}\rho\mathcal{C}^\dagger = -\rho \quad (\text{B.69})$$

電流

$$\mathcal{P}\mathbf{j}\mathcal{P}^\dagger = -\mathbf{j} \quad (\text{B.70})$$

$$\mathcal{T}\mathbf{j}\mathcal{T}^\dagger = -\mathbf{j} \quad (\text{B.71})$$

$$\mathcal{C}\mathbf{j}\mathcal{C}^\dagger = -\mathbf{j} \quad (\text{B.72})$$

付録C くりこみ群方程式

C.1 くりこみ定数

まずはくりこみ定数を定義するため以下の非可換ゲージ理論のラグランジアンを考える．

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu)^2 + \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A_0^\mu)^2 \\
 & - g_0 f^{abc}(\partial^\mu A_0^{a\nu})A_0^{b\mu}A_0^{c\nu} - \frac{1}{4}g_0^2 f^{abc}f^{ade}A_0^{b\mu}A_0^{c\nu}A_0^{d\mu}A_0^{e\nu} \\
 & - i(\partial_\mu \bar{c}_0^a)(\partial_\mu c_0^a) - ig_0 f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}_0^a)A_0^{b\mu}c_0^c \\
 & + \bar{\psi}_0 i \not{\partial} \psi_0 - m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 + g_0 \bar{\psi}_0 \gamma_\mu T^a A_0^{a\mu} \psi_0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

ここで添字の0は裸の量であることを表す．ここで全ての場をくりこまれた量で書き，くりこみ定数を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}Z_A(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
 & - Z_A^{3/2}g_0 f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}Z_A^2 g_0^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \\
 & - iZ_c(\partial_\mu \bar{c}^a)(\partial_\mu c^a) - iZ_c Z_A^{1/2}g_0 f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c \\
 & + Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - Z_\psi m_0 \bar{\psi} \psi + Z_\psi Z_A^{1/2}g_0 \bar{\psi} \gamma^\mu T^a A_\mu^a \psi \\
 \equiv & -\frac{1}{4}Z_A(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
 & - Z_{3g}\mu^\epsilon g f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}Z_{4g}\mu^{2\epsilon}g^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \\
 & - iZ_c(\partial_\mu \bar{c}^a)(\partial_\mu c^a) - iZ_{1'}\mu^\epsilon g f^{abc}(\partial_\mu \bar{c}^a)A_\mu^b c^c \\
 & + Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - Z_m Z_\psi m \bar{\psi} \psi + Z_1 \mu^\epsilon g \bar{\psi} \gamma^\mu T^a A_\mu^a \psi
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

2つめの等式でくりこまれた結合定数を定義している．また μ はくりこまれた結合定数を無次元にするために導入されたスケールであり， $D = 4 - 2\epsilon$ としている．これらから裸のパラメータと

くりこまれたパラメータの関係式は以下ようになる¹ .

$$\psi_0 = Z_\psi^{1/2} \psi \quad (\text{C.5})$$

$$A_0^\mu = Z_A^{1/2} A^\mu \quad (\text{C.6})$$

$$\xi_0 = Z_A \xi \quad (\text{C.7})$$

$$m_0 = Z_m m \quad (\text{C.8})$$

$$g_0 = Z_g g \mu^\epsilon \quad (\text{C.9})$$

また式 (C.2) の結合定数が g で共通していることから以下の Slavnov-Taylor [163, 164] 恒等式が得られる .

$$Z_g = Z_1 Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} \quad (\text{C.10})$$

$$= Z_{1'} Z_c^{-1} Z_A^{-1/2} \quad (\text{C.11})$$

$$= Z_{3g} Z_A^{-3/2} \quad (\text{C.12})$$

$$= Z_{4g}^{1/2} Z_A^{-3/2} \quad (\text{C.13})$$

C.2 グリーン関数に対するくりこみ群方程式

ここではグリーン関数に対するくりこみ群方程式を導入する . 裸の n 点グリーン関数 $G_B^{(n)}$ は以下で定義される .

$$G_B^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \phi_B(x_1) \cdots \phi_B(x_n) | 0 \rangle \quad (\text{C.14})$$

ここで添字 B は裸の量であることを表し T は時間順序積を表す . 裸の場 ϕ_B とくりこまれた場 ϕ の関係は以下で与えられる .

$$\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_B \quad (\text{C.15})$$

これよりくりこまれたグリーン関数は以下ようになる .

$$G_B^{(n)} = Z_\phi^{n/2} G^{(n)} \quad (\text{C.16})$$

裸のグリーン関数はくりこみスケールに依存しないのでこの式の両辺をスケールで微分すると以下ようになる .

$$0 = \frac{n}{2} Z_\phi Z^{n/2} Z^{-1} \left(\frac{d}{d\mu} Z_\phi \right) G^{(n)} + Z^{n/2} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} \right) G^{(n)} \quad (\text{C.17})$$

これを書き直すと以下ようになる .

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} + n\gamma \right] G^{(n)} = 0 \quad (\text{C.18})$$

¹ちなみに Peskin & Schroeder [162] では以下のように定義されている .

$$\psi_0 = Z_2^{1/2} \psi \quad (\text{C.3})$$

$$A_0^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu \quad (\text{C.4})$$

ここで β, γ, γ_m はそれぞれベータ関数, 異常次元, 質量の異常次元と呼ばれ以下のように定義される.

$$\beta \equiv \mu \frac{d}{d\mu} g \quad (\text{C.19})$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_\phi \quad (\text{C.20})$$

$$\gamma_m \equiv -\mu \frac{d}{d\mu} \ln m \quad (\text{C.21})$$

今は n 点グリーン関数のくりこみ群方程式を考えたが, そこから外線の伝搬関数を取り除いた 1PI の n 点グリーン関数 $\Gamma^{(n)}$ を考えるほうが便利な場合がある. ここで $\Gamma^{(n)}$ は以下で定義される.

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \left[\prod_{i=1}^n i\Delta_F(p_i) \right] \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (\text{C.22})$$

ここで $i\Delta_F$ は伝搬関数で以下で定義される.

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (\text{C.23})$$

また引数が運動量の量はフーリエ変換されたものであり, 以下で定義される.

$$F(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} F(x) \quad (\text{C.24})$$

これらの関係式を用いると $\Gamma_B^{(n)}$ と $\Gamma^{(n)}$ の関係式は以下ようになる.

$$\Gamma_B^{(n)} = Z_\phi^{-n/2} \Gamma^{(n)} \quad (\text{C.25})$$

これより n 点グリーン関数のときと同様に 1PI の n 点グリーン関数に対してもくりこみ群方程式が得られ, 以下ようになる.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (\text{C.26})$$

ここで異常次元の前の符号が n 点グリーン関数の時と違うことに注意する. また有効作用 Γ は 1PI の n 点グリーン関数を用いて以下のように定義される.

$$\Gamma[\phi] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}(x_1 \dots x_n) \quad (\text{C.27})$$

これから有効作用に対するくりこみ群方程式は以下で与えられる.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} - \gamma \right] \Gamma = 0 \quad (\text{C.28})$$

また結合定数や場が複数の種類あるときは有効作用のくりこみ群方程式は以下ようになる.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} - \sum_i \gamma_{m_i} \frac{\partial}{\partial m_i} - \sum_i \gamma_i \right] \Gamma = 0 \quad (\text{C.29})$$

ここで添字 i は種類を表す.

C.3 ベータ関数と異常次元

ここでは式 (C.19)-(C.21) で定義されたベータ関数と異常次元を詳しく議論する．裸の結合定数とくりこまれた結合定数の関係は式 (C.9) より以下で与えられる．

$$g_{iB} = Z_{g_i} g_i \mu^{\rho_i \epsilon} \quad (\text{C.30})$$

ここで添字 B は裸の量であることを表し，添字 i は結合定数の種類を表す．また $D = 4 - 2\epsilon$ である． ρ_i は以下のように定義される．

$$\rho_i = \begin{cases} 1 & i = (\text{ゲージ結合定数, 湯川結合定数}) \\ 2 & i = (\text{ヒッグスの4点結合定数}) \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

裸の量はスケールに依存しないので式 (C.30) の両辺に $\mu \frac{d}{d\mu}$ をかけると以下の結合定数に対するくりこみ群方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} g_i &\equiv \beta_i(g, \epsilon) \\ &= -\rho_i \epsilon g_i - g_i \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_{g_i} \\ &= -\rho_i \epsilon g + \beta_i(g) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

ここで $\beta_i(g)$ はベータ関数と呼ばれる．

ここからはくりこみ処方に $\overline{\text{MS}}$ 処方を用いることを仮定する． $\overline{\text{MS}}$ 処方ではくりこみ定数は ϵ で以下のように展開される．

$$Z_{g_i} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{g_i}^{(n)}}{\epsilon^n} \quad (\text{C.33})$$

また $\overline{\text{MS}}$ 処方ではスケール依存性は結合定数を通じてのみ存在するのでベータ関数は以下のように書き換えられる．

$$\beta_i(g) = g_i \sum_k g_k \frac{\partial}{\partial g_k} z_{g_i}^{(1)} \quad (\text{C.34})$$

これは摂動論の全ての次数で成り立つ式である²．これを文献 [165] の方法に従って導出する．まず関数 $f_i(g)$ を以下のように定義する．

$$\beta_i(g, \epsilon) = -\rho_i \epsilon g_i - g_i f_i(g) \quad (\text{C.36})$$

$$f_i(g) \equiv \frac{1}{Z_{g_i}} \mu \frac{d}{d\mu} Z_{g_i} \quad (\text{C.37})$$

これより以下のようになる．

$$f_i(g) Z_{g_i} = \mu \frac{d}{d\mu} Z_{g_i} = \sum_k \mu \frac{dg_k}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g_k} Z_{g_i} = \sum_k \beta_k(g, \epsilon) \frac{\partial}{\partial g_k} Z_{g_i} \quad (\text{C.38})$$

²これは摂動論の全ての次数のベータ関数が1ループの計算で求まると言っているのでは無い． Z_g は2ループまででは以下のように書ける．

$$Z_g = 1 + \alpha \frac{a_1}{\epsilon} + \alpha^2 \left(\frac{a_2}{\epsilon^2} + \frac{b_1}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (\text{C.35})$$

ここで $\alpha = g^2/4\pi$ である．この式の第2項が1ループの寄与で第3項が2ループの寄与であり， $1/\epsilon$ に比例する項は2ループの寄与にも存在することがわかる．

この両辺に式 (C.33) を代入すると以下ようになる .

$$\begin{aligned} f_i(g) \left(1 + \frac{z_{g_i}^{(1)}}{\epsilon} + \frac{z_{g_i}^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots \right) &= \sum_k \beta_k(g, \epsilon) \frac{\partial}{\partial g_k} \left(\frac{z_{g_i}^{(1)}}{\epsilon} + \frac{z_{g_i}^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots \right) \\ &= \sum_k (-\rho_k \epsilon g_k + \beta_k(g)) \frac{\partial}{\partial g_k} \left(\frac{z_{g_i}^{(1)}}{\epsilon} + \frac{z_{g_i}^{(2)}}{\epsilon^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

ここで $\beta(g)$ の有限性は $f_i(g)$ の有限性を意味するので, この式の両辺の $1/\epsilon$ の次数に対応した係数はそれぞれ等しい . よって $1/\epsilon$ によらない項を比較すると以下の関係式が得られる .

$$f_i(g) = - \sum_k \rho_k g_k \frac{\partial z_{g_i}^{(1)}}{\partial g_k} \quad (\text{C.40})$$

これより式 (C.34) が示された .

同様に異常次元についても考える . 異常次元は以下で与えられている .

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_i \quad (\text{C.41})$$

先と同様にくりこみ定数を以下のように ϵ で展開する .

$$Z_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_i^{(n)}}{\epsilon^n} \quad (\text{C.42})$$

ベータ関数と同じ議論により, $\overline{\text{MS}}$ 処方では異常次元は以下ようになる .

$$\gamma_i = -\frac{1}{2} \sum_k \rho_k g_k \frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial g_k} \quad (\text{C.43})$$

続いて質量の異常次元についても考える . 式 (C.8) をスケールで微分することで以下の質量に対するくりこみ群方程式が得られる .

$$\mu \frac{d}{d\mu} m = -\gamma_m m \quad (\text{C.44})$$

ここで異常次元は以下で定義されている .

$$\gamma_m \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_m \quad (\text{C.45})$$

先と同様にくりこみ定数を ϵ で展開する .

$$Z_{mi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{mi}^{(n)}}{\epsilon^n} \quad (\text{C.46})$$

ベータ関数と同じ議論により, $\overline{\text{MS}}$ 処方では質量の異常次元は以下ようになる .

$$\gamma_{mi} = - \sum_k \rho_k g_k \frac{\partial z_{mi}^{(1)}}{\partial g_k} \quad (\text{C.47})$$

C.4 複合演算子のくりこみ

ここでは以下の様な複合演算子のくりこみを考える．

$$\mathcal{O}_B = \Phi_{1B} \cdots \Phi_{nB} \quad (\text{C.48})$$

ここで添字 B は裸の量であることを表す．くりこみ定数を以下のように定義する³．

$$\mathcal{O}_B = Z_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \quad (\text{C.49})$$

またそれぞれの場 Φ は以下のような関係式で裸の量とくりこまれた量がつながっている．

$$\Phi_{iB} = Z_i^{1/2} \Phi_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{C.50})$$

これを用いてくりこまれた複合演算子は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \frac{1}{Z_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_B \\ &= \frac{1}{Z_{\mathcal{O}}} \Phi_{1B} \cdots \Phi_{nB} \\ &= \frac{Z_1^{1/2} \cdots Z_n^{1/2}}{Z_{\mathcal{O}}} \Phi_1 \cdots \Phi_n \\ &= \Phi_1 \cdots \Phi_n + \delta_{\mathcal{O}} \Phi_1 \cdots \Phi_n \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

ここで $\delta_{\mathcal{O}}$ はこの複合演算子の相殺項であり，以下のように定義される．

$$\delta_{\mathcal{O}} \equiv \frac{Z_1^{1/2} \cdots Z_n^{1/2}}{Z_{\mathcal{O}}} - 1 \quad (\text{C.52})$$

式 (C.49) の両辺に $\mu \frac{d}{d\mu}$ をかけると以下のような複合演算子 \mathcal{O} のくりこみ群方程式が得られる．

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{O} = -\gamma_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \quad (\text{C.53})$$

ここで $\gamma_{\mathcal{O}}$ は複合演算子の異常次元であり，以下のように定義される．

$$\gamma_{\mathcal{O}} \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_{\mathcal{O}} \quad (\text{C.54})$$

ベータ関数のときと同様にくりこみ定数を ϵ で展開し，

$$Z_{\mathcal{O}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{\mathcal{O}}^{(n)}}{\epsilon^n} \quad (\text{C.55})$$

異常次元の有限性を用いれば，複合演算子の異常次元は以下ようになる．

$$\gamma_{\mathcal{O}} = - \sum_k \rho_k g_k \frac{\partial z_{\mathcal{O}}^{(1)}}{\partial g_k} \quad (\text{C.56})$$

³ここで $\mathcal{O} \neq \Phi_1 \cdots \Phi_n$ であることに注意する．式 (C.51) からわかるように $\mathcal{O} = \Phi_1 \cdots \Phi_n + (\text{相殺項})$ である．

次に Wilson 係数に対するくりこみ群方程式を考える．複合演算子を用いるとラグランジアンは以下のように書ける．

$$\mathcal{L} = C(\mu)\mathcal{O}(\mu) \quad (\text{C.57})$$

ここで複合演算子の係数 C は Wilson 係数と呼ばれる．またラグランジアンはスケールに依らない量なので $\mu \frac{d}{d\mu}(CO) = 0$ より，Wilson 係数に対するくりこみ群方程式は以下ようになる．

$$\mu \frac{d}{d\mu} C = \gamma_{\mathcal{O}} C \quad (\text{C.58})$$

一般には同じ量子数を持つ複合演算子はくりこみ群によって混合する．そのため形式的には複合演算子は以下のようなベクトルで扱える．

$$\mathcal{O}_B^i = Z_{\mathcal{O}}^{ij} \mathcal{O}^j \quad (\text{C.59})$$

同様にして \mathcal{O}^i のくりこみ群方程式は以下ようになる．

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{O}_i = \gamma_{\mathcal{O}}^{ij} \mathcal{O}_j \quad (\text{C.60})$$

ここで異常次元行列であり，以下で定義される．

$$\gamma_{\mathcal{O}}^{ij} = [Z_{\mathcal{O}}^{-1}]^{ik} \mu \frac{d}{d\mu} Z_{\mathcal{O}}^{kj} \quad (\text{C.61})$$

ラグランジアンは以下の形で書けている．

$$\mathcal{L} = \sum_i C^i \mathcal{O}^i \quad (\text{C.62})$$

そのため Wilson 係数に対するくりこみ群方程式は以下ようになる⁴．

$$\mu \frac{d}{d\mu} C^i = C^j \gamma_{\mathcal{O}}^{ji} \quad (\text{C.63})$$

次にグリーン関数 $G^{(n)}$ に複合演算子 \mathcal{O} を挿入したグリーン関数 $G_{\mathcal{O}}^{(n)}$ を考える．これは以下で定義される．

$$G_{\mathcal{O} B}^{(n)} \equiv \langle 0 | T \phi_B(x_1) \cdots \phi_B(x_n) \mathcal{O}_B(x) | 0 \rangle \quad (\text{C.64})$$

式 (C.15) と (C.49) よりくりこまれたグリーン関数との関係は以下ようになる．

$$G_{\mathcal{O} B}^{(n)} = Z_{\phi}^{n/2} Z_{\mathcal{O}} G_{\mathcal{O}}^{(n)} \quad (\text{C.65})$$

これより $G_{\mathcal{O}}^{(n)}$ に対するくりこみ群方程式は以下ようになる⁵．

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma + \gamma_{\mathcal{O}} \right] G_{\mathcal{O}}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.66})$$

同様に 1PI グリーン関数に対しては以下ようになる．

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - n\gamma + \gamma_{\mathcal{O}} \right] \Gamma_{\mathcal{O}}^{(n)} = 0 \quad (\text{C.67})$$

同様に有効作用に対しては以下ようになる．

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma + \gamma_{\mathcal{O}} \right] \Gamma_{\mathcal{O}} = 0 \quad (\text{C.68})$$

⁴異常次元は行列なので掛け算の順番に注意する．

⁵ここでは質量がない理論を考えてる．また質量項を $\mathcal{O} = \Phi\Phi$ という複合演算子とみなすこともできる．

C.5 ベータ関数

以下のようなラグランジアンで書ける一般的な理論を考える⁶。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)^2 + \psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu i D_\mu \psi_i - (y_k^{ij} \psi_i \psi_j \phi_k + \text{h.c.}) \quad (\text{C.69})$$

ここでフェルミオンは2成分表記を用いている。MS 処方での2ループまでのゲージ結合定数のベータ関数は以下で与えられる [166]。

$$\begin{aligned} \beta(g) &\equiv \mu \frac{d}{d\mu} g \\ &= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3}C(G) - \frac{4}{3}\kappa T(F) - \frac{1}{6}T(S) \right] - \frac{g^3}{(4\pi)^4} 2\kappa Y_4(F) \\ &\quad - \frac{g^5}{(4\pi)^4} \left[\frac{34}{3}\{C(G)\}^2 - \kappa \left(4C(F) + \frac{20}{3}C(G) \right) T(F) - \left(2C(S) + \frac{1}{3}C(G) \right) T(S) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

ここで $C(G)$, $C(F)$, $C(S)$ はそれぞれゲージ場, フェルミオン場, スカラー場についてのカシミア演算子である。また $T(F)$, $T(S)$ はそれぞれフェルミオン場とスカラー場についてのディンキンインデックスである。カシミア演算子とディンキンインデックスは表現 R の生成子 T_R^a を用いて以下で定義される。

$$(T_R^a T_R^a)^i_j \equiv C(R)\delta_j^i, \quad \text{Tr}[T_R^a T_R^b] \equiv T(R)\delta^{ab} \quad (\text{C.71})$$

κ はワイルフェルミオンに対しては $\kappa = 1/2$, ディラックフェルミオンに対しては $\kappa = 1$ である。また, 不変量 $Y_4(F)$ は以下のように定義されている。

$$Y_4(F) \equiv \frac{1}{\dim(G)} \text{Tr}[C(F)y_k^\dagger y_k] \quad (\text{C.72})$$

ここで $\dim(G)$ はリー群 G の次元である。

ベータ関数には以下の定理が成り立つ。

定理

ベータ関数の1ループと2ループの係数はくりこみ処方に依存せず, 3ループ以降の係数はくりこみ処方に依存する。

証明

ここではプライム付きの量とプライムなしの量はくりこみ処方の違いを表すこととする。また計算を簡単にするため結合定数 g の代わりに $\alpha \equiv g^2/4\pi$ を用いる。結合定数のくりこみ処方依存性は以下のように書ける。

$$\alpha'(\mu) = \alpha(\mu) + c_1\alpha^2(\mu) + c_2\alpha^3(\mu) + \dots \quad (\text{C.73})$$

⁶この一般的な場の理論にスカラー場の自己相互作用も考えた理論の2ループまでのベータ関数は [166–168] で与えられている。

またベータ関数は以下のように展開できる⁷ .

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha = \beta(\alpha) = b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^3 + b_3 \alpha^4 + \dots \quad (\text{C.75})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha' = \beta'(\alpha') = b'_1 \alpha'^2 + b'_2 \alpha'^3 + b'_3 \alpha'^4 + \dots \quad (\text{C.76})$$

ここで $1/\alpha'$ を考えると以下ようになる .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha'} &= \frac{1}{\alpha + c_1 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \dots} \\ &= \frac{1}{\alpha} - c_1 + (c_1^2 - c_2) \alpha + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

このスケール微分を 2 通りの方法で計算する . 1 つ目の方法は以下ようになる .

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{\alpha'} &= \mu \frac{d\alpha}{d\mu} \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha'} \\ &= \beta(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha'} \\ &= (b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^3 + b_3 \alpha^4 + \dots) \left(-\frac{1}{\alpha^2} + (c_1^2 - c_2) + \dots \right) \\ &= -b_1 - b_2 \alpha - [b_3 - b_1(c_1^2 - c_2)] \alpha^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

2 つ目の方法は以下ようになる .

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{\alpha'} &= -\frac{1}{\alpha'^2} \mu \frac{d\alpha'}{d\mu} \\ &= -\frac{1}{\alpha'^2} \beta'(\alpha') \\ &= -\frac{1}{\alpha'^2} (b'_1 \alpha'^2 + b'_2 \alpha'^3 + b'_3 \alpha'^4 + \dots) \\ &= -b'_1 - b'_2 \alpha' - b'_3 \alpha'^2 + \dots \\ &= -b'_1 - b'_2 \alpha - (b'_2 c_1 + b'_3) \alpha^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

ここで最後の式変形では式 (C.73) を用いた . 式 (C.78) と (C.79) を比較すると以下の関係式が得られる .

$$b'_1 = b_1 \quad (\text{C.80})$$

$$b'_2 = b_2 \quad (\text{C.81})$$

$$b'_3 = b_3 - b_2 c_1 - b_1 (c_1^2 - c_2) \quad (\text{C.82})$$

これから 1 ループと 2 ループのベータ関数の係数はくりこみ処方による依存性がなく , 3 ループからはくりこみ処方による依存性があることが示せた . また同様にして 4 ループ以上がくりこみ処方による依存性があることは明らかである . \square

この定理があるため上記の $\overline{\text{MS}}$ 処方で計算されたベータ関数は $\overline{\text{DR}}$ 処方でも成り立つ . しかし結合定数自体はくりこみ処方による依存性を持つ .

⁷ちなみに $\beta(g)$ と $\beta(\alpha)$ の関係は以下で与えられる .

$$\beta(\alpha) = \frac{g}{2\pi} \beta(g) \quad (\text{C.74})$$

C.6 超対称性理論

超対称性理論の場合、場の自由度をカイラル多重項やベクトル多重項にした方が便利である。例として1ループのゲージ結合定数のベータ関数を考える。式 (C.70) より1ループのベータ関数の係数は以下で与えられる。

$$b_g^{(1)} = -\frac{11}{3}C(G) + \frac{2}{3}T(F) + \frac{1}{6}T(S) \quad (\text{C.83})$$

カイラル多重項の自由度はワイルフェルミオン1つ、複素スカラー1つであるため、以下のような寄与になる。

$$\frac{2}{3}T(C) + 2 \times \frac{1}{6}T(C) = T(C) \quad (\text{C.84})$$

ここで C はカイラル多重項の自由度を表す。ベクトル多重項の自由度はゲージ場1つ、ワイルフェルミオン1つであるため以下のように寄与になる。

$$-\frac{11}{3}C(V) + \frac{2}{3}T(V) = -3C(V) \quad (\text{C.85})$$

ここで V はベクトル多重項の自由度を表す。これらを合わせれば超対称理論の1ループのゲージ結合定数のベータ関数は以下ようになる。

$$b_g^{(1)} = -3C(V) + T(C) \quad (\text{C.86})$$

この自由度を勘定する方法を用いて超対称性理論の2ループのくりこみ群方程式が得られている [169]。またスーパーグラフの方法を用いて直接2ループを計算し、超対称性理論の2ループのくりこみ群方程式を求めたものもある⁸ [170]。

それでは以下のスーパーポテンシャルを持つ一般的な超対称性理論を考える。

$$W = \frac{1}{6}y^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \quad (\text{C.87})$$

ゲージ結合定数のベータ関数は以下で与えられる。

$$\mu \frac{d}{d\mu} g = \frac{1}{16\pi^2} b_g^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} b_g^{(2)} \quad (\text{C.88})$$

またそれぞれの量は以下で与えられる。

$$b_g^{(1)} = g^3 [T(R) - 3C(G)] \quad (\text{C.89})$$

$$b_g^{(2)} = g^5 \{-6[C(G)]^2 + 2C(G)T(R) + 4T(R)C(R)\} - g^3 \frac{C(r_k)}{\dim(G)} y^{ijk} (y^{ijk})^* \quad (\text{C.90})$$

湯川行列の1ループベータ関数は超対称非くりこみ定理 [173] よりそれぞれのカイラル超場の波動関数くりこみから得られ、以下ようになる。

$$\mu \frac{d}{d\mu} y^{ijk} = \frac{1}{16\pi^2} \left[y^{ijl}(\gamma^{(1)})_l^k + y^{ilk}(\gamma^{(1)})_l^j + y^{ljk}(\gamma^{(1)})_l^i \right] \quad (\text{C.91})$$

ここで1ループの異常次元は以下で与えられる。

$$(\gamma^{(1)})_i^j = \frac{1}{2}(y^*)_{ikl}y^{jkl} - 2\delta_i^j g^2 C(r_i) \quad (\text{C.92})$$

⁸はじめスーパーグラフを用いたの結果 [170] と文献 [169] の結果一致しておらず、その間違いが文献 [171] で指摘された。この不一致は ϵ スカラーと呼ばれる自由度を先の計算では正しく取り扱えていないため生じた [172]。この効果を取り入れた結果スーパーグラフでの計算は場の理論の一般公式から導出したくりこみ群方程式 [169] と一致した。

C.7 QCD

QCD 結合定数のくりこみ群方程式は以下で与えられる [174–176] .

$$\mu \frac{dg_s}{d\mu} = \frac{g_s^3}{16\pi^2} b_1 + \frac{g_s^5}{(16\pi^2)^2} b_2 \quad (\text{C.93})$$

ベータ関数の係数は以下で与えられる .

$$b_1 = -\frac{11}{3}N_C + \frac{2}{3}N_f \quad (\text{C.94})$$

$$b_2 = -\frac{34}{3}N_C^2 + \frac{10}{3}N_C N_f + 2C_F N_f \quad (\text{C.95})$$

ここで $N_C = 3$ はカラーの数を表し , N_f はクォークのフレーバー数を表す . C_F はカシミア演算子で以下で定義される .

$$C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \quad (\text{C.96})$$

2 ループまでの質量の異常次元は以下で与えられる [177] .

$$\gamma_m = \frac{g_s^2}{16\pi^2} \gamma_m^{(1)} + \frac{g_s^4}{(16\pi^2)^2} \gamma_m^{(2)} \quad (\text{C.97})$$

それぞれの量は以下で与えられる .

$$\gamma_m^{(1)} = 6C_F \quad (\text{C.98})$$

$$\gamma_m^{(2)} = C_F \left(3C_F + \frac{97}{3}N_C - \frac{10}{3}N_f \right) \quad (\text{C.99})$$

ちなみに質量に対するくりこみ群方程式は以下のとおりである .

$$\mu \frac{d}{d\mu} m(\mu) = -\gamma_m(g_s) m(\mu) \quad (\text{C.100})$$

C.8 具体的な値

標準模型のゲージ結合定数についてのくりこみ群方程式

$$\mu \frac{dg_a}{d\mu} = \frac{g_a^3}{16\pi^2} b_a^{(1)} + \frac{g_a^3}{(16\pi^2)^2} \left[\sum_{b=1}^3 b_{ab}^{(2)} g_b^2 - \sum_{k=u,d,e} c_{ak} \text{Tr}(f_k^\dagger f_k) \right] \quad (\text{C.101})$$

ここで $a = 1, 2, 3$ であり , ゲージ結合定数は以下のような $SU(5)$ の規格化を用いている .

$$g_3 \equiv g_s , \quad g_2 \equiv g , \quad g_1 \equiv \sqrt{\frac{5}{3}} g' \quad (\text{C.102})$$

ベータ関数の係数はそれぞれ以下で与えられる .

$$b_a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22/3 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} n_g + \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} n_H = \begin{pmatrix} 41/10 \\ -19/6 \\ -7 \end{pmatrix}_{\text{SM}} \quad (\text{C.103})$$

$$b_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -136/3 & 0 \\ 0 & 0 & -102 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19/15 & 3/5 & 44/15 \\ 1/5 & 49/3 & 4 \\ 11/30 & 3/2 & 76/3 \end{pmatrix} n_g + \begin{pmatrix} 9/50 & 9/10 & 0 \\ 3/10 & 13/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} n_H \quad (\text{C.104})$$

$$= \begin{pmatrix} 199/50 & 27/10 & 44/5 \\ 9/10 & 35/6 & 12 \\ 11/10 & 9/2 & -26 \end{pmatrix}_{\text{SM}} \quad (\text{C.105})$$

$$c_{ak} = \begin{pmatrix} 17/10 & 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{\text{SM}} \quad (\text{C.106})$$

ここで n_g は世代の数であり, n_H はヒッグス 2 重項の数である .

超対称性理論の場合ベータ関数の係数は以下で与えられる .

$$b_a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} n_g + \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} n_H = \begin{pmatrix} 33/5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{\text{MSSM}} \quad (\text{C.107})$$

$$b_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -54 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38/15 & 6/5 & 88/15 \\ 2/5 & 14 & 8 \\ 11/15 & 3 & 68/3 \end{pmatrix} n_g + \begin{pmatrix} 9/50 & 9/10 & 0 \\ 3/10 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} n_H \quad (\text{C.108})$$

$$= \begin{pmatrix} 199/25 & 27/5 & 88/5 \\ 9/5 & 25 & 24 \\ 11/5 & 9 & 14 \end{pmatrix}_{\text{MSSM}} \quad (\text{C.109})$$

$$c_{ak} = \begin{pmatrix} 26/5 & 14/5 & 18/5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{\text{MSSM}} \quad (\text{C.110})$$

付録D 第5章の電弱相互作用をする暗黒物質の有効理論に関する付録

D.1 計算に用いるラグランジアン

ここでは計算で用いたラグランジアンを書き下す．本文中では $Y = 0$ と $Y \neq 0$ を場合分けしたが $Y = 0$ の場合でも式 (5.16) や式 (5.18) のようにディラックフェルミオンを用いて書けば $Y \neq 0$ の場合と対応がつく¹．そのためここでは $Y \neq 0$ の場合を考える．

暗黒物質の多重項のゲージ相互作用は式 (5.26) から得られ以下のようなになる．
Z ボソンと光子のゲージ相互作用

$$\mathcal{L} = g_{\psi\psi V}^{(i)} \bar{\psi}^{(i)} \gamma^\mu \psi^{(i)} V_\mu \quad (\text{D.1})$$

ここで ($V = Z, \gamma$) である．それぞれの結合定数は以下で与えられる．

$$g_{\psi\psi Z}^{(i)} = \frac{g}{\cos \theta_W} (T_\psi^3 - Q_\psi^{(i)} \sin^2 \theta_W) \quad (\text{D.2})$$

$$g_{\psi\psi \gamma}^{(i)} = e Q_\psi^{(i)} \quad (\text{D.3})$$

また $(T_\psi^3)_{ii} = (T_n^3)_{ii} = i$ であり， $Q_\psi^{(i)} = T_\psi^3 + Y$ である．意味が明白な場合が多いので基本的には添字 (i) は省略する．

W ボソンのゲージ相互作用

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dim4}} &= \sum_{j,k} \bar{\psi}^{(j)} i(\not{D})_{jk} \psi^{(k)} \\ &\ni + \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_j (\sqrt{n(n+1)} - j(j-1)) \bar{\psi}^{(j)} \gamma^\mu \psi^{(j-1)} W_\mu^+ \\ &\quad + \sqrt{n(n+1)} - j(j+1) \bar{\psi}^{(j)} \gamma^\mu \psi^{(j+1)} W_\mu^- \\ &= \sum_j \left[g_{\psi\psi W}^{(j)} \bar{\psi}^{(j)} \gamma^\mu \psi^{(j-1)} W_\mu^+ + g_{\psi\psi W}^{(j+1)} \bar{\psi}^{(j)} \gamma^\mu \psi^{(j+1)} W_\mu^- \right] \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

ここで結合定数を以下のように定義する．

$$g_{\psi\psi W}^{(j)} \equiv \frac{g}{\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1)} - j(j-1) \quad (\text{D.5})$$

次に式 (5.27) の相互作用ラグランジアンについて考える．式 (5.27) を再掲する．

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} = -\frac{1}{\Lambda} |\Phi|^2 \bar{\psi} (g_1 + i\gamma_5 f_1) \psi - \frac{1}{\Lambda} \Phi^\dagger T_2^a \Phi \bar{\psi} (g_2 + i\gamma_5 f_2) T_n^a \psi \quad (\text{D.6})$$

¹その際に $SU(2)_L$ の固有値の添字 i の取りうる範囲に気をつける．

真空期待値やヒッグス粒子，ゴールドストンボソンはヒッグス場に以下のように入っている．

$$\Phi = \begin{pmatrix} -i\phi^+ \\ \frac{v+h+i\phi_Z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

これを使って相互作用を書き下す．

ヒッグス粒子との相互作用²

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} \ni -g_{\psi\psi h}^{S(j)} \overline{\psi^{(j)}} \psi^{(j)} h - g_{\psi\psi h}^{P(j)} \overline{\psi^{(j)}} i\gamma_5 \psi^{(j)} h \quad (\text{D.8})$$

ここで結合定数は以下で定義されている．

$$g_{\psi\psi h}^{S(j)} = \frac{v}{\Lambda} \left(g_1 - g_2 \frac{j}{2} \right) \quad (\text{D.9})$$

$$g_{\psi\psi h}^{P(j)} = \frac{v}{\Lambda} \left(f_1 - f_2 \frac{j}{2} \right) \quad (\text{D.10})$$

これも基本的には添字 (j) は省略する．

次にゴールドストンボソンとの相互作用を考える．生成子の間には以下の関係式が成り立つ．

$$T_2^a T_n^a = \frac{1}{2} T_2^+ T_n^- + \frac{1}{2} T_2^- T_n^+ + T_2^3 T_n^3 \quad (\text{D.11})$$

ここで $T^\pm = T^1 \pm iT^2$ である．これよりゴールドストンボソンとの相互作用は以下のようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dim5}} \ni & \sum_j \left[+i \frac{1}{\Lambda} \frac{v}{2\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1) - j(j-1)} \overline{\psi^{(j)}} (g_2 + i\gamma_5 f_2) \psi^{(j-1)} \phi^+ \right. \\ & \left. - i \frac{1}{\Lambda} \frac{v}{2\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1) - j(j+1)} \overline{\psi^{(j)}} (g_2 + i\gamma_5 f_2) \psi^{(j+1)} \phi^- \right] \\ & = \sum_j \left[g_{\psi\psi\phi^+}^{(j)} \overline{\psi^{(j)}} (g_2 + i\gamma_5 f_2) \psi^{(j-1)} \phi^+ + g_{\psi\psi\phi^-}^{(j+1)} \overline{\psi^{(j)}} (g_2 + i\gamma_5 f_2) \psi^{(j+1)} \phi^- \right] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

それぞれの結合定数は以下のように定義する．

$$g_{\psi\psi\phi^+}^{(j)} \equiv +i \frac{1}{\Lambda} \frac{v}{2\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1) - j(j-1)} \quad (\text{D.13})$$

$$g_{\psi\psi\phi^-}^{(j)} \equiv -i \frac{1}{\Lambda} \frac{v}{2\sqrt{2}} \sqrt{n(n+1) - j(j-1)} \quad (\text{D.14})$$

標準模型の相互作用も必要なものを書き下す．

標準模型のフェルミオン f のゲージ相互作用 ($V = Z, \gamma$)

$$\mathcal{L} = \bar{f} \gamma^\mu (g_{ffV}^V + g_{ffV}^A \gamma_5) f V_\mu \quad (\text{D.15})$$

ここで結合定数は以下で与えられる．

$$g_{ff\gamma}^V = eQ_f \quad (\text{D.16})$$

$$g_{ff\gamma}^A = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$g_{ffZ}^V = \frac{g}{\cos\theta_W} \left(\frac{1}{2} T_f^3 - Q_f \sin^2\theta_W \right) \quad (\text{D.18})$$

$$g_{ffZ}^A = -\frac{g}{\cos\theta_W} \frac{1}{2} T_f^3 \quad (\text{D.19})$$

²マヨラナフェルミオンに対しては結合定数の前に対称因子 $1/2$ が付く．

ここで $f = u$ のときは $T_f^3 = \frac{1}{2}$ であり, $f = d, e$ のときは $T_f^3 = -\frac{1}{2}$ である.
 W ボソンのゲージ相互作用

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu W_\mu^- \quad (\text{D.20})$$

標準模型のフェルミオンとヒッグス粒子の相互作用

$$\mathcal{L} = -\frac{m_f}{v} \bar{f} f h \quad (\text{D.21})$$

標準模型のレプトンとゴールドストーンボソンの相互作用

$$\mathcal{L} = i \frac{\sqrt{2}}{v} m_e \bar{\nu} \frac{1 + \gamma_5}{2} e \phi^+ - i \frac{\sqrt{2}}{v} m_e \bar{e} \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu \phi^- \quad (\text{D.22})$$

最後に自由な部分のラグランジアンについて議論する. 自由な部分のラグランジアンは以下で与えられる.

$$\mathcal{L} = \overline{\psi^{(j)}} (i \not{\partial} - m_R^{(j)} - i m_I^{(j)} \gamma_5) \psi^{(j)} \quad (\text{D.23})$$

ここでそれぞれの質量は以下で与えられる.

$$m_R^{(j)} = M + g_1 \frac{v^2}{2\Lambda} - g_2 \frac{j}{2} \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (\text{D.24})$$

$$m_I^{(j)} = f_1 \frac{v^2}{2\Lambda} - f_2 \frac{j}{2} \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (\text{D.25})$$

暗黒物質の伝搬関数は式 (D.23) の演算子の逆演算子であり, 以下ようになる.

$$i\Delta_F(p) = \frac{i(\not{p} + m_R - i m_I \gamma_5)}{p^2 - (m_R^2 + m_I^2) + i\epsilon} \quad (\text{D.26})$$

ここで γ_5 に比例している質量項を γ_5 質量項と呼ぶ. ここでは γ_5 質量項をあらわに残した形で書いたが, γ_5 質量項はカイラル変換を用いることで消すことができる. しかしカイラル変換によって相互作用の形は上記のものから変更を受ける. γ_5 質量項を残したラグランジアンとカイラル変換したラグランジアンのどちらで計算しても同じ結果を出す, ダイアグラムによっては労力の差が大きくなることもある. そのため適宜ふさわしいラグランジアンを使う必要がある. 次の章ではカイラル変換をしたラグランジアンについて議論する.

D.2 カイラル変換をした後の相互作用ラグランジアン

まずはラグランジアンの自由な部分を考える.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_R - i m_I \gamma_5) \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - (\mathcal{M} \bar{\psi}_L \psi_R + \text{h.c.}) \quad (\text{D.27})$$

ここで $\mathcal{M} = m_R + i m_I$ は複素質量と呼ばれる. 複素質量を $\mathcal{M} = |\mathcal{M}| e^{i\theta}$ と極表示してやるとラグランジアンは以下ようになる.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - |\mathcal{M}| e^{i\theta} \bar{\psi}_L \psi_R - |\mathcal{M}| e^{-i\theta} \bar{\psi}_R \psi_L \quad (\text{D.28})$$

そこで以下のようなカイラル変換を考える．

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta\gamma_5/2}\psi \quad (\text{D.29})$$

このカイラル変換の下でラグランジアンは以下のようになり， γ_5 質量項を消すことができる．

$$\mathcal{L} = \overline{\psi'}(i\partial - |\mathcal{M}|)\psi' \quad (\text{D.30})$$

またそれぞれのパラメータは以下の関係式を満たす．

$$|\mathcal{M}| = \sqrt{m_R^2 + m_I^2} = M_{\text{phys}}, \quad \cos\theta = \frac{m_R}{M_{\text{phys}}}, \quad \sin\theta = \frac{m_I}{M_{\text{phys}}} \quad (\text{D.31})$$

よってカイラル変換をした後のラグランジアンから得られる伝搬関数は以下のとおりである．

$$i\Delta_F(p) = \frac{i(\not{p} + M_{\text{phys}})}{p^2 - M_{\text{phys}}^2 + i\epsilon} \quad (\text{D.32})$$

ここからは式 (D.29) のカイラル変換で相互作用項がどのように変化するかを見る．ゲージ相互作用はカイラル変換に対して不変なので変更を受けない．式 (D.8) のヒッグス粒子との相互作用は以下のようになる．

$$\mathcal{L}_{\text{dim5}} \ni -g_{\psi\psi h}^{S(j)} \overline{\psi^{(j)}}\psi^{(j)}h - g_{\psi\psi h}^{P(j)} \overline{\psi^{(j)}}i\gamma_5\psi^{(j)}h = -\hat{g}_{\psi\psi h}^{S(j)} \overline{\hat{\psi}^{(j)}}\hat{\psi}^{(j)}h - \hat{g}_{\psi\psi h}^{P(j)} \overline{\hat{\psi}^{(j)}}i\gamma_5\hat{\psi}^{(j)}h \quad (\text{D.33})$$

ここでハット付きの量はカイラル変換をした後の量を表す．結合定数の関係は以下のとおりである³．

$$\begin{pmatrix} \hat{g}_{\psi\psi h}^S \\ \hat{g}_{\psi\psi h}^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{\psi\psi h}^S \\ g_{\psi\psi h}^P \end{pmatrix} \quad (\text{D.34})$$

D.3 d_f^{hV} の計算

ここでは $d_f^{h\gamma}$ と d_f^{hZ} の Barr-Zee ダイアグラムの計算を行う．計算に必要なラグランジアンは付録の D.1 と D.2 にまとめてあり，記号もそこで定義されているものを使う．以下の計算では $Y \neq 0$ であり，付録 D.2 で与えられているカイラル変換をして γ_5 質量項消した後のラグランジアンを用いる．また γ と Z はまとめて $V = Z, \gamma$ 書く．

まずは式 (5.37) の電気双極子モーメントの有効ラグランジアン of の振幅を求める．図 D.1 のようにそれぞれの運動量を割り当てた時，振幅は以下のようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \langle A(p)f(q-p) | i\mathcal{L}_{\text{EDM}} | f(q) \rangle \\ &= id_f \bar{u}_f(q-p) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 u_f(q) p_\mu \epsilon_\nu^*(p) \\ &= -d_f \bar{u}_f(q-p) \gamma_5 u_f(q) (q+q') \cdot \epsilon^*(p) \\ &= -2d_f \bar{u}_f(q-p) \gamma_5 u_f(q) q \cdot \epsilon^*(p) \\ &= -i \frac{d_f}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu \epsilon_\nu^*(p) \bar{u}_f(q-p) \gamma_\rho \gamma_\sigma u_f(q) \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

³ただし有効理論の $1/\Lambda$ の摂動を考えると，式 (D.9) と式 (D.10) を見ればわかるように結合定数自体が $1/\Lambda$ の量であるため， $1/\Lambda$ の摂動の下では $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$ となり，結合定数自体は変化しない．

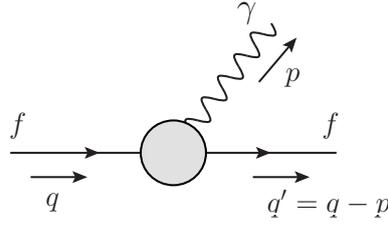


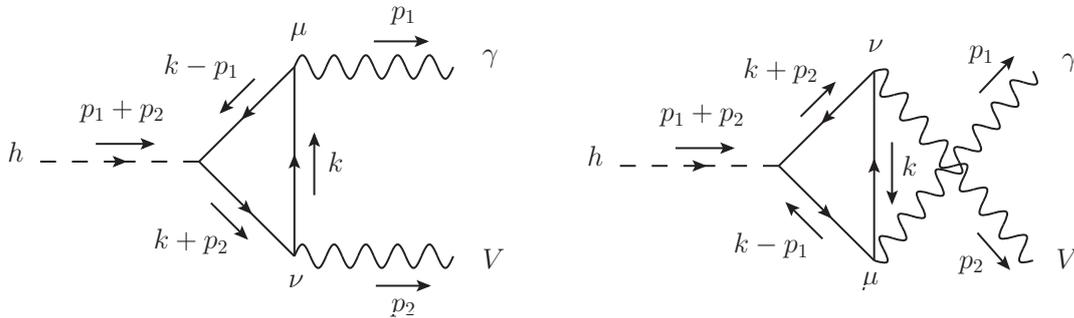
図 D.1: 電気双極子モーメントの有効演算子から得られる振幅 .

ここで 2 行目から 3 行目の式変形ではディラック方程式 $(\not{q} - m_f)u(q) = 0$ と横波条件 $p \cdot \epsilon^*(p) = 0$ を用いた . 5 行目の式は以下の関係式を用いた .

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\rho\gamma_\sigma = -i\gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 \quad (\text{D.36})$$

ここで $\epsilon^{0123} = +1$ である . この振幅の使いやすいものとループ計算をして得られた振幅をつり合わせればよい .

次にダイアグラムの計算を実行する . はじめに暗黒物質の多重項がまわる 1 つ目のループを計算し , 有効頂点を求める . ダイアグラムは図 D.2 の 2 つがあり , 運動量の割当なども図のとおり定義する . ここで p_1 が on-shell の運動量である . CP の破れを拾うため , 暗黒物質の多重項とヒッグス粒子の相互作用は CP を破っているものを用いる . これらのダイアグラムの寄与を足した振幅は以下ようになる .


 図 D.2: 有効頂点を求めるための 1 つ目のループのダイアグラム . 運動量は p_1 のみが on-shell である . また $V = Z, \gamma$ である . これらのダイアグラムの寄与は等しい .

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \sum_j (ig_{\psi\psi\gamma})(ig_{\psi\psi V})\hat{g}_{\psi\psi h}^P(-1)\epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu^*(p_2)(i)^3 \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_{\text{phys}}^2)[(k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^2][(k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^2]} \\ &\times \left(\text{Tr}[(\not{k} + M_{\text{phys}})\gamma^\nu(\not{k} + \not{p}_2 + M_{\text{phys}})\gamma_5(\not{k} - \not{p}_1 + M_{\text{phys}})\gamma^\mu] \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}[(\not{k} + M_{\text{phys}})\gamma^\mu(-\not{k} + \not{p}_1 + M_{\text{phys}})\gamma_5(-\not{k} - \not{p}_2 + M_{\text{phys}})\gamma^\nu] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

ここで M_{phys} や結合定数に付いている添字 (j) は省略してある . また和の記号も以下の計算では省略する . 計算すればわかるように 1 つめのトレース部分と 2 つ目のトレース部分の寄与は等し

い．そのためここでは代表として 1 つ目のトレース部分を計算する．結果は以下ようになる．

$$\text{Tr}[(\not{k} + M_{\text{phys}})\gamma^\nu(\not{k} + \not{p}_2 + M_{\text{phys}})\gamma_5(\not{k} - \not{p}_1 + M_{\text{phys}})\gamma^\mu] = 4iM_{\text{phys}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\rho}p_{2\sigma} \quad (\text{D.38})$$

この $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例した形は式 (5.43) のとおりである．以上より振幅をまとめると以下ようになる．

$$i\mathcal{M} = 8g_{\psi\psi\gamma}g_{\psi\psi V}\hat{g}_{\psi\psi h}^P M_{\text{phys}}\epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu^*(p_2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\rho}p_{2\sigma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \quad (\text{D.39})$$

それぞれの量は以下のように定義してある．

$$\begin{aligned} N_1 &= k^2 - M_{\text{phys}}^2 \\ N_2 &= (k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^2 \\ N_3 &= (k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^2 \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

次にループ積分を実行する．分母を 1 つにまとめると以下ようになる．

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_{\text{phys}}^2)[(k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^2][(k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^2]} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int dx dy dz \frac{2\delta(1 - x - y - z)}{[(k^2 - M_{\text{phys}}^2)x + ((k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^2)y + ((k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^2)z]^3} \quad (\text{D.41}) \\ &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int dx dy dz \delta(1 - x - y - z) \frac{2}{[l - \Delta^{(i)}(p_1, p_2)]^3} \end{aligned}$$

ここでそれぞれの量は以下で与えられる．

$$l \equiv k + (p_2 y - p_1 z) \quad (\text{D.42})$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)}(p_1, p_2) &\equiv (p_2 y - p_1 z)^2 - (p_2^2 y + p_1^2 z) + M_{\text{phys}}^2 \\ &= M_{\text{phys}}^2 - p_2^2 y(1 - y) - 2p_1 \cdot p_2 yz \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

また $\Delta^{(i)}(p_1, p_2)$ の計算では p_1 の on-shell 条件 $p_1^2 = 0$ を用いている．運動量積分を実行すると以下ようになる．

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{\Delta} = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta} \quad (\text{D.44})$$

以上より振幅は以下の形までまとめられる．

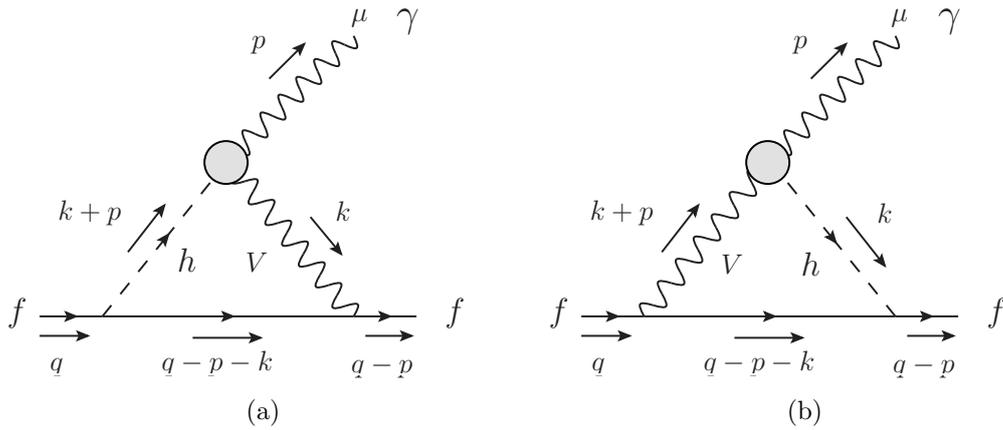
$$i\mathcal{M} = -i \frac{1}{2\pi^2} g_{\psi\psi\gamma} g_{\psi\psi V} \hat{g}_{\psi\psi h}^P \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{\Delta(p_1, p_2)} \quad (\text{D.45})$$

ここで有効頂点は式 (5.41) と同じく以下のように定義する．

$$i\mathcal{M} = i\Gamma_5(p_1, p_2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) p_{1\rho} p_{2\sigma} \quad (\text{D.46})$$

今の場合は以下ようになる．

$$\Gamma_5(p_1, p_2) = -\frac{1}{2\pi^2} g_{\psi\psi\gamma} g_{\psi\psi V} \hat{g}_{\psi\psi h}^P \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{\Delta(p_1, p_2)} \quad (\text{D.47})$$


 図 D.3: 有効頂点を用いてできる 2 つ目のループのダイアグラム．また $V = Z, \gamma$ である．

有効頂点が得られたので，2 つ目のループを計算する．ダイアグラムは図 D.3 に与えられるように 2 つある．まずは (a) のダイアグラムを考えると，振幅は以下ようになる⁴．

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{(a)} &= -i\frac{m_f}{v} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}_f(q-p) (ig_{ffV}^V \gamma^\kappa) \frac{i(\not{q} - \not{p}_1 - \not{k} + m_f)}{(q-p-k)^2 - m_f^2} u_f(q) \\
 &\quad \times \frac{i}{(k+p)^2 - m_h^2} \frac{-ig_{\nu\kappa}}{k^2 - m_V^2} i\Gamma_5(p, k) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho k_\sigma \epsilon_\mu^*(p)
 \end{aligned} \tag{D.48}$$

ここで次のような近似を用いる．

1. 外線運動量 p と q の最低次の項のみを残す．
2. フェルミオンの伝播関数の質量項は無視する．

近似のもとでの伝播関数のテイラー展開は以下ようになる．

$$\frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} 2k_\mu p^\mu + \mathcal{O}(p^2) \tag{D.49}$$

よってこの近似のもとでは振幅は以下ようになる．

$$i\mathcal{M}_{(a)} \simeq \frac{m_f}{v} g_{ffV}^V \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \epsilon_\mu^*(p) \bar{u}_f(q-p) \gamma_\nu \gamma^\kappa u_f(q) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma_5(0, k) k_\sigma k_\kappa}{k^2 (k^2 - m_h^2) (k^2 - m_V^2)} \tag{D.50}$$

ここで k の奇数次は奇関数となり 0 になることを用いている．この近似の下では図 D.3 の 2 つのダイアグラムの寄与は等しくなる．また $k_\mu k_\nu \rightarrow k^2 g_{\mu\nu}/4$ という置換えをすれば，結局振幅は 2 つのダイアグラムを合わせて以下ようになる．

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= i\mathcal{M}_{(a)} + i\mathcal{M}_{(b)} \\
 &= \frac{m_f}{2v} g_{ffV}^V \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \epsilon_\mu^*(p) \bar{u}_f(q-p) \gamma_\nu \gamma_\sigma u_f(q) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma_5^5(0, k)}{(k^2 - m_h^2) (k^2 - m_V^2)} \\
 &= -\frac{m_f}{4\pi^2 v} g_{ffV}^V g_{\psi\psi\gamma} g_{\psi\psi V} \hat{g}_{\psi\psi h}^P \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \epsilon_\mu^*(p) \bar{u}_f(q-p) \gamma_\nu \gamma_\sigma u_f(q) \\
 &\quad \times \int_0^1 dy (1-y) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_h^2) (k^2 - m_V^2) \Delta(0, k)}
 \end{aligned} \tag{D.51}$$

⁴標準模型のフェルミオンのゲージ相互作用における軸性ベクトル相互作用 (g_{ffV}^A に比例する方) は電気双極子モーメントには効かない．

この近似のもとでは $\Delta(0, k)$ は z に依存しないので z 積分を実行した .

残ったループ積分を実行すると以下ようになる .

$$\int_0^1 dy (1-y) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_h^2)(k^2 - m_V^2)\Delta(0, k)} = \frac{i}{32\pi^2 M_{\text{phys}}^2} F_1 \left(\frac{m_V^2}{m_h^2}, \frac{M_{\text{phys}}^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.52})$$

ここでループ関数は式 (5.47) と式 (5.48) で定義されているもので以下のとおりである .

$$F_0(r) = r \int_0^1 dx \frac{1}{r-x(1-x)} \ln \left[\frac{r}{x(1-x)} \right] \quad (\text{D.53})$$

$$F_1(r_1, r_2) = \frac{1}{1-r_1} \left[F_0(r_2) - r_1 F_0 \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right] \quad (\text{D.54})$$

また計算中に以下のような積分を用いた .

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x}{(x+a)(x+b)(x+c)} &= \int_0^\infty dx \frac{1}{a-b} \left[\frac{a}{(x+a)(x+c)} - \frac{b}{(x+b)(x+c)} \right] \\ &= \frac{1}{a-b} \left[\frac{a}{a-c} \ln \frac{a}{c} - \frac{b}{b-c} \ln \frac{b}{c} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

以上より , 振幅は以下ようになる .

$$i\mathcal{M} = -\frac{i}{128\pi^4} \frac{m_f}{v M_{\text{phys}}^2} g_{ffV}^V g_{\psi\psi\gamma} g_{\psi\psi V} \hat{g}_{\psi\psi h}^P \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\mu \epsilon_\nu^*(p) \bar{u}_f(q-p) \gamma_\rho \gamma_\sigma u_f(q) F_1 \left(\frac{m_V^2}{m_h^2}, \frac{M_{\text{phys}}^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.56})$$

これと式 (D.35) の 5 行目をつりあわせることで , 電気双極子モーメントは以下ようになる .

$$d_f^{hV} = \sum_j \frac{1}{64\pi^4} \frac{m_f}{v M_{\text{phys}}^{(j)2}} g_{ffV}^V g_{\psi\psi\gamma} g_{\psi\psi V} \hat{g}_{\psi\psi h}^{P(j)} F_1 \left(\frac{m_V^2}{m_h^2}, \frac{M_{\text{phys}}^{(j)2}}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.57})$$

これを有効理論の $1/\Lambda$ の摂動に注意して $\mathcal{O}(1/\Lambda)$ まで展開する .

$V = \gamma$ のときは以下ようになる .

$$d_f^{h\gamma} = -\frac{|e|^3 Q_f m_f}{64\pi^4 M \Lambda} \sum_j Q_\psi^{(j)2} \left(f_1 - \frac{j}{2} f_2 \right) F_0 \left(\frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.58})$$

ここで $e = -|e|$ であり , ループ関数については以下の関係式を用いた .

$$F_1(0, r) = F_0(r) \quad (\text{D.59})$$

また $Q_\psi^{(j)} = j + Y$ を用いて和を実行すると以下ようになる .

$$\sum_{j=-n}^n (j+Y)^2 = \frac{1}{3} (2n+1) [n(n+1) + 3Y^2] \equiv a_n^{h\gamma(1)} \quad (\text{D.60})$$

$$\sum_{j=-n}^n (j+Y)^2 \frac{j}{2} = \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1)Y \equiv a_n^{h\gamma(2)} \quad (\text{D.61})$$

以上で $Y \neq 0$ の時の $d_f^{h\gamma}$ は以下ようになる .

$$d_f^{h\gamma} = -\frac{|e|^3 m_f Q_f}{64\pi^4 M \Lambda} (a_n^{h\gamma(1)} f_1 - a_n^{h\gamma(2)} f_2) F_0 \left(\frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.62})$$

また $Y = 0$ の場合を求めるには式 (D.58) において $f_1 \rightarrow f, f_2 \rightarrow 0$ として, $Q_\psi^{(j)} = j$ から和を以下のように取る .

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \equiv a_n^{h\gamma} \quad (\text{D.63})$$

すると $Y = 0$ の場合の $d_f^{h\gamma}$ は以下ようになる .

$$d_f^{h\gamma} = -\frac{|e|^3 m_f Q_f}{64\pi^4 M \Lambda} a_n^{h\gamma} f F_0 \left(\frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.64})$$

$V = Z$ のときは以下ようになる .

$$\begin{aligned} d_f^{hZ} &= -\frac{|e|g^2 m_f}{128\pi^4 M \Lambda} (T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W) \\ &\quad \times \sum_j \frac{1}{\cos^2 \theta_W} Q_\psi^{(j)} (T_\psi^3 - Q_\psi^{(j)} \sin^2 \theta_W) \left(f_1 - \frac{j}{2} f_2 \right) F_1 \left(\frac{m_Z^2}{m_h^2}, \frac{M^2}{m_h^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

和を実行すると以下ようになる .

$$\sum_{j=-n}^n (j+Y)(j-Y \tan^2 \theta_W) = \frac{1}{3} (2n+1) [n(n+1) - 3Y^2 \tan^2 \theta_W] \equiv a_n^{hZ(1)} \quad (\text{D.66})$$

$$\sum_{j=-n}^n (j+Y)(j-Y \tan^2 \theta_W) \frac{j}{2} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) Y (1 - \tan^2 \theta_W) \equiv a_n^{hZ(2)} \quad (\text{D.67})$$

以上で $Y \neq 0$ の時の d_f^{hZ} は以下ようになる .

$$d_f^{hZ} = -\frac{|e|g^2 m_f}{128\pi^4 M \Lambda} (T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W) (a_n^{hZ(1)} f_1 - a_n^{hZ(2)} f_2) F_1 \left(\frac{m_Z^2}{m_h^2}, \frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.68})$$

また $Y = 0$ の場合を求めるには式 (D.65) において $f_1 \rightarrow f, f_2 \rightarrow 0$ として, $Q_\psi^{(j)} = j$ から和を以下のように取る .

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \equiv a_n^{hZ} \quad (\text{D.69})$$

すると $Y = 0$ の場合の d_f^{hZ} は以下ようになる .

$$d_f^{hZ} = -\frac{|e|g^2 m_f}{128\pi^4 M \Lambda} (T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W) a_n^{hZ} f F_1 \left(\frac{m_Z^2}{m_h^2}, \frac{M^2}{m_h^2} \right) \quad (\text{D.70})$$

D.4 d_f^{WW} の計算

ここでは d_f^{WW} の計算を行う . 用いるラグランジアンは付録 D.1 のカイラル変換していないラグランジアンを用いる . またここでの計算はダウン型のフェルミオンに対する電気双極子モーメントを仮定している . さらに計算の中では文献 [178–180] を参考にした .

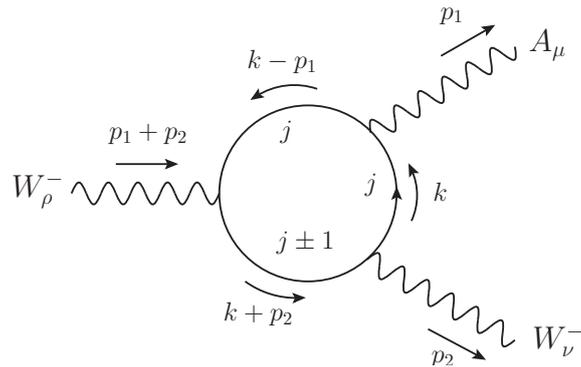


図 D.4: $W^- \rightarrow W^- \gamma$ の寄与 . ループの中の $j, j \pm 1$ は回っている粒子の質量が $m^{(j)}$ や $m^{(j \pm 1)}$ であることを表す .

D.4.1 1 つ目のループ

まずは 1 つ目のループを計算する .

$W^- \rightarrow W^- \gamma$ の寄与

$W^- \rightarrow W^- \gamma$ の寄与は図 D.4 で与えられる . このダイアグラムの振幅は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{W^- \rightarrow W^- \gamma} &= \sum_j (ig_{\psi\psi W}^{(j)})^2 (ig_{\psi\psi\gamma}^{(j)}) \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \epsilon_\rho(q) (i)^3 (-1) \\
 &\quad \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2}) [(k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2}] [(k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^{(j-1)2}]} \\
 &\quad \times \text{Tr} \left[(\not{k} + m_R^{(j)} - im_I^{(j)} \gamma_5) \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + m_R^{(j-1)} - im_I^{(j-1)} \gamma_5) \gamma^\rho (\not{k} - \not{p}_1 + m_R^{(j)} - im_I^{(j)} \gamma_5) \gamma^\mu \right] \\
 &\quad + \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, m^{(j-1)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, m^{(j+1)} \right]
 \end{aligned} \tag{D.71}$$

式 (5.43) で議論したように今必要なのは $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例している項であり , トレースの中で $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する項は以下ようになる .

$$\text{Tr}[\dots] \ni 4(m_R^{(j)} m_I^{(j-1)} - m_I^{(j)} m_R^{(j-1)}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\sigma} \tag{D.72}$$

よって $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する振幅は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{W^- \rightarrow W^- \gamma} |_\epsilon &= +4 \sum_j g_{\psi\psi\gamma}^{(j)} (g_{\psi\psi W}^{(j)})^2 (m_R^{(j)} m_I^{(j-1)} - m_I^{(j)} m_R^{(j-1)}) \\
 &\quad \times \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\sigma} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \epsilon_\rho(q) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\
 &\quad + \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, m^{(j-1)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, m^{(j+1)} \right]
 \end{aligned} \tag{D.73}$$

ここで $|\epsilon$ の記号は $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例している項を意味する．また分母は以下のように定義されている．

$$N_1 = k^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2} \quad (\text{D.74})$$

$$N_2 = (k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2} \quad (\text{D.75})$$

$$N_3 = (k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^{(j-1)2} \quad (\text{D.76})$$

運動量積分を以下のように実行する．

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2}) [(k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2}] [(k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^{(j-1)2}]} \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int dx dy dz \frac{2\delta(1 - x - y - z)}{[(k^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2})x + [(k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^{(j)2}]y + [(k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^{(j-1)2}]z]^3} \\ &= \int dx dy dz \delta(1 - x - y - z) \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{2}{[l^2 - \Delta]^3} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-i}{16\pi^2} \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

ここでそれぞれの量は以下のように定義されている．

$$l \equiv k - (yp_1 - zp_2) \quad (\text{D.78})$$

$$\Delta^{(j)}(p_1, p_2) \equiv (yp_1 - zp_2)^2 - yp_1^2 - zp_2^2 + (1 - z)M_{\text{phys}}^{(j)2} + zM_{\text{phys}}^{(j-1)2} \quad (\text{D.79})$$

この振幅は以下のような有効演算子に対応している⁵．

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \Gamma^{WW\gamma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\mu^+ W_\nu^- F_{\rho\sigma} \quad (\text{D.81})$$

ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり，係数 $\Gamma^{WW\gamma}$ を有効頂点と呼ぶ．図 D.4 と同じように運動量を割り当てた時，この有効ラグランジアンから得られる振幅は以下ようになる．

$$i\mathcal{M} = i\Gamma^{WW\gamma}(p_1, p_2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \epsilon_\rho(q) p_{1\sigma} \quad (\text{D.82})$$

これより有効頂点は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \Gamma^{WW\gamma}(p_1, p_2) &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_j g_{\psi\psi\gamma}^{(j)} (g_{\psi\psi W}^{(j)})^2 (m_R^{(j)} m_I^{(j-1)} - m_I^{(j)} m_R^{(j-1)}) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{\Delta(p_1, p_2)} \\ &\quad + \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, m^{(j-1)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, m^{(j+1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

$W^- \rightarrow \phi^- \gamma$

$W^- \rightarrow \phi^- \gamma$ のダイアグラムは図 D.5 で与えられる．このダイアグラムの振幅は以下のように ${}^5 d_f^{\gamma}$ と $d_f^{\gamma Z}$ の計算と同様の方法で簡単に有効頂点を定義しないのは今の場合内線を飛ぶの W ボソンの符号によって全体の符号が変わるためである．ちなみにこの有効演算子は $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 不変に書くと以下ようになる．

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} C \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\nu \Phi) F_{\rho\sigma} \quad (\text{D.80})$$

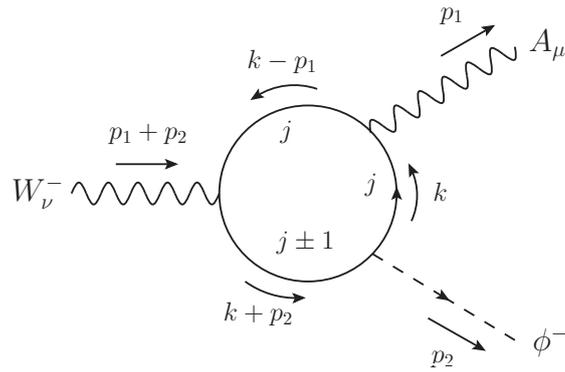


図 D.5: $W^- \rightarrow \phi^- \gamma$ の寄与 . ループの中の $j, j \pm 1$ は回っている粒子の質量が $m^{(j)}$ や $m^{(j \pm 1)}$ であることを表す .

なる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{W^- \rightarrow \phi^- \gamma} &= \sum_j (ig_{\psi\psi W}^{(j)})(ig_{\psi\psi\phi^+}^{(j)})(ig_{\psi\psi\gamma}^{(j)})\epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu(q)(i)^3(-1) \\
 &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\
 &\times \text{Tr} \left[(\not{k} + m_R^{(j)} - im_I^{(j)}\gamma_5)(g_2 + i\gamma_5 f_2)(\not{k} + \not{p}_2 + m_R^{(j-1)} - im_I^{(j-1)}\gamma_5)\gamma^\nu \right. \\
 &\quad \left. \times (\not{k} - \not{p}_1 + m_R^{(j)} - im_I^{(j)}\gamma_5)\gamma^\mu \right] \\
 &+ \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, g_{\psi\psi W^+}^{(j)}, m^{(j-1)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, g_{\psi\psi\phi^+}^{(j+1)}, m^{(j+1)} \right]
 \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

ここで N_1, N_2, N_3 は式 (D.74)-(D.76) で定義されているものと同じである . トレースの中で $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に比例する項は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\dots] &\ni 4 \left[\left\{ -f_2(m_R^{(j)} - m_R^{(j-1)}) + g_2(m_I^{(j)} - m_I^{(j-1)}) \right\} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho p_{1\sigma} \right. \\
 &\quad \left. + (f_2 m_R^{(j)} - g_2 m_I^{(j)}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \right]
 \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

よって振幅は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{W^- \rightarrow \phi^- \gamma}|_\epsilon &= 4 \sum_j g_{\psi\psi\gamma}^{(j)} g_{\psi\psi W}^{(j)} g_{\psi\psi\phi^+}^{(j)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\
 &\times \left[\left\{ -f_2(m_R^{(j)} - m_R^{(j-1)}) + g_2(m_I^{(j)} - m_I^{(j-1)}) \right\} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho p_{1\sigma} \right. \\
 &\quad \left. + (f_2 m_R^{(j)} - g_2 m_I^{(j)}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \right] \epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu(q) \\
 &+ \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, g_{\psi\psi W^+}^{(j)}, m^{(j-1)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, g_{\psi\psi\phi^+}^{(j+1)}, m^{(j+1)} \right]
 \end{aligned} \quad (\text{D.86})$$

この有効ラグランジアンには $W^- \rightarrow \phi^- \gamma$ の有効演算子も含まれている . ゲージ場の異常結合については文献 [181] が参考になる .

ここで

$$m_R^{(j)} - m_R^{(j-1)} = -\frac{g_2}{2} \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (\text{D.87})$$

$$m_I^{(j)} - m_I^{(j-1)} = -\frac{f_2}{2} \frac{v^2}{2\Lambda} \quad (\text{D.88})$$

より以下の関係式が成り立つ .

$$f_2(m_R^{(j)} - m_R^{(j-1)}) - g_2(m_I^{(j)} - m_I^{(j-1)}) = 0 \quad (\text{D.89})$$

この振幅は以下のような有効演算子に対応している .

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \Gamma^{W\phi\gamma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [(\partial_\mu \phi^-) W_\nu^+ - (\partial_\mu \phi^+) W_\nu^-] F_{\rho\sigma} \quad (\text{D.90})$$

図 D.5 と同じように運動量を割り当てた時 , この有効ラグランジアンから得られる振幅は以下のようになる .

$$i\mathcal{M} = \Gamma^{W\phi\gamma}(p_1, p_2) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu(q) p_{1\rho} p_{2\sigma} \quad (\text{D.91})$$

これより有効頂点は以下のようになる .

$$\begin{aligned} \Gamma^{W\phi\gamma}(p_1, p_2) = & -\frac{i}{4\pi^2} \sum_j g_{\psi\psi\gamma}^{(j)} g_{\psi\psi W}^{(j)} g_{\psi\psi\phi^+}^{(j)} (f_2 m_R^{(j)} - g_2 m_I^{(j)}) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{\Delta(p_1, p_2)} \\ & + \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, g_{\psi\psi W^+}^{(j)}, m^{(j-1)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, g_{\psi\psi\phi^+}^{(j+1)}, m^{(j+1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.92})$$

また $\phi^- \rightarrow W^- \gamma$ のダイアグラムは式 (D.90) の有効演算子に含まれているので計算しなくて良い .

D.4.2 2つ目のループ

続いて2つ目のループを計算する . ここではゲージ依存性がダイアグラム間で相殺することをあらわに見るため R_ξ ゲージを用いる [182] . R_ξ ゲージでの W ボソンの伝搬関数は以下で与えられる .

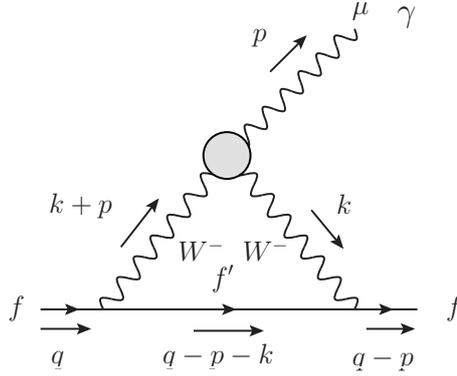
$$\frac{-i}{p^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \xi m_W^2} \right) = \frac{-i}{p^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m_W^2} \right) - \frac{i}{p^2 - \xi m_W^2} \frac{p_\mu p_\nu}{m_W^2} \quad (\text{D.93})$$

ここで右辺は第 1 項が物理的モードに対応していて , 第 2 項が非物理的モードに対応している .

$W^- \rightarrow W^- \gamma$

有効頂点 $\Gamma^{WW\gamma}$ を用いて作られるダイアグラムは図 D.6 で与えられ , 振幅は以下のようになる ⁶ .

⁶振幅の最終表式が式 (D.35) となるので運動量の割り当てを p を使わず q と $q' = q - p$ のみにした方が計算が簡単になるかもしれない .


 図 D.6: $W^- \rightarrow W^- \gamma$ の寄与の 2 つ目のループのダイアグラム .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{WW\gamma} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}_f(q-p) \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha P_L \right) \frac{i(\not{q} - \not{p} - \not{k} + m_{f'})}{(q-p-k)^2 - m_{f'}^2} \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\beta P_L \right) u_f(q) \\
 &\times \left[\frac{-i}{(k+p)^2 - m_W^2} \left(g_{\beta\rho} - \frac{(k+p)_\beta(k+p)_\rho}{m_W^2} \right) - \frac{i}{(k+p)^2 - \xi m_W^2} \frac{(k+p)_\beta(k+p)_\rho}{m_W^2} \right] \\
 &\times \left[\frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g_{\alpha\nu} - \frac{k_\alpha k_\nu}{m_W^2} \right) - \frac{i}{k^2 - \xi m_W^2} \frac{k_\alpha k_\nu}{m_W^2} \right] i\Gamma^{WW\gamma}(p, k) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \epsilon_\mu^*(p)
 \end{aligned} \tag{D.94}$$

ここで次のような近似を用いる .

1. 外線運動量 p と q の最低次の項のみを残す . ただし今の場合 , 頂点で外線のフェルミオンの質量 m_f を拾っていないのでディラック方程式 $\not{q}u_f(q) = m_f u_f(q)$ を用いてフェルミオンの質量を得る . そのため q, p の 1 次は残す .
2. フェルミオンの伝播関数の質量項は無視する .

例えば伝播関数のテイラー展開は以下の形まで実行する .

$$\frac{\not{q} - \not{p} - \not{k}}{(q-p-k)^2 - m_{f'}} \simeq -\frac{\not{k}}{k^2} + \frac{\not{q} - \not{p}}{k^2} - \frac{2\not{k}k \cdot (q-p)}{k^4} + \mathcal{O}((q-p)^2) \tag{D.95}$$

同様に $1/\Delta(p, k)$ も以下のようにテイラー展開できる .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta^{(j)}(p, k)} &= \frac{1}{(yp - zk)^2 - zk^2 + (1-z)M_{\text{phys}}^{(j)2} + zM_{\text{phys}}^{(j-1)2}} \\
 &\simeq \frac{1}{\Delta^{(i)}(0, k)} + \frac{2yzk \cdot p}{(\Delta^{(i)}(0, k))^2}
 \end{aligned} \tag{D.96}$$

すると振幅は以下の形まで式変形できる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{WW\gamma} &= -i \frac{g^2 m_f}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma^{WW\gamma}(0, k) \left[\frac{1}{k^2(k^2 - m_W^2)} - \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)} \right] \\
 &\times \bar{u}_f(q-p) \gamma_5 u_f(q) q \cdot \epsilon^*(p)
 \end{aligned} \tag{D.97}$$

ここで計算の途中では on-shell 条件やディラック方程式や以下のような関係式を用いた .

$$\bar{u}_f(q-p) \gamma_\nu \not{q} \gamma_\rho P_L u_f(q) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \epsilon_\mu^*(p) = -2im_f \bar{u}_f(q-p) \gamma_5 u_f(q) q \cdot \epsilon^* \tag{D.98}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = g_{\mu\nu} \gamma_\rho - g_{\mu\rho} \gamma_\nu + g_{\nu\rho} \gamma_\mu + i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\sigma \gamma_5 \quad (\text{D.99})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \quad (\text{D.100})$$

また, $1/\Lambda$ の摂動に注意して $\mathcal{O}(1/\Lambda)$ まで展開する. この時, 質量の組み合わせは以下のようになる.

$$m_R^{(j)} m_I^{(j-1)} - m_I^{(j)} m_R^{(j-1)} = \frac{1}{2} M f_2 \frac{v^2}{2\Lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \quad (\text{D.101})$$

これから振幅は以下の形まで変形できる.

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{WW\gamma} &= i \frac{g^2 m_f M f_2 v^2}{32\pi^2 m_W^2 \Lambda} \sum_j g_{\psi\psi\gamma}^{(j)} (g_{\psi\psi W}^{(j)})^2 \int_0^1 dz (1-z) \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2(k^2 - m_W^2)} - \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)} \right] \frac{1}{\Delta(0, k)} \\ &\times \bar{u}_f(q-p) \gamma_5 u_f(q) q \cdot \epsilon^*(p) \\ &+ \left[g_{\psi\psi W}^{(j)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.102})$$

ここで $\Delta(0, k) = -z(1-z)k^2 + M^2$ である. さらに結合定数を具体的に書き, $m_W = gv/2$ を用いれば振幅は以下のようになる.

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{WW\gamma} &= i \frac{eg^2 m_f M f_2}{16\pi^2 \Lambda} \sum_j Q_\psi^{(j)} [2n(n+1) - j(j-1) - j(j+1)] \int_0^1 dz (1-z) \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2(k^2 - m_W^2)} - \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)} \right] \frac{1}{\Delta(0, k)} \\ &\times \bar{u}_f(q-p) \gamma_5 u_f(q) q \cdot \epsilon^*(p) \end{aligned} \quad (\text{D.103})$$

ここで式 (D.35) の 4 行目とこの振幅をつり合わせれば電気双極子モーメントが得られ以下のようになる.

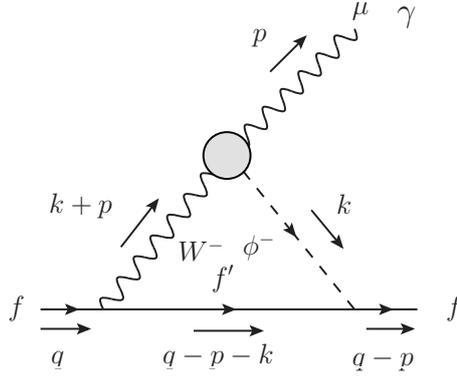
$$\begin{aligned} d_f^{WW\gamma} &= -i \frac{eg^2 m_f M f_2}{32\pi^2 \Lambda} \sum_j Q_\psi^{(j)} [2n(n+1) - 2j^2] \int_0^1 dz (1-z) \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2(k^2 - m_W^2)} - \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)} \right] \frac{1}{\Delta(0, k)} \end{aligned} \quad (\text{D.104})$$

$W^- \rightarrow \phi^- \gamma$

R_ξ ゲージでのゴールドストーンボソン ϕ^\pm の伝搬関数は以下で与えられる.

$$\frac{i}{p^2 - \xi m_W^2} \quad (\text{D.105})$$

有効頂点 $\Gamma^{W\phi\gamma}$ を用いて作られるダイアグラムは図 D.7 で与えられ, 振幅は以下のようになる.


 図 D.7: $W^- \rightarrow \phi^- \gamma$ の寄与の 2 つ目のループのダイアグラム .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{W\phi\gamma} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}_f(q-p) \left(\frac{\sqrt{2}}{v} m_f P_L \right) \frac{i(\not{q} - \not{p} - \not{k} + m_{f'})}{(q-p-k)^2 - m_{f'}^2} \left(i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha P_L \right) u_f(q) \\
 &\times \left[\frac{-i}{(k+p)^2 - m_W^2} \left(g_{\alpha\nu} - \frac{(k+p)_\alpha (k+p)_\nu}{m_W^2} \right) - \frac{i}{(k+p)^2 - \xi m_W^2} \frac{(k+p)_\alpha (k+p)_\nu}{m_W^2} \right] \\
 &\times \frac{i}{k^2 - \xi m_W^2} \Gamma^{W\phi\gamma}(p, k) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho k_\sigma \epsilon_\mu^*(p)
 \end{aligned} \tag{D.106}$$

$\Gamma^{WW\gamma}$ の時と同様に次のような近似を用いる .

1. 外線運動量 p と q の最低次の項のみを残す .
2. フェルミオンの伝播関数の質量項は無視する .

この近似の下ではこの振幅は以下ようになる .

$$i\mathcal{M}^{W\phi\gamma} = \frac{gm_f}{2v} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma(0, k) \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)} \bar{u}_f(q-p) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 P_L u_f(q) p_\mu \epsilon_\nu^*(p) \tag{D.107}$$

また, $1/\Lambda$ の摂動に注意して $\mathcal{O}(1/\Lambda)$ まで展開する . この時, 質量の組み合わせは以下になる .

$$f_2 m_R^{(j)} - g_2 m_I^{(j)} = f_2 M + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \tag{D.108}$$

これより振幅は以下のようにできる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{W\phi\gamma} &= -i \frac{gm_f M f_2}{8\pi^2 v} \sum_j g_{\psi\psi\gamma}^{(j)} g_{\psi\psi W}^{(j)} g_{\psi\psi\phi^+}^{(j)} \int_0^1 dz (1-z) \\
 &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2) \Delta(0, k)} \bar{u}_f(q-p) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 P_L u_f(q) p_\mu \epsilon_\nu^*(p) \\
 &+ \left[g_{\psi\psi W}^{(j)}, g_{\psi\psi W^+}^{(j)} \rightarrow g_{\psi\psi W}^{(j+1)}, g_{\psi\psi\phi^+}^{(j+1)} \right]
 \end{aligned} \tag{D.109}$$

ここで $\Delta(0, k) = -z(1-z)k^2 + M^2$ である . さらに結合定数を具体的に書き下すと振幅は以下になる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{W\phi\gamma} &= \frac{eg^2m_fMf_2}{32\pi^2\Lambda} \sum_j Q_\psi^{(j)} [2n(n+1) - 2j^2] \int_0^1 dz (1-z) \\
 &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)\Delta(0, k)} \bar{u}_f(q-p)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 P_L u_f(q) p_\mu \epsilon_\nu^*(p)
 \end{aligned} \tag{D.110}$$

これと式 (D.35) の 2 行目の振幅をつり合わせれば電気双極子モーメントは以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
 d_f^{W\phi\gamma} &= -i \frac{eg^2m_fMf_2}{64\pi^2\Lambda} \sum_j Q_\psi^{(j)} [2n(n+1) - 2j^2] \\
 &\times \int_0^1 dz (1-z) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - \xi m_W^2)\Delta(0, k)}
 \end{aligned} \tag{D.111}$$

$\phi^- \rightarrow W^- \gamma$

有効頂点 $\Gamma^{\phi W\gamma}$ を用いてできるダイアグラムの振幅は式 (D.110) の P_L を P_R に置き換えたものと等しいため、電気双極子モーメントは以下ようになる。

$$d_f^{\phi W\gamma} = d_f^{W\phi\gamma} \tag{D.112}$$

D.4.3 d_f^{WW} の計算

以上より全ての寄与を足すとゲージパラメータ ξ に依存する項は相殺し、電気双極子モーメントは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 d_f^{WW} &= d_f^{WW\gamma} + d_f^{W\phi\gamma} + d_f^{\phi W\gamma} \\
 &= -i \frac{eg^2m_fMf_2}{32\pi^2\Lambda} \sum_j Q_\psi^{(j)} [2n(n+1) - 2j^2] \int_0^1 dz (1-z) \\
 &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k^2 - m_W^2)\Delta(0, k)}
 \end{aligned} \tag{D.113}$$

ループ積分を実行してやると以下ようになる。

$$\int_0^1 dz (1-z) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k^2 - m_W^2)\Delta(0, k)} = \frac{i}{32\pi^2 M^2} F_0 \left(\frac{M^2}{m_W^2} \right) \tag{D.114}$$

また和を実行してやると以下ようになる。

$$\sum_{j=-n}^n (j+Y)[2n(n+1) - 2j^2] = \frac{4}{3} n(n+1)(2n+1)Y \equiv a_n^{WW} \tag{D.115}$$

以上よりダウン型のフェルミオンに対する電気双極子モーメントは以下ようになる。

$$d_f^{WW} = -\frac{|e|g^2m_f}{1024\pi^4 M\Lambda} a_n^{WW} f_2 F_0 \left(\frac{M^2}{m_W^2} \right) \tag{D.116}$$

ここで $e = -|e|$ を用いた．アップ型のフェルミオンに対する電気双極子モーメントは符号が変わるだけなので⁷ 両方をまとめて以下ようになる．

$$d_f^{WW} = \frac{|e|g^2 m_f T_f^3}{512\pi^4 M\Lambda} a_n^{WW} f_2 F_0 \left(\frac{M^2}{m_W^2} \right) \quad (\text{D.118})$$

D.5 $h \rightarrow \gamma\gamma$ のシグナルストレングスの計算

ここでは図 5.6 のダイアグラムを直接計算する．このダイアグラムは電気双極子モーメントの 1 つ目のループと同じで，図 D.2 で与えられる． $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊には暗黒物質の多重項とヒッグス粒子の相互作用は CP を保つものと破るものの両方を用いる．以下の計算では $Y \neq 0$ であり，付録 D.2 で与えられているカイラル変換をして γ_5 質量項消した後のラグランジアンを用いる．これらのダイアグラムから得られる振幅は以下ようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \sum_j (ig_{\psi\psi\gamma})^2 (-1) \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) (i)^3 \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M_{\text{phys}}^2)[(k - p_1)^2 - M_{\text{phys}}^2][(k + p_2)^2 - M_{\text{phys}}^2]} \\ &\times \left(\text{Tr}[(\not{k} + M_{\text{phys}})\gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + M_{\text{phys}})(-i\hat{g}_{\psi\psi h}^S + \hat{g}_{\psi\psi h}^P \gamma_5)(\not{k} - \not{p}_1 + M_{\text{phys}})\gamma^\mu] \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}[(\not{k} + M_{\text{phys}})\gamma^\mu (-\not{k} + \not{p}_1 + M_{\text{phys}})(-i\hat{g}_{\psi\psi h}^S + \hat{g}_{\psi\psi h}^P \gamma_5)(-\not{k} - \not{p}_2 + M_{\text{phys}})\gamma^\nu] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.119})$$

電気双極子モーメントの時と同じように 2 つのダイアグラムの寄与は等しい． γ_5 に比例した項のトレースは式 (D.38) で計算したのでここでは γ_5 に比例していない項のトレースを求めると以下のようになる．

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[(\not{k} + M_{\text{phys}})\gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + M_{\text{phys}})(\not{k} - \not{p}_1 + M_{\text{phys}})\gamma^\mu] \\ &= 4M_{\text{phys}} \left[4k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu} + 2k^\mu p_2^\nu - 2p_1^\mu k^\nu - p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} + M_{\text{phys}}^2 g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.120})$$

よって振幅をまとめると以下のようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -8g_{\psi\psi\gamma}^2 M_{\text{phys}} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\ &\times \left[\hat{g}_{\psi\psi h}^S (4k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu} + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} + M_{\text{phys}}^2 g^{\mu\nu}) - \hat{g}_{\psi\psi h}^P \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.121})$$

ここで 2 つの光子は on-shell なので p_1^μ と p_2^ν に比例する項は落とした．また分母は式 (D.40) で定義されている．次に式 (D.41) と同じように分母を 1 つにまとめてやると以下のようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -16g_{\psi\psi\gamma}^2 M_{\text{phys}} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} \\ &\times \left(\hat{g}_{\psi\psi h}^S \left[\left(\frac{4}{D} - 1 \right) l^2 g^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} \right] - \hat{g}_{\psi\psi h}^P \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.122})$$

⁷これは次のように理解できる．例えば W - W - γ の有効ラグランジアンは式 (D.81) で見たように以下の形で与えられている．

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} C \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\mu^+ W_\nu^- F_{\rho\sigma} \quad (\text{D.117})$$

ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である．外線のフェルミオンがアップ型かダウン型かで内線に飛ぶ W ボソンの電荷が変わるのでその符号によって W_μ^+ と W_ν^- のどちらと縮約を取るかが変わり μ, ν の足が入れ替わるのでマイナスが付く．

ここで光子の on-shell 条件を用いた．また $l^{\mu\nu} \rightarrow l^2 g^{\mu\nu}/D$ の置き換えも行った．その他の量は以下で与えられている．

$$\Delta(p_1, p_2) = M_{\text{phys}}^2 - 2p_1 \cdot p_2 yz \quad (\text{D.123})$$

$$A^{\mu\nu} = p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} - 4p_2^\mu p_1^\nu yz + 2(p_1 \cdot p_2) yz + M_{\text{phys}}^2 g^{\mu\nu} \quad (\text{D.124})$$

運動量積分を実行してやれば以下のようになる．

$$i\mathcal{M} = -\frac{i}{2\pi^2} g_{\psi\psi\gamma}^2 M_{\text{phys}} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{\Delta} \left[\hat{g}_{\psi\psi h}^S (1 - 4yz) P^{\mu\nu} + \hat{g}_{\psi\psi h}^P \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \right] \quad (\text{D.125})$$

ここで $P^{\mu\nu} \equiv -p_2^\mu p_1^\nu + (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}$ である．ファインマンパラメータ積分を実行してやれば，振幅は以下のようになる．

$$i\mathcal{M} = -i g_{\psi\psi\gamma}^2 \frac{M_{\text{phys}}}{\pi^2 m_h^2} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \left[\hat{g}_{\psi\psi h}^S (1 + (1 - \tau_\psi) f(\tau_\psi)) P^{\mu\nu} + \hat{g}_{\psi\psi h}^P f(\tau_\psi) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \right] \quad (\text{D.126})$$

ここでヒッグス粒子の on-shell 条件 $m_h^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2(p_1 \cdot p_2)$ を用いた．また $\tau_\psi \equiv 4M_{\text{phys}}^2/m_h^2$ であり， $t > 1$ の時のループ関数 $f(t)$ は以下で定義されている [183]．

$$f(t) \equiv -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{x} \ln \left[1 - \frac{4}{t} x(1-x) - i\epsilon \right] = \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 \quad (\text{D.127})$$

このループ関数の積分の詳細は付録 D.6 で行っている．この振幅を式 (4.17) の振幅とつり合わせてやれば，式 (4.19) よりシグナルストレングスがどのように変化するかがわかる．ここではシグナルストレングスを以下のようにパラメトライズする．

$$\mu_{\gamma\gamma} = \left| 1 - \frac{G_R}{\mathcal{A}_{\text{SM}}} \right|^2 + \left| \frac{G_I}{\mathcal{A}_{\text{SM}}} \right|^2 \quad (\text{D.128})$$

ここで $\mathcal{A}_{\text{SM}} = 6.49$ は標準模型の振幅であり，式 (4.12) で定義されている． G_R と G_I は以下のようになる．

$$G_R = \sum_j 8v Q_\psi^{(j)2} \hat{g}_{\psi\psi h}^{S(j)} \frac{M_{\text{phys}}^{(j)}}{m_h^2} (1 + (1 - \tau_\psi) f(\tau_\psi)) \quad (\text{D.129})$$

$$G_I = -\sum_j 8v Q_\psi^{(j)2} \hat{g}_{\psi\psi h}^{P(j)} \frac{M_{\text{phys}}^{(j)}}{m_h^2} f(\tau_\psi) \quad (\text{D.130})$$

ここでループ関数は $f(x)$ は式 (D.127) で定義されているものである．これを $1/\Lambda$ の摂動に注意して具体的に書き下すと $Y = 0$ のときは以下のようになる．

$$G_R = \frac{8Mv^2}{m_h^2 \Lambda} (1 + (1 - \tau_\psi) f(\tau_\psi)) a_n^{h\gamma} g \quad (\text{D.131})$$

$$G_I = -\frac{8Mv^2}{m_h^2 \Lambda} f(\tau_\psi) a_n^{h\gamma} f \quad (\text{D.132})$$

ここで $\tau_\psi = 4M^2/m_h^2$ であり, $a_n^{h\gamma}$ は式 (D.63) で定義されているものである. $Y \neq 0$ のときは以下ようになる.

$$G_R = \frac{8Mv^2}{m_h^2\Lambda} (1 + (1 - \tau_\psi)f(\tau_\psi))(a_n^{h\gamma(1)}g_1 - a_n^{h\gamma(2)}g_2) \quad (\text{D.133})$$

$$G_I = -\frac{8Mv^2}{m_h^2\Lambda} f(\tau_\psi)(a_n^{h\gamma(1)}f_1 - a_n^{h\gamma(2)}f_2) \quad (\text{D.134})$$

ここで $a_n^{h\gamma(1)}$ と $a_n^{h\gamma(2)}$ は式 (D.60) と式 (D.61) で定義されている.

また $\tau_\psi \rightarrow \infty$ とみなせるときには式 (4.10) より G_R と G_I は以下ようになる.

$$G_R = \sum_j \frac{4Q_\psi^{(j)2}v}{3M_{\text{phys}}^{(j)}} \hat{g}_{\psi\psi h}^{S(j)} \quad (\text{D.135})$$

$$G_I = -\sum_j \frac{2Q_\psi^{(j)2}v}{M_{\text{phys}}^{(j)}} \hat{g}_{\psi\psi h}^{P(j)} \quad (\text{D.136})$$

このときは $Y = 0$ の場合には以下のようになり,

$$G_R = \frac{4v^2}{3M\Lambda} a_n^{h\gamma} g \quad (\text{D.137})$$

$$G_I = -\frac{v^2}{3M\Lambda} a_n^{h\gamma} f \quad (\text{D.138})$$

$Y \neq 0$ の場合は以下のようになる.

$$G_R = \frac{4v^2}{3M\Lambda} (a_n^{h\gamma(1)}g_1 - a_n^{h\gamma(2)}g_2) \quad (\text{D.139})$$

$$G_I = -\frac{2v^2}{M\Lambda} (a_n^{h\gamma(1)}f_1 - a_n^{h\gamma(2)}f_2) \quad (\text{D.140})$$

D.6 $h \rightarrow \gamma\gamma$ のループ関数

ここでは $h \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊にあらわれるループ積分を詳細に実行する. 積分の出発点は以下の積分である.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{1}{x} \ln[1 - 4a^2x(1-x) - i\epsilon] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{x} \ln[1 - 4a^2x(1-x)] + \frac{1}{2} \int_0^1 dy \frac{1}{1-y} \ln[1 - 4a^2y(1-y)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{x(1-x)} \ln[1 - 4a^2x(1-x)] \\ &\equiv I(a) \end{aligned} \quad (\text{D.141})$$

ここで

$$I(-a) = I(a) \quad (\text{D.142})$$

より $a > 0$ のみを考えれば良い．また $I(0) = 0$ より以下の関係式が成り立つ．

$$I(a) = \int_0^a da' \frac{d}{da'} I(a') \quad (\text{D.143})$$

よって $I(a)$ の微分を考える．微分を実行すると以下ようになる．

$$\frac{d}{da} I(a) = -\frac{1}{a} \int_0^1 dx \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4a^2} - i\epsilon} \quad (\text{D.144})$$

ここで

$$x^2 - x + \frac{1}{4a^2} - i\epsilon = 0 \quad (\text{D.145})$$

の解は以下で与えられる．

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2}} \quad (\text{D.146})$$

この解は以下の関係式がなりたつ．

$$1 - x_{\pm} = x_{\mp} \quad (\text{D.147})$$

ルートの中身で場合分けをする．

$0 < a < 1$ の場合

x_{\pm} は以下ようになる．

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm i \sqrt{\frac{1 - a^2}{a^2}} \right) = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2a} \sqrt{1 - a^2} \quad (\text{D.148})$$

積分を実行すると以下ようになる．

$$\frac{d}{da} I(a) = -\frac{1}{a} \int_0^1 dx \frac{1}{(x - x_+)(x - x_-)} = -\frac{1}{a} \frac{1}{x_+ - x_-} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x - x_+} - \frac{1}{x - x_-} \right] \quad (\text{D.149})$$

この積分区間には実軸上に極が存在しないのでそのまま積分できる．積分を実行すると以下のようにになる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} I(a) &= -\frac{1}{a} \frac{1}{x_+ - x_-} \left[\ln \frac{1 - x_+}{-x_+} - \ln \frac{1 - x_-}{-x_-} \right] \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{x_+ - x_-} \ln \frac{x_+^2}{x_-^2} \\ &= -\frac{4}{\sqrt{1 - a^2}} \arcsin(a) \end{aligned} \quad (\text{D.150})$$

これを積分すると以下のようにになる．

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a da' \frac{d}{da'} I(a') \\ &= -4 \int_0^a da' \frac{1}{\sqrt{1 - a'^2}} \arcsin(a') \\ &= -4 \int_0^a da' \left(\frac{d}{da'} \arcsin(a') \right) \arcsin(a') \\ &= -2(\arcsin(a))^2 \end{aligned} \quad (\text{D.151})$$

$a > 1$ の場合

x_{\pm} は以下ようになる .

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(\frac{1}{4a^2} - i\epsilon \right)} \right) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{a^2 - 1} \pm i\epsilon \quad (\text{D.152})$$

ここで $0 < x_{\pm} < 1$ より積分区間の実軸上に極があるため以下の公式を用いる .

$$\frac{1}{x - a \pm i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{x - a} \mp i\pi\delta(x - a) \quad (\text{D.153})$$

ここで P はコーシーの主値を表す . またこの式は積分中でのみ意味があることに注意する . コーシーの主値の定義は以下のとおりである .

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x - a} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon} dx \frac{1}{x - a} + \int_{a+\epsilon}^{\infty} dx \frac{1}{x - a} \right] \quad (\text{D.154})$$

これを用いると以下ようになる .

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} I(a) &= -\frac{1}{a} \frac{1}{x_+ - x_-} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x - x_+} - \frac{1}{x - x_-} \right] \\ &= -\frac{1}{a} \frac{1}{x_+ - x_-} \left[\ln \frac{1 - x_+}{-x_+} + i\pi - \left(\ln \frac{1 - x_-}{-x_-} - i\pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{x_+ - x_-} \left[\ln \frac{x_+^2}{x_-^2} - 2i\pi \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 1/a^2}}{1 - \sqrt{1 - 1/a^2}} - i\pi \right] \end{aligned} \quad (\text{D.155})$$

これを積分すると以下ようになる .

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a da' \frac{d}{da'} I(a') \\ &= \int_0^a da' \left[\frac{d}{da'} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 1/a'^2}}{1 - \sqrt{1 - 1/a'^2}} - i\pi \right) \right] \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 1/a'^2}}{1 - \sqrt{1 - 1/a'^2}} - i\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 1/a'^2}}{1 - \sqrt{1 - 1/a'^2}} - i\pi \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.156})$$

結果をまとめると以下ようになる .

$$\int_0^1 dx \frac{1}{x} \ln[1 - 4a^2 x(1 - x) - i\epsilon] = \begin{cases} -2(\arcsin(a))^2 & \text{for } 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - 1/a^2}}{1 - \sqrt{1 - 1/a^2}} - i\pi \right)^2 & \text{for } a > 1 \end{cases} \quad (\text{D.157})$$

便利のためパラメータの取り方を $t = 1/a^2$ と変えると以下ようになる .

$$\int_0^1 dx \frac{1}{x} \ln \left[1 - \frac{4}{t} x(1 - x) - i\epsilon \right] = \begin{cases} -2 \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{t - 1}} \right) & \text{for } t > 1 \\ \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - t}}{1 - \sqrt{1 - t}} - i\pi \right)^2 & \text{for } 0 < t < 1 \end{cases} \quad (\text{D.158})$$

D.7 暗黒物質の直接検出における電弱相互作用による寄与

ここでは暗黒物質の直接検出において散乱断面積を求める際に使った電弱ゲージボソンによる寄与についての結果のみを書き下す．詳しい内容は文献 [97] に書かれている．

式 (4.38) で定義されている有効演算子の係数は以下で与えられる．

$$f_q = \frac{\alpha_2^2}{4m_h^2} \left[\frac{N^2 - (4Y^2 + 1)}{8m_W} g_H(w) + \frac{Y^2}{4m_Z \cos^4 \theta_W} g_H(z) \right] + \frac{((a_q^V)^2 - (a_q^A)^2) Y^2}{\cos^4 \theta_W} \frac{\alpha_2^2}{m_Z^3} g_S(z) \quad (\text{D.159})$$

$$d_q = \frac{N^2 - (4Y^2 + 1)}{8} \frac{\alpha_2^2}{m_W^2} g_{AV}(w) + \frac{2((a_q^V)^2 + (a_q^A)^2) Y^2}{\cos^4 \theta_W} \frac{\alpha_2^2}{m_Z^2} g_{AV}(z) \quad (\text{D.160})$$

$$g_q^{(1)} = \frac{N^2 - (4Y^2 + 1)}{8} \frac{\alpha_2^2}{m_W^3} g_{T1}(w) + \frac{2((a_q^V)^2 + (a_q^A)^2) Y^2}{\cos^4 \theta_W} \frac{\alpha_2^2}{m_Z^3} g_{T1}(z) \quad (\text{D.161})$$

$$g_q^{(2)} = \frac{N^2 - (4Y^2 + 1)}{8} \frac{\alpha_2^2}{m_W^3} g_{T2}(w) + \frac{2((a_q^V)^2 + (a_q^A)^2) Y^2}{\cos^4 \theta_W} \frac{\alpha_2^2}{m_Z^3} g_{T2}(z) \quad (\text{D.162})$$

ここで m_h, m_W, m_Z はそれぞれヒッグス粒子, W ボソン, Z ボソンの質量を表し, $N = 2n + 1$ である．また Z ボソンとクォークのベクトル結合と軸性ベクトル結合は以下で与えられている．

$$a_q^V = \frac{1}{2} T_{3q} - Q_q \sin^2 \theta_W, \quad a_q^A = -\frac{1}{2} T_{3q} \quad (\text{D.163})$$

ここで T_{3q} と Q_q はクォークの弱アイソスピンと電荷である．また $w \equiv m_W^2/M^2$, $z \equiv m_Z^2/M^2$ と定義している．質量関数 $g_H(x)$, $g_S(x)$, $g_{AV}(x)$, $g_{T1}(x)$, $g_{T2}(x)$ は以下のように与えられる．

$$g_H(x) = -\frac{2}{b_x} (2 + 2x - x^2) \tan^{-1} \left(\frac{2b_x}{\sqrt{x}} \right) + 2\sqrt{x} (2 - x \ln(x)) \quad (\text{D.164})$$

$$g_S(x) = \frac{1}{4b_x} (4 - 2x + x^2) \tan^{-1} \left(\frac{2b_x}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{x} (2 - x \ln(x)) \quad (\text{D.165})$$

$$g_{AV}(x) = \frac{1}{24b_x} \sqrt{x} (8 - x - x^2) \tan^{-1} \left(\frac{2b_x}{\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{24} x (2 - (3 + x) \ln(x)) \quad (\text{D.166})$$

$$g_{T1}(x) = \frac{1}{3} b_x (2 + x^2) \tan^{-1} \left(\frac{2b_x}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{12} \sqrt{x} (1 - 2x - x(2 - x) \ln(x)) \quad (\text{D.167})$$

$$g_{T2}(x) = \frac{1}{4b_x} x (2 - 4x + x^2) \tan^{-1} \left(\frac{2b_x}{\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{x} (1 - 2x - x(2 - x) \ln(x)) \quad (\text{D.168})$$

ここで $b_x \equiv \sqrt{1 - x/4}$ である．

式 (4.39) で定義されている有効演算子の係数は以下で与えられる．

$$f_G = f_G^{(a)} + f_G^{(b)} + f_G^{(c)} \quad (\text{D.169})$$

$f_G^{(a)}$ は以下で与えられる．

$$f_G^{(a)} = -\frac{\alpha_s}{12\pi} \times \frac{\alpha_2^2}{4m_h^2} \sum_{Q=c,b,t} c_Q \left[\frac{N^2 - (4Y^2 + 1)}{8m_W} g_H(w) + \frac{Y^2}{4m_Z \cos^4 \theta_W} g_H(z) \right] \quad (\text{D.170})$$

ここで $c_Q = 1 + 11\alpha_s(m_Q)/4\pi$ ($Q = c, b, t$) であり, $\alpha_s(m_Z)$ に対しては $c_c = 1.32$, $c_b = 1.19$, $c_t = 1$ である. $f_G^{(b)}$ と $f_G^{(c)}$ の和は以下で与えられる.

$$f_G^{(b)} + f_G^{(c)} = \frac{\alpha_s \alpha_2^2}{4\pi} \left[\frac{N^2 - (4Y^2 + 1)}{8m_W^3} g_W(w, y) + \frac{Y^2}{4m_Z^3 \cos^4 \theta_W} g_Z(z, y) \right] \quad (\text{D.171})$$

ここで $y \equiv m_t^2/M^2$ であり, m_t はトップクォークの質量である. 質量関数 $g_Z(z, y)$ は以下で与えられる.

$$g_Z(z, y) = \left[\sum_{q=u,d,s,c,b} \{(a_q^V)^2 + (a_q^A)^2\} - 2 \sum_{Q=c,b} c_Q \{(a_q^V)^2 - (a_q^A)^2\} \right] \times 4g_{B1}(z) + g_t(z, y) \quad (\text{D.172})$$

ここで $g_{B1}(x)$ は以下のようにになっている.

$$g_{B1}(x) = -\frac{1}{24} \sqrt{x} (x \ln(x) - 2) + \frac{(x^2 - 2x + 4) \tan^{-1}(\frac{2b_x}{\sqrt{x}})}{24b_x} \quad (\text{D.173})$$

$g_t(z, y)$ を次のように 2 つに分ける.

$$g_t(z, y) = g_t^{\text{no-log}}(z, y) + g_t^{\text{log}}(z, y) \quad (\text{D.174})$$

$g_t^{\text{no-log}}(z, y)$ は解析的に解けて以下のようになる.

$$g_t^{\text{no-log}}(z, y) = (a_t^V)^2 G_{t1}(z, y) + (a_t^A)^2 G_{t2}(z, y) \quad (\text{D.175})$$

それぞれの関数は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} G_{t1}(z, y) = & -\frac{\sqrt{z}(12y^2 - zy + z^2)}{3(4y - z)^2} \\ & + \frac{z^{3/2}(48y^3 - 20zy^2 + 12z^2y - z^3)}{6(4y - z)^3} \ln z + \frac{2z^{3/2}y^2(4y - 7z)}{3(4y - z)^3} \ln(4y) \\ & - \frac{z^{3/2}\sqrt{y}(16y^3 - 4(2 + 7z)y^2 + 14(2 + z)y + 5z)}{3(4y - z)^3\sqrt{1-y}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}\right) \\ & - \arctan\left(\frac{\sqrt{4-z}}{\sqrt{z}}\right) \\ & \times \frac{48(z^2 - 2z + 4)y^3 - 4z(5z^2 - 10z + 4)y^2 + 12z^3(z - 2)y - z^3(z^2 - 2z + 4)}{3(4y - z)^3\sqrt{4-z}} \end{aligned} \quad (\text{D.176})$$

$$\begin{aligned} G_{t2}(z, y) = & \frac{\sqrt{z}(2y - z)}{(4y - z)} - \frac{z^{3/2}(8y^2 - 8zy + z^2)}{2(4y - z)^2} \ln z - \frac{4z^{3/2}y^2}{(4y - z)^2} \ln(4y) \\ & + \frac{4z^{3/2}\sqrt{y}(2y^2 - y - 1)}{(4y - z)^2\sqrt{1-y}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}\right) \\ & - \frac{8z(z^2 - 2z + 1)y - (z^2 - 2z + 4)(8y^2 + z^2)}{(4y - z)^2\sqrt{4-z}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-z}}{\sqrt{z}}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.177})$$

一方で $g_t^{\log}(z, y)$ については数値的に解く。 $g_t^{\log}(z, y)$ は以下で与えられている。

$$g_t^{\log}(z, y) = 4z^{3/2}y^2 (A_1 y [I_1 + I_2] + A_2 [I_3 + I_4]) \quad (\text{D.178})$$

ここでそれぞれの量は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} A_1 &= -2(a_t^V)^2 + 4(a_t^A)^2 \\ A_2 &= -(a_t^V)^2 + (a_t^A)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.179})$$

また I_1, I_2, I_3, I_4 は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dt \frac{(\sqrt{t+4} - \sqrt{t}) (\ln [\sqrt{t+4y} + \sqrt{t}] - \ln [\sqrt{t+4y} - \sqrt{t}])}{[t+z]^2 [t+4y]^{5/2} t} \\ I_2 &= \int_0^\infty dt \frac{1}{2} \times \frac{(t+2 - \sqrt{t}\sqrt{t+4}) (\ln [\sqrt{t+4y} + \sqrt{t}] - \ln [\sqrt{t+4y} - \sqrt{t}])}{[t+z]^2 [t+4y]^{5/2} t^{1/2}} \\ I_3 &= \int_0^\infty dt \frac{(\sqrt{t+4} - \sqrt{t}) (\ln [\sqrt{t+4y} + \sqrt{t}] - \ln [\sqrt{t+4y} - \sqrt{t}])}{[t+z]^2 [t+4y]^{5/2}} \\ I_4 &= \int_0^\infty dt \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{t}(t+2 - \sqrt{t}\sqrt{t+4}) (\ln [\sqrt{t+4y} + \sqrt{t}] - \ln [\sqrt{t+4y} - \sqrt{t}])}{[t+z]^2 [t+4y]^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.180})$$

最後に $g_W(w, y)$ は以下で与えられる。

$$g_W(w, y) = 2g_{B1}(w) + g_{B3}(w, y) \quad (\text{D.181})$$

ここで $g_{B3}(w, y)$ は以下のとおりである。

$$g_{B3}(x, y) = g_{B3}^{(1)}(x, y) + c_b g_{B3}^{(2)}(x, y) \quad (\text{D.182})$$

$g_{B3}^{(1)}(x, y)$ と $g_{B3}^{(2)}(x, y)$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} g_{B3}^{(1)}(x, y) &= \frac{-x^{3/2}}{12(y-x)} + \frac{-x^{3/2}y^2}{24(y-x)^2} \ln y - \frac{x^{5/2}(x-2y)}{24(y-x)^2} \ln x \\ &\quad - \frac{x^{3/2}\sqrt{y}(y+2)\sqrt{4-y}}{12(y-x)^2} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-y}}{\sqrt{y}}\right) \\ &\quad + \frac{x(x^3 - 2(y+1)x^2 + 4(y+1)x + 4y)}{12(y-x)^2 \sqrt{4-x}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}\right) \\ g_{B3}^{(2)}(x, y) &= \frac{-x^{3/2}y}{12(y-x)^2} + \frac{-x^{5/2}y^2}{24(y-x)^3} \ln y + \frac{x^{5/2}y^2}{24(y-x)^3} \ln x \\ &\quad + \frac{x^{3/2}\sqrt{y}(-6y + xy^2 - 2xy - 2x)}{12(y-x)^3 \sqrt{4-y}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-y}}{\sqrt{y}}\right) \\ &\quad + \frac{-xy(x^2y - 2xy - 6x - 2y)}{12(y-x)^3 \sqrt{4-x}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.183})$$

付録E 第7章の高いスケールの超対称型における核子の電気双極子モーメントに関する付録

E.1 計算で用いたラグランジアン

ここでは第7章の計算をする際に用いたラグランジアンを書き下す。

E.1.1 ゲージノ質量

ここではゲージノ質量を求める際に用いたラグランジアンを書き下す。導入したメッセンジャー超場 $\Phi, \bar{\Phi}$ のそれぞれの成分を以下のように表す。

$$\Phi = \phi + \theta\psi_{\Phi} \quad (\text{E.1})$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\phi} + \theta\psi_{\bar{\Phi}} \quad (\text{E.2})$$

ここで Φ は表現 R に属し、 $\bar{\Phi}$ は表現 \bar{R} に属している。メッセンジャーのスカラー成分の質量項は式 (7.6) より以下で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -(\phi^*, \bar{\phi}) \mathbf{m}_{\phi}^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi}^* \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

ここで \mathbf{m}_{ϕ}^2 はメッセンジャーのスカラー成分の質量行列であり、以下で与えられる。

$$\mathbf{m}_{\phi}^2 = \begin{pmatrix} |M|^2 & -|F|e^{-i\theta_F} \\ -|F|e^{i\theta_F} & |M|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

まずはこの行列を対角化してメッセンジャーのスカラー成分の質量と質量固有状態を求める。対角化行列 U を用いると式 (E.4) は以下のように対角化できる。

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -(\phi^*, \bar{\phi}) U^{\dagger} U \mathbf{m}_{\phi}^2 U^{\dagger} U \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi}^* \end{pmatrix} = -(\phi^*, \bar{\phi}) U^{\dagger} \mathbf{M}_{\phi}^2 U \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi}^* \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

対角化された質量行列 \mathbf{M}_{ϕ}^2 と対角化行列 U は以下で与えられる。

$$\mathbf{M}_{\phi}^2 = \begin{pmatrix} |M|^2 + |F| & 0 \\ 0 & |M|^2 - |F| \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m_+ & 0 \\ 0 & m_- \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-i\theta_F} \\ 1 & e^{-i\theta_F} \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

さらにスカラー成分の質量固有状態は以下ようになる .

$$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} \equiv U \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi - e^{-i\theta_F} \bar{\phi}^* \\ \phi + e^{-i\theta_F} \bar{\phi}^* \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

これを逆解きすると以下ようになる .

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_+ + \phi_- \\ e^{i\theta_F} (-\phi_+ + \phi_-) \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

メッセンジャーのフェルミオン成分の質量項は以下で与えられる .

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -M \psi_{\Phi} \psi_{\Phi} - M^* \psi_{\Phi}^{\dagger} \psi_{\Phi}^{\dagger} \\ &= -M \bar{\psi}_{\Phi}^{\mathcal{C}} P_L \psi_{\Phi} - M^* \bar{\psi}_{\Phi}^{\mathcal{C}} P_R \psi_{\Phi}^{\mathcal{C}} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

ここで 1 行目は 2 成分表記 2 行目は 4 成分表記でフェルミオンを書いている . 2 つのワイルフェルミオンを以下のように組み合わせてディラックフェルミオンを構成することができる .

$$\psi' \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\Phi} \\ \psi_{\Phi}^{\dagger} \end{pmatrix} = P_L \psi_{\Phi} + P_R \psi_{\Phi}^{\mathcal{C}} \quad (\text{E.11})$$

するとラグランジアンは以下のように書き換えられる .

$$\mathcal{L} = -M \bar{\psi}' P_L \psi' - M^* \bar{\psi}' P_R \psi' \quad (\text{E.12})$$

ここでフェルミオンの質量の位相は以下のように定義し ,

$$M \equiv |M| e^{i\theta_M} \quad (\text{E.13})$$

メッセンジャーフェルミオンを以下のように再定義すれば , フェルミオンの質量を実にできる .

$$\psi' \rightarrow \psi = e^{-i\theta_M \gamma_5 / 2} \psi' \quad (\text{E.14})$$

よってメッセンジャーフェルミオンの質量項は以下のように書ける .

$$\mathcal{L} = -|M| \bar{\psi} \psi \equiv -m_f \bar{\psi} \psi \quad (\text{E.15})$$

以下でははじめから質量を実にとった基底を考えているとし , $\theta_M = 0$ とする .

ゲージノの質量を求める際に必要なラグランジアンはゲージノ-フェルミオン-スカラー相互作用であり , 一般的には以下で与えられる .

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\sqrt{2} g \left(\phi_i^* \bar{\lambda}^a (T_{\Phi}^a)^i_j P_L \psi_{\Phi}^j + \bar{\psi}_{\Phi} P_R \lambda^a (T_{\Phi}^a)^i_j \phi^j \right) \\ &\quad + \sqrt{2} g \left(\bar{\psi}_{\Phi}^{\mathcal{C}} (T_{\Phi}^a)^i_j P_L \lambda^a \bar{\phi}^{*j} + \bar{\phi}_i \bar{\lambda}^a (T_{\Phi}^a)^i_j P_R \psi_{\Phi}^{\mathcal{C}j} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

ここで λ^a がゲージノを表す場である . これをメッセンジャーの質量の固有状態で書き換えると以下ようになる .

$$\mathcal{L} = -g \phi_{\pm i}^* \bar{\lambda}^a (T_{\Phi}^a)^i_j (P_L \pm e^{-i\theta_F} P_R) \psi^j - g \bar{\psi}_i (P_R \pm e^{i\theta_F} P_L) \lambda^a (T_{\Phi}^a)^i_j \phi_{\pm}^j \quad (\text{E.17})$$

符号の \pm は ϕ_{\pm} に対応している . これを用いてゲージノの質量を計算する .

E.1.2 グルイーノのカラー電気双極子モーメント

ここではグルイーノのカラー電気双極子モーメントを求める際に用いたラグランジアンを書き下す．グルイーノのカラー電気双極子モーメントを求める際に必要な相互作用は ϕ - ϕ - G と ψ - ψ - G , ϕ - ψ - \tilde{g} の 3 つである．

まずは ϕ - ϕ - G を考える．メッセンジャーを式 (E.1), (E.2) の基底で相互作用ラグランジアンを与える． ϕ に対しては以下ようになる．

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \ni ig_3 (\phi^* t^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) G_\mu^a \quad (\text{E.18})$$

同様にして $\bar{\phi}$ に対しては以下ようになる．

$$\mathcal{L} = (D_\mu \bar{\phi})^\dagger (D_\mu \bar{\phi}) \ni ig_3 (\bar{\phi} t^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{\phi}^*) G_\mu^a \quad (\text{E.19})$$

このラグランジアンを両方合わせて式 (E.8) の質量の固有状態で書き表すと以下ようになる．

$$\mathcal{L} = ig_3 (\phi_+^* t^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_+) G_\mu^a + ig_3 (\phi_-^* t^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_-) G_\mu^a \quad (\text{E.20})$$

次に ψ - ψ - G を考える．メッセンジャーを式 (E.1), (E.2) の基底で書いたラグランジアンは以下のようになる．

$$\mathcal{L} = g_3 \bar{\psi}_\Phi \gamma^\mu t^a P_L \psi_\Phi G_\mu^a + g_3 \bar{\psi}_\Phi^c \gamma^\mu t^a P_R \psi_\Phi^c G_\mu^a \quad (\text{E.21})$$

ここでは 4 成分表記を用いている．また式 (E.11) のディラックフェルミオンを用いればこのラグランジアンは以下のようにまとめられる．

$$\mathcal{L} = g_3 \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi G_\mu^a \quad (\text{E.22})$$

式 (7.21) のカイラル変換 $\tilde{g}^a \rightarrow \tilde{g}'^a = e^{-i\gamma_5 \theta/2} \tilde{g}^a$ をした後の ϕ - ψ - \tilde{g} の相互作用は式 (E.17) より以下のようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -g_3 \phi_\pm^* \tilde{g}^a (t^a)^i_j (e^{i\theta/2} P_L \pm e^{-i\theta/2} e^{-i\theta_F} P_R) \psi^j \\ & - g_3 \bar{\psi}_i (e^{-i\theta/2} P_R \pm e^{i\theta/2} e^{i\theta_F} P_L) \tilde{g}^a (t^a)^i_j \phi_\pm^j \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

E.2 グルイーノのカラー電気双極子モーメント

ここではグルイーノのカラー電気双極子モーメントの導出を行う．

まずはグルイーノのカラー電気双極子モーメントから得られる振幅を求める．グルイーノのカラー電気双極子モーメントは式 (7.24) のように以下で与えられる．

$$\mathcal{L}_{\tilde{g} \text{ CEDM}} = -\frac{i}{4} \tilde{d}_{\tilde{g}} \bar{g}^a \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 [t_{\text{adj}}^b]^{ac} \tilde{g}^c G_{\mu\nu}^b = \frac{1}{4} \tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \bar{g}^a \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \tilde{g}^c G_{\mu\nu}^b \quad (\text{E.24})$$

ここで $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ であり, $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ である．随伴表現は $[t_{\text{adj}}^a]_{bc} = -if^{abc}$ で与えられる．図 E.1 のように運動量を割り当てた時にこのラグランジアンから得られる振幅は以下のようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} = & \langle G(p)g(q-p) | i\mathcal{L}_{\tilde{g} \text{ CEDM}} | g(q) \rangle \\ = & -\tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \bar{u}^{(a)}(q-p) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 u^{(c)}(q) p_\mu \epsilon_\nu^{(b)*}(p) \\ = & -i\tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \bar{u}^{(a)}(q-p) \gamma_5 u^{(c)}(q) (q+q') \cdot \epsilon^{(b)*}(p) \\ = & -2i\tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \bar{u}^{(a)}(q-p) \gamma_5 u^{(c)}(q) q \cdot \epsilon^{(b)*}(p) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

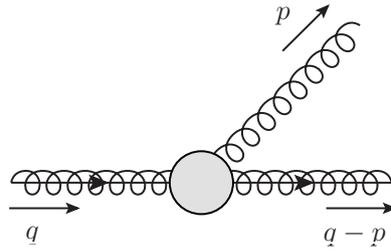


図 E.1: グルイーノのカラー電気双極子モーメントの運動量の割り当て .

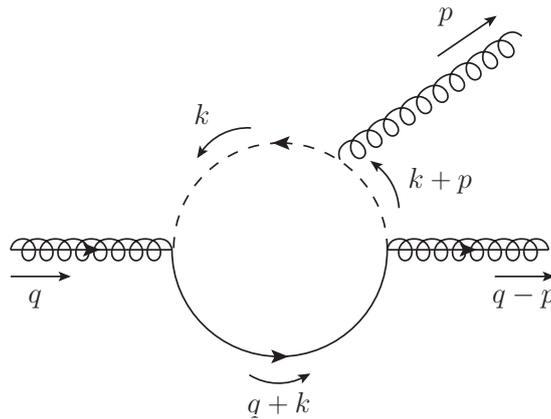


図 E.2: 完全な理論でのグルイーノのカラー電気双極子モーメントの運動量の割り当て .

ここで $q' = q - p$ である . また (a), (b), (c) については対応を表しているだけで和をとっていない . この振幅と完全な理論で計算した振幅をつり合わせればこの演算子の係数が決定できる .

次は完全な理論での振幅を求める . 用いる相互作用ラグランジアンは付録 E.1.2 で与えられている . 図 E.2 から得られる振幅は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{\pm}^{(1)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}^{(b)}(q-p) (-ig_3) [e^{i\theta/2} P_L \pm e^{-i\theta/2} e^{-i\theta_F} P_R] (t^b)^j{}_i \\
 &\quad \times \frac{i(k+q+m_f)}{(k+q)^2 - m_f^2} \delta_l^i (-ig_3) [e^{-i\theta/2} P_R \pm e^{i\theta} e^{i\theta_F/2} P_L] (t^a)^l{}_k u^{(a)}(q) \\
 &\quad \times (ig_3) (2k+p)^\mu (t^c)^k{}_j \frac{i}{k^2 - m_{\pm}^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m_{\pm}^2} \epsilon_{\mu}^{(c)*}(p) \\
 &\quad - (t^a, t^b \text{ を } a \leftrightarrow b \text{ としたもの}) \\
 &\quad \ni \pm g_3^3 m_f \sin(\theta + \theta_F) f^{abc} \bar{u}^{(b)}(q-p) \gamma_5 u^{(a)}(q) \epsilon_{\mu}^{(c)*}(p) \\
 &\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k+q)^2 - m_f^2][k^2 - m_{\pm}^2][(k+p)^2 - m_{\pm}^2]}
 \end{aligned} \tag{E.26}$$

今 , 1 行目で位相をまとめると以下のようにになっている .

$$e^{i\theta} e^{i\theta_F} P_L + e^{-i\theta} e^{-i\theta_F} P_R = \cos(\theta + \theta_F) - \sin(\theta + \theta_F) i\gamma_5 \tag{E.27}$$

そこで 2 行目ではカラー電気双極子モーメントを求めるため γ_5 に比例する項のみを残した . また (a), (b), (c) については対応を表しているだけで和をとっていない . 計算の中では以下の関係式

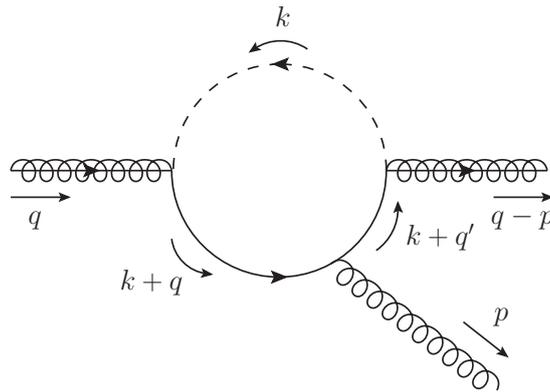


図 E.3: 完全な理論でのグルーイノのカラー電気双極子モーメントの運動量の割当 .

を用いた .

$$f^{abc} = -2i \text{Tr}([t^a, t^b]t^c) \quad (\text{E.28})$$

次に外線運動量 p, q は小さいとして , 外線運動量についてテイラー展開する . 伝搬関数のテイラー展開は以下ようになる .

$$\frac{1}{(k+p)^2 + m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} 2k \cdot p + \mathcal{O}(p^2) \quad (\text{E.29})$$

外線運動量の 0 次は被積分関数が奇関数になることから消える . また $k^\mu k^\mu \rightarrow k^2 g^{\mu\nu} / 4$ の置き換えを行うと振幅は以下ようになる .

$$i\mathcal{M}_\pm^{(I)}|_{\gamma_5} = \mp \frac{1}{2} g_3^3 m_f \sin(\theta + \theta_F) f^{abc} \bar{u}^{(b)}(q-p) \gamma_5 u^{(a)}(q) q \cdot \epsilon^{(c)*}(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m_f^2)^2 (k^2 - m_\pm^2)^2} \quad (\text{E.30})$$

同様に図 E.3 から得られる振幅は以下ようになる .

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_\pm^{(II)} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}^{(b)}(q-p) (-ig_3) [e^{i\theta/2} P_L \pm e^{-i\theta/2} e^{-i\theta_F}] (t^b)^j{}_i \\ &\times \frac{i(\not{k} + \not{q}' + m_f)}{(k+q')^2 - m_f^2} (ig_3 \gamma^\mu) (t^c)^i{}_l \frac{i(\not{k} + \not{q} + m_f)}{(k+q)^2 - m_f^2} \\ &\times (-ig_3) [e^{-i\theta/2} P + R \pm e^{i\theta/2} e^{i\theta_F} P_L] (t^a)^l{}_k u^{(a)}(q) \frac{i}{k^2 - m_\pm^2} \delta_j^l \epsilon_\mu^{(c)*}(p) \\ &- (t^a, t^b \text{ を } a \leftrightarrow b \text{ としたもの}) \\ &\ni \mp g_3^3 m_f \sin(\theta + \theta_F) f^{abc} \bar{u}^{(b)}(q-p) \gamma_5 u^{(a)}(q) \epsilon_\mu^{(c)*}(p) \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - m_\pm^2][(k+q)^2 - m_f^2][(k+q')^2 - m_f^2]} \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

ここでディラック方程式 $(\not{q} - M_{\tilde{g}})u(q) = 0$ を用いた . 先と同様に外線運動量についてテイラー展開をしてやると振幅は以下ようになる .

$$i\mathcal{M}_\pm^{(II)}|_{\gamma_5} = \pm g_3^3 m_f \sin(\theta + \theta_F) f^{abc} \bar{u}^{(b)}(q-p) \gamma_5 u^{(a)}(q) q \cdot \epsilon^{(c)*}(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m_\pm^2)(k^2 - m_f^2)^3} \quad (\text{E.32})$$

以上より全振幅は以下ようになる .

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_+^{(I)} + i\mathcal{M}_-^{(I)} + i\mathcal{M}_+^{(II)} + i\mathcal{M}_-^{(II)} \quad (\text{E.33})$$

これと式 (E.25) をつり合わせるとグレイノのカラー電気双極子モーメントは以下のように得られる .

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{\tilde{g}} &= \frac{i}{2} g_3^3 m_f \sin(\theta + \theta_F) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{k^2}{(k^2 - m_+^2)(k^2 - m_f^2)^3} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{(k^2 - m_+^2)^2(k^2 - m_f^2)^2} \right] \\ &\quad - (m_- \text{ の項}) \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

また運動量積分は以下のように計算できる .

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m_{\pm}^2)(k^2 - m_f^2)^3} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{m_{\pm}^2} A(r_{\pm}) \quad (\text{E.35})$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m_{\pm}^2)^2(k^2 - m_f^2)^2} = \frac{-i}{16\pi^2} \frac{2}{m_{\pm}^2} B(r_{\pm}) \quad (\text{E.36})$$

ここで $r_{\pm} \equiv m_f^2/m_{\pm}^2$ であり, ループ関数は以下で定義される [150] .

$$A(r) \equiv \frac{1}{2(1-r)^2} \left(3 - r + \frac{2 \ln r}{1-r} \right) = \int_0^{\infty} dt \frac{-t^2}{(t+1)(t+r)^3} \quad (\text{E.37})$$

$$B(r) \equiv \frac{1}{2(1-r)^2} \left(1 + r + \frac{2r \ln r}{1-r} \right) = \int_0^{\infty} dt \frac{t^2}{2(t+1)^2(t+r)^2} \quad (\text{E.38})$$

以上よりグレイノのカラー電気双極子モーメントは以下ようになる .

$$\tilde{d}_{\tilde{g}} = -\frac{g_3^3}{32\pi^2} \frac{M}{m_+^2} \sin(\theta + \theta_F) [A(r_+) + B(r_+)] - (m_+, r_+ \rightarrow m_-, r_-) \quad (\text{E.39})$$

ここで $m_f = M$ を用いた . さらに以下の関係式を用いれば本文中の式 (7.27) が得られる .

$$\tilde{d}_{\tilde{g}} = M_{\tilde{g}} g_3 C_{\tilde{g}} \quad (\text{E.40})$$

E.3 Weinberg 演算子の Wilson 係数

ここでは式 (7.34) の Weinberg 演算子の Wilson 係数とグレイノのカラー電気双極子モーメントの Wilson 係数のつり合いを行う . Weinberg 演算子は式 (7.34) と同じように以下で与えられる ¹ [57] .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= C_W \mathcal{O}_W \\ \mathcal{O}_W &= -\frac{1}{6} g_3 f^{abc} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\lambda}^a G_{\nu}^b{}^\lambda G_{\rho\sigma}^c \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

図 E.4 のように運動量を割り当てると Weinberg 演算子の振幅は以下ようになる .

¹この係数 1/3 は慣習的に付けられている . 余分な因子が出ないように対称因子で割るなら係数を 1/2 にするべきである .

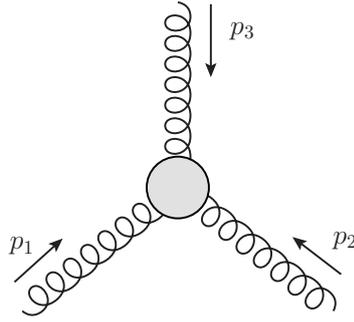


図 E.4: Weinberg 演算子の運動量の割り当て .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \langle G_\mu^{(a)}(p_1)G_\nu^{(b)}(p_2)G_\rho^{(c)}(p_3)i\mathcal{L}_W \rangle \\
 &= -\frac{2}{3}g_3C_W f^{abc} \left[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (p_1^\rho p_{2\alpha} p_{3\beta} + p_{1\alpha} p_2^\rho p_{3\beta}) - \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} (p_{1\alpha} p_2^\mu p_{3\beta} + p_{1\alpha} p_{2\beta} p_3^\mu) \right. \\
 &\quad \left. + \epsilon^{\mu\rho\alpha\beta} (p_1^\nu p_{2\alpha} p_{3\beta} - p_{1\alpha} p_{2\beta} p_3^\nu) \right] \epsilon_\mu^{(a)}(p_1)\epsilon_\nu^{(b)}(p_2)\epsilon_\rho^{(c)}(p_3)
 \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

ここで (a), (b), (c) については対応を表しているだけで和をとっていない . 上の式変形では $p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_3 = p_3 \cdot p_1 = 0$ を用いた . また $p_3 = -p_1 - p_2$ を代入すると以下ようになる [184] .

$$i\mathcal{M} = -\frac{2}{3}g_3C_W f^{abc} \epsilon_\mu^{(a)}(p_1)\epsilon_\nu^{(b)}(p_2)\epsilon_\rho^{(c)}(-p_1 - p_2) \left[(p_1 - p_2)^\rho \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + 2p_1^\nu \epsilon^{\mu\rho\alpha\beta} + 2p_2^\mu \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \right] p_{1\alpha} p_{2\beta} \quad (\text{E.43})$$

ここで横波条件 $p \cdot \epsilon(p) = 0$ を用いた . この振幅と完全な理論で計算した振幅をつり合わせることで Weinberg 演算子の Wilson 係数 C_W が得られる .

続いて完全な理論での振幅を計算する . 今必要な相互作用ラグランジアンは $\tilde{g}\text{-}\tilde{g}\text{-}G$ の相互作用で以下で与えられる .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\tilde{g}^a i\not{D}\tilde{g}^a \ni \frac{1}{2}g_3\tilde{g}^a \gamma^\mu [t_{\text{adj}}^b]^{ac} \tilde{g}^c = i\frac{1}{2}g_3 f^{abc} \tilde{g}^a \gamma^\mu \tilde{g}^c G_\mu^b \quad (\text{E.44})$$

ここで随伴表現の生成子 $[t_{\text{adj}}^a]^{bc} = -if^{abc}$ を用いた .

Weinberg 演算子に寄与するダイアグラムの例は図 E.5 のようなものである . 色のついた丸はグルイーノのカラー電気双極子モーメントの演算子が挿入されている点を表す . このダイアグラムの他にグルイーノのカラー電気双極子モーメントの演算子を他の頂点に付け替えたものとそれぞれに対しグルイーノのループが逆に回っているものがあり , 計 6 個のダイアグラムがある . またそれぞれのダイアグラムに対し対称因子 1/2 が付く . 代表として図 E.5 のダイアグラム振幅を $\mathcal{M}^{(1)}$ と表しその寄与を求める . 振幅は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(1)} &= \frac{1}{2}\tilde{d}_{\tilde{g}}(-g_3)^2(-1)f^{iaj}f^{jbk}f^{kci}(i)^3\epsilon_\mu^{(a)}(p_1)\epsilon_\nu^{(b)}(p_2)\epsilon_\rho^{(c)}(-p_1 - p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\
 &\quad \times \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{k} + M_{\tilde{g}})\gamma^\nu(\not{k} - \not{p}_2 + M_{\tilde{g}})\sigma^{\alpha\rho}\gamma_5(\not{k} + \not{p}_1 + M_{\tilde{g}})](-p_1 - p_2)_\alpha
 \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

ここで (a), (b), (c) については和をとっていない . また分母は以下のように定義されている .

$$N_1 = k^2 - M_{\tilde{g}}^2 \quad (\text{E.46})$$

$$N_2 = (k + p_1)^2 - M_{\tilde{g}}^2 \quad (\text{E.47})$$

$$N_3 = (k - p_2)^2 - M_{\tilde{g}}^2 \quad (\text{E.48})$$

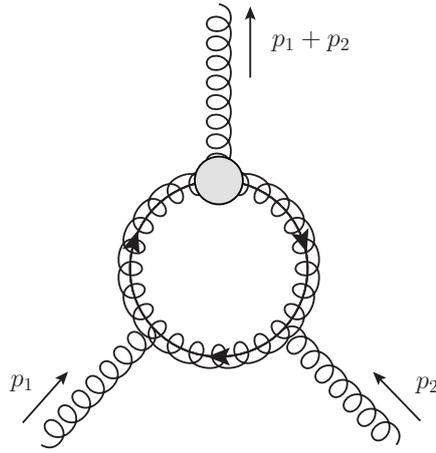


図 E.5: 完全な理論での Weinberg 演算子への寄与を表すダイアグラム．色のついた丸はグルーイノのカラー電気双極子モーメントの演算子が挿入されている点を表す．このダイアグラムの他にグルーイノのカラー電気双極子モーメントの演算子を他の頂点に付け替えたものとそれぞれに対しグルーイノのループが逆に回っているものがあり，計 6 個のダイアグラムがある．またそれぞれのダイアグラムに対し対称因子 $1/2$ が付く．

トレース部分は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\cdots](-p_1 - p_2)_\alpha \\ &= -4M_{\tilde{g}} \left[(k^2 - M_{\tilde{g}}^2 + 2k \cdot p_1 + p_1^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_{2\alpha} + (k^2 - M_{\tilde{g}}^2 - 2k \cdot p_2 + p_2^2) \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_{1\alpha} \right. \\ & \quad \left. + (-2k - p_1 + p_2)^\rho \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

また構造定数の和に関しては以下の関係式が成り立つ．

$$f^{iaj} f^{jkk} f^{kci} = -\frac{1}{2} C_A f^{abc} \quad (\text{E.50})$$

ここで $C_A = N_C$ は随伴表現のカシミア演算子であり， N_C はカラーを表す．よって $\mathcal{M}^{(1)}$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{(1)} &= iN_C g_3^2 M_{\tilde{g}} \tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \epsilon_\mu^{(a)}(p_1) \epsilon_\nu^{(b)}(p_2) \epsilon_\rho^{(c)}(-p_1 - p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\ & \quad \times \left[(k^2 - M_{\tilde{g}}^2 + 2k \cdot p_1) \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_{2\alpha} + (k^2 - M_{\tilde{g}}^2 - 2k \cdot p_2) \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_{1\alpha} \right. \\ & \quad \left. + (-2k - p_1 + p_2)^\rho \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

同様にそれぞれのダイアグラムを評価し，全て足し上げると以下のようになる．

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \sum_{i=1}^6 i\mathcal{M}^{(i)} \\ &= -4iN_C g_3^2 M_{\tilde{g}} \tilde{d}_{\tilde{g}} f^{abc} \epsilon_\mu^{(a)}(p_1) \epsilon_\nu^{(b)}(p_2) \epsilon_\rho^{(c)}(-p_1 - p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \\ & \quad \times \left[\{ 2k^\mu \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} - 2k^\nu \epsilon^{\mu\rho\alpha\beta} + (2k + p_1 - p_2)^\rho \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \} p_{1\alpha} p_{2\beta} \right. \\ & \quad \left. - 4k \cdot p_1 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_{2\alpha} - 4k \cdot p_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_{1\alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

さらに外線運動量が小さいとして分母を外線運動量についてテイラー展開する．すると最終的に振幅は以下ようになる．

$$i\mathcal{M} = -\frac{N_C g_3^2 \tilde{d}_{\tilde{g}}}{48\pi^2 M_{\tilde{g}}} f^{abc} \epsilon_{\mu}^{(a)}(p_1) \epsilon_{\nu}^{(b)}(p_2) \epsilon_{\rho}^{(c)}(-p_1 - p_2) \left[(p_1 - p_2)^{\rho} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + 2p_1^{\nu} \epsilon^{\mu\rho\alpha\beta} + 2p_2^{\mu} \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \right] p_{1\alpha} p_{2\beta} \quad (\text{E.53})$$

この振幅と式 (E.43) の振幅をつり合わせれば以下の関係式が得られる．

$$C_W = \frac{N_C g_3 \tilde{d}_{\tilde{g}}}{32\pi^2 M_{\tilde{g}}} \quad (\text{E.54})$$

また $\tilde{d}_{\tilde{g}} = M_{\tilde{g}} g_3 C_{\tilde{g}}$ を用いれば本文の式 (7.35) の関係式が得られる．

$$C_W(\hat{M}_{\tilde{g}}) = \frac{N_C g_3^2}{32\pi^2} C_{\tilde{g}}(\hat{M}_{\tilde{g}}) \quad (\text{E.55})$$

E.4 CP を破る演算子のくりこみ群方程式

電弱スケール以下の (フレーバーに対して対角的な) CP を破る演算子は式 (7.36) で定義される次元 6 までの演算子で与えられていた．これらの演算子のくりこみ群方程式の発展を考えるにはクォークの (カラー) 電気双極子モーメントの演算子 \mathcal{O}_i^q ($i = 1, 2$) を以下のように定義すると便利である．

$$\mathcal{O}_1^q = -\frac{i}{2} m_q e Q_q \bar{q} (F \cdot \sigma) \gamma_5 q, \quad \mathcal{O}_2^q = -\frac{i}{2} m_q \bar{q} g_3 (G \cdot \sigma) \gamma_5 q \quad (\text{E.56})$$

ここで Q_q はクォーク q の電荷を表し, g_3 は $SU(3)_C$ の結合定数を表す．Weinberg 演算子 \mathcal{O}_W は式 (7.34) で定義されている．これらの演算子を使って有効ラグランジアンは以下のように書ける．

$$\mathcal{L}_{\mathcal{CP}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{q=u,d,s} C_i^q \mathcal{O}_i^q + C_W \mathcal{O}_W \quad (\text{E.57})$$

また式 (7.36) のラグランジアン係数とこれらの演算子の Wilson 係数は以下のように関係付けられている．

$$d_q = m_q e Q_q C_1^q, \quad \tilde{d}_q = m_q C_2^q, \quad w = -g_3 C_W \quad (\text{E.58})$$

Wilson 係数に対するの 1 ループのくりこみ群方程式は以下で与えられる [152] ．

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{\Gamma} \quad (\text{E.59})$$

ここで \mathbf{C} と $\mathbf{\Gamma}$ は以下で与えられる．

$$\mathbf{C} = (C_1^q, C_2^q, C_W) \quad (\text{E.60})$$

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{g_3^2}{16\pi^2} \begin{pmatrix} 8C_F & 0 & 0 \\ 8C_F & 16C_F - 4N_C & 0 \\ 0 & 2N_C & N_C + 2N_f - b_3^{(1)} \end{pmatrix} \quad (\text{E.61})$$

今 $N_C = 3$ と N_f はそれぞれカラーとフレーバーの数を表す． $C_F = (N_C^2 - 1)/2N_C$ はカシミヤ演算子で $b_3^{(1)} = -11N_C/3 + 2N_f/3$ は g_3 の 1 ループのベータ関数の係数である．

E.5 核子の電気双極子モーメントに対する QCD 和則

核子と電子の電気双極子モーメントの予言値を得るためにはパートンレベルの相互作用からこれらへの寄与を評価しなければならない。文献 [40] によると中性子の電気双極子モーメント d_n はくりこみスケール $\mu = 1 \text{ GeV}$ での QCD 和則を用いることで、クォークの電気双極子モーメントおよびカラー電気双極子モーメントと関係が付いている。陽子の電気双極子モーメント d_p についても同様である。核子の電気双極子モーメント d_N は QCD 和則を用いることで以下で与えられる。

$$d_N = \frac{-c_0 m_N^3 \langle \bar{q}q \rangle}{\lambda_N^2} \Theta_N, \quad (N = p, n) \quad (\text{E.62})$$

ここで $c_0 = 0.234$ であり、クォーク凝縮は $\langle \bar{q}q \rangle = -m_\pi^2 f_\pi^2 / (m_u + m_d) = -(0.262 \text{ GeV})^3$ である。 λ_N は interpolation 場と陽子及び中性子の場を関係づけるパラメータである。また m_N は核子 N の質量を表す。 Θ_N は interpolation 場の相関関数の演算子積展開 (operator product expansion, OPE) を通じて計算されるものであり、 $\langle \bar{q}q \rangle$ に比例する係数である。Peccei-Quinn (PQ) 機構を仮定しなければ Θ_N は以下のように得られる。

$$\Theta_p = (4Q_u m_u \rho_u - Q_d m_d \rho_d) \chi \bar{\theta} + (4d_u - d_d) + \left(\kappa - \frac{1}{2} \xi \right) (4Q_u \tilde{d}_u - Q_d \tilde{d}_d) \quad (\text{E.63})$$

$$\Theta_n = (4Q_d m_d \rho_d - Q_u m_u \rho_u) \chi \bar{\theta} + (4d_d - d_u) + \left(\kappa - \frac{1}{2} \xi \right) (4Q_d \tilde{d}_d - Q_u \tilde{d}_u) \quad (\text{E.64})$$

ここで Q_q, m_q, d_q (\tilde{d}_q) はそれぞれクォークの電荷、クォークの質量、クォークの (カラー) 電気双極子モーメントを表す。また χ, κ, ξ は $\langle \bar{q}q \rangle$ と電磁背景 (electromagnetic background) でのクォーク凝縮を関係づけるパラメータであり、以下で与えられる。

$$\langle \bar{q} \sigma_{\mu\nu} q \rangle_F = Q_q \chi F_{\mu\nu} \langle \bar{q}q \rangle \quad (\text{E.65})$$

$$g_s \langle \bar{q} G_{\mu\nu}^a t^a q \rangle_F = Q_q \kappa F_{\mu\nu} \langle \bar{q}q \rangle \quad (\text{E.66})$$

$$2g_s \langle \bar{q} \tilde{G}_{\mu\nu}^a t^a q \rangle_F = i Q_q \xi F_{\mu\nu} \langle \bar{q}q \rangle \quad (\text{E.67})$$

ここで $\langle \dots \rangle_F$ は電磁背景での真空期待値を表す。これらのパラメータは文献 [185, 186] で見積もられており、その値は $\chi = -5.7 \text{ GeV}^{-2}$, $\xi = -0.74$, $\kappa = -0.34$ となっている。 ρ_u と ρ_d は以下で定義されている。

$$\rho_u = \frac{m_*}{m_u} \left(1 + \frac{m_0^2}{2\bar{\theta}} \left[\frac{\tilde{d}_u - \tilde{d}_d}{m_d} + \frac{\tilde{d}_u - \tilde{d}_s}{m_s} \right] \right) \quad (\text{E.68})$$

$$\rho_d = \frac{m_*}{m_d} \left(1 + \frac{m_0^2}{2\bar{\theta}} \left[\frac{\tilde{d}_d - \tilde{d}_u}{m_u} + \frac{\tilde{d}_d - \tilde{d}_s}{m_s} \right] \right) \quad (\text{E.69})$$

パラメータ m_0^2 は $\bar{q}(G \cdot \sigma)q$ の真空期待値に付随するパラメータで文献 [185] で $m_0^2 = 0.8 \text{ GeV}^2$ と見積もられている。 m_* は換算されたクォークの質量 (reduced quark mass) で以下で定義される。

$$\frac{1}{m_*} = \frac{1}{m_u} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_s} \quad (\text{E.70})$$

さらに λ_N の 2 ループでの発展は以下で与えられる .

$$\begin{aligned} \lambda_N(1 \text{ GeV}) &= \left(\frac{\alpha_s(1 \text{ GeV})}{\alpha_s(m_c)} \right)^{-\frac{2}{9}} \left(\frac{\alpha_s(m_c)}{\alpha_s(2 \text{ GeV})} \right)^{-\frac{6}{25}} \\ &\times \left(\frac{\alpha_s(1 \text{ GeV}) + \frac{9\pi}{16}}{\alpha_s(m_c) + \frac{9\pi}{16}} \right)^{\frac{2}{9} - \frac{41}{64}} \left(\frac{\alpha_s(m_c) + \frac{100\pi}{154}}{\alpha_s(2 \text{ GeV}) + \frac{100\pi}{154}} \right)^{\frac{6}{25} - \frac{117}{154}} \lambda_N(2 \text{ GeV}) \quad (\text{E.71}) \\ &= -0.0439 \text{ GeV}^3 \end{aligned}$$

ここで $\lambda_N(2 \text{ GeV}) = -0.0480 \text{ GeV}^3$ を用いている . 以上をまとめると核子の電気双極子モーメントとクォークの (カラー) 電気双極子モーメントの関係は以下のように得られる .

$$d_p = -1.2 \times 10^{-16} [e \text{ cm}] \bar{\theta} + 0.78d_u - 0.20d_d + e(-0.28\tilde{d}_u + 0.28\tilde{d}_d + 0.021\tilde{d}_s) \quad (\text{E.72})$$

$$d_n = 8.2 \times 10^{-17} [e \text{ cm}] \bar{\theta} - 0.12d_u + 0.78d_d + e(-0.30\tilde{d}_u + 0.30\tilde{d}_d + 0.014\tilde{d}_s) \quad (\text{E.73})$$

Peccei-Quinn 機構が機能している場合でも QCD θ 項は以下のように誘導される .

$$\bar{\theta}_{\text{ind}} = \frac{m_0^2}{2} \sum_q \frac{\tilde{d}_q}{m_q} \quad (\text{E.74})$$

また OPE 係数 Θ_N は以下ようになる .

$$\Theta_p = (4d_u - d_d) + \left(\kappa - \frac{1}{2}\xi + \frac{m_0^2}{2}\chi \right) (4Q_u\tilde{d}_u - Q_d\tilde{d}_d) \quad (\text{E.75})$$

$$\Theta_n = (4d_d - d_u) + \left(\kappa - \frac{1}{2}\xi + \frac{m_0^2}{2}\chi \right) (4Q_d\tilde{d}_d - Q_u\tilde{d}_u) \quad (\text{E.76})$$

以上より Peccei-Quinn 機構が機能している場合には核子の電気双極子モーメントとクォークの (カラー) 電気双極子モーメントの関係は以下ようになる .

$$d_p^{\text{PQ}} = 0.78d_u - 0.20d_d + e(-1.2\tilde{d}_u - 0.15\tilde{d}_d) \quad (\text{E.77})$$

$$d_n^{\text{PQ}} = -0.20d_u + 0.78d_d + e(0.29\tilde{d}_u + 0.59\tilde{d}_d) \quad (\text{E.78})$$

E.6 Barr-Zee ダイアグラムによる寄与

電気双極子モーメント

ここでは本文中で用いた高いスケールの超対称理論における Barr-Zee ダイアグラムの寄与による電気双極子モーメントの表式をまとめる . 高いスケールの超対称理論における電気双極子モーメントの計算ははじめ hV の寄与が文献 [187, 188] で計算され, WW の寄与が文献 [178–180] で計算された . ここでは先行研究の間違いを修正した文献 [157] の結果を用いる .

まずスフェルミオンの質量スケール M_S 以下での有効理論において CP 位相は湯川結合定数 (今の場合は関係ない) , ヒッグシーノの質量 μ_H , ゲージノの質量 M_i ($i = 1, 2, 3$) そして以下のヒッグス-ヒッグシーノ-ゲージノの相互作用の結合定数 $\tilde{g}_u, \tilde{g}_d, \tilde{g}'_u, \tilde{g}'_d$ に含まれている .

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2} \left(\tilde{g}_u \Phi^\dagger \tilde{W}^a T^a \tilde{H}_u + \tilde{g}'_u Y_{H_u} \Phi^\dagger \tilde{B} \tilde{H}_u + \tilde{g}_d \tilde{\Phi}^\dagger \tilde{W}^a T^a \tilde{H}_d + \tilde{g}'_d Y_{H_d} \tilde{\Phi}^\dagger \tilde{B} \tilde{H}_d \right) + \text{h.c.} \quad (\text{E.79})$$

ここで T^a は $SU(2)_L$ の生成子であり, $Y_{H_u} = 1/2$, $Y_{H_d} = -1/2$ である. Φ は標準模型のヒッグス場で $\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi$ である. またそれぞれの結合定数は以下のようにも書ける.

$$\tilde{g}_u = g \cos \beta, \quad \tilde{g}_d = g \sin \beta, \quad \tilde{g}'_u = g' \cos \beta, \quad \tilde{g}'_d = g' \sin \beta \quad (\text{E.80})$$

ここで g, g' はそれぞれ $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ のゲージ結合定数である. また $\tan \beta \equiv v_u/v_d$ であり, $\langle H_u^0 \rangle = v_u/\sqrt{2}$, $\langle H_d^0 \rangle = v_d/\sqrt{2}$ である. これらのパラメータは一般的には複素数であるが 3 つの位相のみが独立であり, 以下のように与えられる.

$$\phi_1 = \arg(\tilde{g}'_u{}^* \tilde{g}'_d{}^* M_1 \mu) \quad (\text{E.81})$$

$$\phi_2 = \arg(\tilde{g}'_u{}^* \tilde{g}'_d{}^* M_2 \mu) \quad (\text{E.82})$$

$$\xi = \arg(\tilde{g}_u \tilde{g}'_d{}^* \tilde{g}'_d \tilde{g}'_u{}^*) \quad (\text{E.83})$$

ところがスフェルミオンの質量スケール M_S より上の完全な理論とのツリーレベルのつり合いを考えると結合定数の位相に以下の関係式が成り立つ [157].

$$\arg(\tilde{g}_u) = \arg(\tilde{g}'_u), \quad \arg(\tilde{g}_d) = \arg(\tilde{g}'_d) \quad (\text{E.84})$$

そのため $\xi = 0$ となる. 同様に大抵の超対称性の破れの模型では M_1 と M_2 の位相は等しくなり, $\phi_1 = \phi_2$ となる. そのような場合には物理的位相は 1 つである.

チャージーノとニュートラリーノの質量項は式 (E.79) のヒッグス場に真空期待値 $\langle \Phi \rangle = (0, v')^T$ を代入したものとゲージーノとヒッグシーノの質量項を合わせて 2 成分表記では以下で与えられる.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2}(\psi^-)^\top \mathcal{M}_C \psi^+ - \frac{1}{2}(\psi^0)^\top \mathcal{M}_N \psi^0 + \text{h.c.} \quad (\text{E.85})$$

ここでチャージーノとニュートラリーノのゲージの固有状態は以下のように定義されている.

$$\psi^+ \equiv (\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+)^\top \quad (\text{E.86})$$

$$\psi^- \equiv (\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-)^\top \quad (\text{E.87})$$

$$\psi^0 \equiv (\tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0)^\top \quad (\text{E.88})$$

また質量行列は以下のとおりである.

$$\mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} M_2 & \tilde{g}_u v' \\ \tilde{g}_d v' & \mu_H \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\tilde{g}'_d v'/\sqrt{2} & \tilde{g}'_u v'/\sqrt{2} \\ 0 & M_2 & \tilde{g}_d v'/\sqrt{2} & -\tilde{g}_u v'/\sqrt{2} \\ -\tilde{g}'_d v'/\sqrt{2} & \tilde{g}_d v'/\sqrt{2} & 0 & -\mu_H \\ \tilde{g}'_u v'/\sqrt{2} & -\tilde{g}_u v'/\sqrt{2} & -\mu_H & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.89})$$

ここでヒッグスの真空期待値は $v' = v/\sqrt{2} \sim 174 \text{ GeV}$ である.

この質量行列は対角化行列 U, V, N を用いて以下のように対角化できる.

$$\mathcal{M}_C = U^\top \text{diag}(M_1^+, M_2^+) V, \quad \mathcal{M}_N = N^\top \text{diag}(M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0) N \quad (\text{E.90})$$

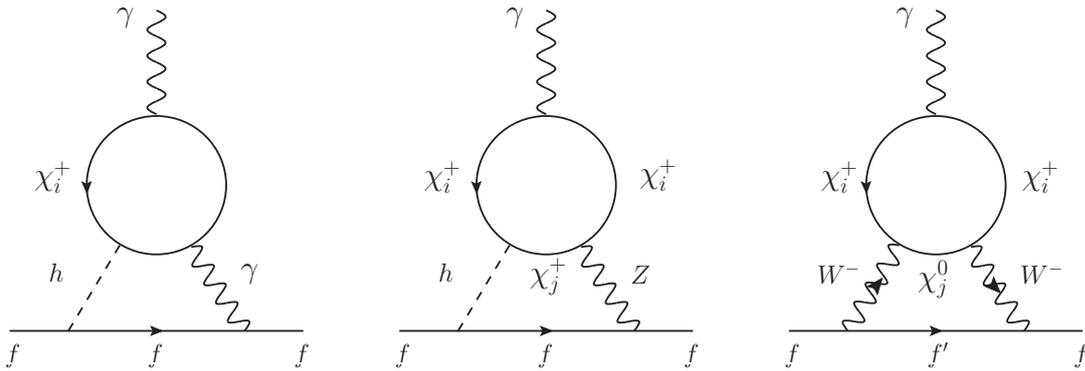


図 E.6: 高いスケールの超対称模型における Barr-Zee ダイアグラム．チャージーノとニュートラリーノがループに回っている． WW のダイアグラムのフェルミオン f はダウン型のフェルミオンである．

この対角化行列を用いればチャージーノとニュートラリーノのゲージの固有状態と質量の固有状態の関係は以下のように与えられる．

$$\chi^0 = N\psi^0, \quad \chi^+ = V\psi^+, \quad \chi^- = U\psi^- \quad (\text{E.91})$$

質量の固有状態では今関係ある相互作用は 4 成分表記で以下ようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{g}{\cos\theta_W} \overline{\chi_i^+} \gamma^\mu (G_{ij}^R P_R + G_{ij}^L P_L) \chi_j^+ Z_\mu \\ & - \left[g \overline{\chi_i^+} \gamma^\mu (C_{ij}^R P_R + C_{ij}^L P_L) \chi_j^0 W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{\chi_i^+} (D_{ij}^R P_R + D_{ij}^L P_L) \chi_j^+ h + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.92})$$

ここで g は $SU(2)_L$ のゲージ結合定数であり，それぞれの量は以下のように定義される．

$$G_{ij}^L = V_{iW^+} c_{W^+} V_{W^+j}^\dagger + V_{ih_u^+} c_{h_u^+} V_{h_u^+j}^\dagger, \quad G_{ij}^{R*} = -U_{iW^-} c_{W^-} U_{W^-j}^\dagger - U_{ih_d^-} c_{h_d^-} U_{h_d^-j}^\dagger \quad (\text{E.93})$$

$$C_{ij}^L = -V_{iW^+} N_{jW_3}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{ih_u^+} N_{jh_u^0}^*, \quad C_{ij}^R = -U_{iW^-} N_{jW_3} - \frac{1}{\sqrt{2}} U_{ih_d^-} N_{jh_d^0} \quad (\text{E.94})$$

$$gD_{ij}^R = \tilde{g}_u^* V_{ih_u^+} U_{jW^-} + \tilde{g}_d^* V_{iW^+} U_{jh_d^-}, \quad D^L = (D^R)^\dagger \quad (\text{E.95})$$

これらの中に出てくる記号は以下のように与えられている．

$$c_f = T_f^3 - \sin^2\theta_W \quad (\text{E.96})$$

$$c_{W^\pm} = \pm \cos^2\theta_W \quad (\text{E.97})$$

$$c_{h_u^+, h_d^-} = \pm \left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W \right) \quad (\text{E.98})$$

標準模型の軽いフェルミオン f の電気双極子モーメントは図 E.6 で与えられる 3 つの Barr-Zee ダイアグラムからの寄与があり，その表式は以下で与えられる．

$$d_f = d_f^{h\gamma} + d_f^{hZ} + d_f^{WW} \quad (\text{E.99})$$

ここでそれぞれは以下で与えられる .

$$d_f^{h\gamma} = \frac{|e|Q_f\alpha^2}{4\sqrt{2}\pi^2 s_W^2} \text{Im}(D_{ii}^R) \frac{m_f M_i^+}{m_W m_h^2} f_{h\gamma}(r_{ih}^+) \quad (\text{E.100})$$

$$d_f^{hZ} = \frac{|e|(T_{fL}^3 - 2s_W^2 Q_f)\alpha^2}{16\sqrt{2}\pi^2 c_W^2 s_W^4} \text{Im}(D_{ij}^R G_{ji}^R - D_{ij}^L G_{ji}^L) \frac{m_f M_i^+}{m_W m_h^2} f_{hZ}(r_{Zh}, r_{ih}^+, r_{jh}^+) \quad (\text{E.101})$$

$$d_{WW}^f = \frac{|e|T_{fL}^3 \alpha^2}{8\pi^2 s_W^4} \text{Im}(C_{ij}^L C_{ij}^{R*}) \frac{m_f M_i^+ M_j^0}{m_W^4} f_{WW}(r_{iW}^+, r_{jW}^0) \quad (\text{E.102})$$

ここで $s_W = \sin \theta_W$, $c_W = \cos \theta_W$ であり, $\alpha = e^2/4\pi$ である . Q_f はフェルミオン f の電荷で T_{fL}^3 は左巻きフェルミオンの弱アイソスピンの第 3 成分である . それぞれの量は以下で定義されている .

$$r_{Zh} \equiv \frac{m_Z^2}{m_h^2}, \quad r_{ih}^+ \equiv \frac{M_i^{+2}}{m_h^2}, \quad r_{iW}^+ \equiv \frac{M_i^{+2}}{m_W^2}, \quad r_{iW}^0 \equiv \frac{M_i^{02}}{m_W^2} \quad (\text{E.103})$$

またループ関数は以下で与えられる .

$$f_{h\gamma}(r) = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} j \left(0, \frac{r}{x(1-x)} \right) \quad (\text{E.104})$$

$$f_{hZ}(r, r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} j \left(r, \frac{xr_1 + (1-x)r_2}{x(1-x)} \right) \quad (\text{E.105})$$

$$f_{WW}(r_1, r_2) = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} j \left(0, \frac{xr_1 + (1-x)r_2}{x(1-x)} \right) \quad (\text{E.106})$$

さらに関数 $j(r, s)$ は以下で定義されている .

$$j(r) = \frac{r \ln r}{r-1}, \quad j(r, s) = \frac{j(r) - j(s)}{r-s} \quad (\text{E.107})$$

次に電気双極子モーメントの QCD 補正の表式を与えておく . 式 (E.100)-(E.102) で与えられている電気双極子モーメントの表式はチャージノの質量スケール M^+ のものであり, 核子のスケールへのくりこみ群方程式の発展は付録 E.4 で与えられているくりこみ群方程式も用いる .

くりこみ群方程式

ここでは式 (6.25) で与えられているスフェルミオンと重いヒッグス粒子を積分した後の有効ラグランジアンそれぞれの結合定数のくりこみ群方程式を書き下す . ここでのくりこみ群方程式は全て重いスカラーの質量スケール M_S 以下のものである . これらはくりこみ群方程式の一般式を書き下してある文献 [166–168] やその超対称性理論版を書き下した文献 [169] を用いて今考えている理論に適用したものである . ここで与えるくりこみ群方程式は文献 [142, 189] によるものである .

ゲージ結合定数のくりこみ群方程式は以下で与えられる .

$$\mu \frac{dg_a}{d\mu} = \frac{g_a^3}{16\pi^2} b_a^{(1)} + \frac{g_a^3}{(16\pi^2)^2} \left[\sum_{b=1}^3 b_{ab}^{(2)} g_b^2 - \sum_{k=u,d,e} d_a^k \text{Tr}(f_k^\dagger f_k) - d_a^{\widetilde{W}} (\tilde{g}_u^2 + \tilde{g}_d^2) - d_a^{\widetilde{B}} (\tilde{g}'_u{}^2 + \tilde{g}'_d{}^2) \right] \quad (\text{E.108})$$

ここで $a = 1, 2, 3$ はゲージ群の種類を表し, ゲージ結合定数は以下のような $SU(5)$ の規格化を用いている.

$$g_3 \equiv g_s, \quad g_2 \equiv g, \quad g_1 \equiv \sqrt{\frac{5}{3}}g' \quad (\text{E.109})$$

またベータ関数の係数は以下で与えられる.

$$b_a^{(1)} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{6}, -5 \right)^T, \quad b_{ab}^{(2)} = \begin{pmatrix} 104/25 & 18/5 & 44/5 \\ 6/5 & 106/3 & 12 \\ 11/10 & 9/2 & 22 \end{pmatrix} \quad (\text{E.110})$$

$$d_a^u = \left(\frac{17}{10}, \frac{3}{2}, 2 \right)^T, \quad d_a^d = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right)^T, \quad d_a^e = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)^T \quad (\text{E.111})$$

$$d_a^{\widetilde{W}} = \left(\frac{9}{20}, \frac{11}{4}, 0 \right)^T, \quad d_a^{\widetilde{B}} = \left(\frac{3}{20}, \frac{1}{4}, 0 \right)^T \quad (\text{E.112})$$

ヒッグス-ヒッグシーノ-ゲージノの相互作用の結合定数のくりこみ群方程式は以下で与えられる.

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}_u = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3\tilde{g}_u \sum_{i=1}^3 C_i g_i^2 + \frac{5}{4}\tilde{g}_u^3 - \frac{1}{2}\tilde{g}_u \tilde{g}_d^2 + \frac{1}{4}\tilde{g}_u \tilde{g}'^2 + \tilde{g}_d \tilde{g}' \tilde{g}' + \tilde{g}_u T \right] \quad (\text{E.113})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}'_u = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3\tilde{g}'_u \sum_{i=1}^3 C'_i g_i^2 + \frac{3}{4}\tilde{g}'_u^3 + \frac{3}{2}\tilde{g}'_u \tilde{g}_d^2 + \frac{3}{4}\tilde{g}'_u \tilde{g}'^2 + 3\tilde{g}'_d \tilde{g}_d \tilde{g}' + \tilde{g}'_u T \right] \quad (\text{E.114})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}_d = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3\tilde{g}_d \sum_{i=1}^3 C_i g_i^2 + \frac{5}{4}\tilde{g}_d^3 - \frac{1}{2}\tilde{g}_d \tilde{g}_u^2 + \frac{1}{4}\tilde{g}_d \tilde{g}'^2 + \tilde{g}_u \tilde{g}' \tilde{g}' + \tilde{g}_d T \right] \quad (\text{E.115})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}'_d = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3\tilde{g}'_d \sum_{i=1}^3 C'_i g_i^2 + \frac{3}{4}\tilde{g}'_d^3 + \frac{3}{2}\tilde{g}'_d \tilde{g}_u^2 + \frac{3}{4}\tilde{g}'_d \tilde{g}'^2 + 3\tilde{g}'_u \tilde{g}_u \tilde{g}' + \tilde{g}'_d T \right] \quad (\text{E.116})$$

それぞれの量は以下で定義されている.

$$T \equiv \text{Tr}(3f_u^\dagger f_u + 3f_d^\dagger f_d + f_e^\dagger f_e) + \frac{3}{2}(\tilde{g}_u^2 + \tilde{g}_d^2) + \frac{1}{2}(\tilde{g}'^2 + \tilde{g}'_d^2) \quad (\text{E.117})$$

$$C = \left(\frac{3}{20}, \frac{11}{4}, 0 \right), \quad C' = \left(\frac{3}{20}, \frac{3}{4}, 0 \right) \quad (\text{E.118})$$

湯川結合定数は 2 ループの寄与の中でしか現れないので 1 ループのくりこみ群方程式を考えれば十分であり, それらは以下で与えられる.

$$\mu \frac{d}{d\mu} f_u = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3 \sum_{a=1}^3 c_a^u g_a^2 + \frac{3}{2} f_u^\dagger f_u - \frac{3}{2} f_d^\dagger f_d + T \right] f_u \quad (\text{E.119})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} f_d = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3 \sum_{a=1}^3 c_a^d g_a^2 - \frac{3}{2} f_u^\dagger f_u + \frac{3}{2} f_d^\dagger f_d + T \right] f_d \quad (\text{E.120})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} f_e = \frac{1}{16\pi^2} \left[-3 \sum_{a=1}^3 c_a^e g_a^2 + \frac{3}{2} f_e^\dagger f_e + T \right] f_e \quad (\text{E.121})$$

ここでそれぞれの量は以下で与えられる .

$$c_a^u = \left(\frac{17}{60}, \frac{3}{4}, \frac{8}{3} \right)^T, \quad c_a^d = \left(\frac{1}{12}, \frac{3}{4}, \frac{8}{3} \right)^T, \quad c_a^e = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right)^T \quad (\text{E.122})$$

ゲージノとヒッグシーノの質量のくりこみ群方程式は以下で与えられる .

$$\mu \frac{d}{d\mu} M_3 = \frac{1}{16\pi^2} (-18g_3^2 M_3) + \frac{1}{(16\pi^2)^2} (-18c_{\tilde{g}} g_3^4 M_3) \quad (\text{E.123})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} M_2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[(-12g_2^2 + \tilde{g}_u^2 + \tilde{g}_d^2) M_2 + 4\tilde{g}_u \tilde{g}_d \mu_H \right] \quad (\text{E.124})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} M_1 = \frac{1}{16\pi^2} \left[(\tilde{g}'_u{}^2 + \tilde{g}'_d{}^2) M_1 + 4\tilde{g}'_u \tilde{g}'_d \mu_H \right] \quad (\text{E.125})$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mu_H = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{4} \left\{ -18 \left(\frac{g_1^2}{5} + g_2^2 \right) + 3(\tilde{g}_u^2 + \tilde{g}_d^2) + \tilde{g}'_u{}^2 + \tilde{g}'_d{}^2 \right\} \mu_H + 3\tilde{g}_u \tilde{g}_d M_2 + \tilde{g}'_u \tilde{g}'_d M_1 \right] \quad (\text{E.126})$$

ここでグルイーノの質量に対するくりこみ群方程式は2ループまで書いてあり, 1項目が1ループの寄与で2項目が2ループの寄与である. また $c_{\tilde{g}}$ は $\overline{\text{MS}}$ では $c_{\tilde{g}} = 38/3$ であり, $\overline{\text{DR}}$ では $c_{\tilde{g}} = 10$ である .

グルイーノの走る質量 (running mass) と極質量 (pole mass) の関係は以下で与えられる [190] .

$$M_{\tilde{g}}^{\text{pole}} = M_3(\mu) \left[1 + \frac{g_3^2}{16\pi^2} \left(C_{\tilde{g}} + 9 \ln \frac{\mu^2}{M_3^2} \right) \right] \quad (\text{E.127})$$

ここで $\overline{\text{MS}}$ では $C_{\tilde{g}} = 12$ であり, $\overline{\text{DR}}$ では $C_{\tilde{g}} = 15$ である .

ヒッグスの4点結合定数のくりこみ群方程式は以下で与えられる .

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \lambda = \frac{1}{16\pi^2} & \left[24\lambda^2 + \lambda \left\{ -9 \left(\frac{g_1^2}{5} + g_2^2 \right) + 6(\tilde{g}_u^2 + \tilde{g}_d^2) + 2(\tilde{g}'_u{}^2 + \tilde{g}'_d{}^2) \right. \right. \\ & + 4\text{Tr}(3f_u^\dagger f_u + 3f_d^\dagger f_d + f_e^\dagger f_e) \left. \right\} + \frac{9}{2} \left(\frac{g_2^4}{2} + \frac{3g_1^4}{50} + \frac{g_1^2 g_2^2}{5} \right) \\ & - 5(\tilde{g}_u^4 + \tilde{g}_d^4) - 2\tilde{g}_u^2 \tilde{g}_d^2 - (\tilde{g}'_u{}^2 + \tilde{g}'_d{}^2)^2 - 2(\tilde{g}_u \tilde{g}'_u + \tilde{g}_d \tilde{g}'_d)^2 \\ & \left. - 4\text{Tr}[3(f_u^\dagger f_u)^2 + 3(f_d^\dagger f_d)^2 + (f_e^\dagger f_e)^2] \right] \quad (\text{E.128}) \end{aligned}$$

参考文献

- [1] S. L. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579–588.
- [2] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.
- [3] A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions,” *Conf. Proc.* **C680519** (1968) 367–377.
- [4] **ATLAS Collaboration** Collaboration, G. Aad *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys.Lett.* **B716** (2012) 1–29, [arXiv:1207.7214 \[hep-ex\]](#).
- [5] **CMS Collaboration** Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC,” *Phys.Lett.* **B716** (2012) 30–61, [arXiv:1207.7235 \[hep-ex\]](#).
- [6] E. Shabalin, “Electric Dipole Moment of Quark in a Gauge Theory with Left-Handed Currents,” *Sov.J.Nucl.Phys.* **28** (1978) 75.
- [7] J. Hisano, S. Matsumoto, and M. M. Nojiri, “Unitarity and higher order corrections in neutralino dark matter annihilation into two photons,” *Phys. Rev.* **D67** (2003) 075014, [arXiv:hep-ph/0212022 \[hep-ph\]](#).
- [8] J. Hisano, S. Matsumoto, and M. M. Nojiri, “Explosive dark matter annihilation,” *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 031303, [arXiv:hep-ph/0307216 \[hep-ph\]](#).
- [9] J. Hisano, S. Matsumoto, M. M. Nojiri, and O. Saito, “Direct detection of the Wino and Higgsino-like neutralino dark matters at one-loop level,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 015007, [arXiv:hep-ph/0407168 \[hep-ph\]](#).
- [10] J. Hisano, S. Matsumoto, M. M. Nojiri, and O. Saito, “Non-perturbative effect on dark matter annihilation and gamma ray signature from galactic center,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 063528, [arXiv:hep-ph/0412403 \[hep-ph\]](#).
- [11] J. Hisano, S. Matsumoto, O. Saito, and M. Senami, “Heavy wino-like neutralino dark matter annihilation into antiparticles,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 055004, [arXiv:hep-ph/0511118 \[hep-ph\]](#).
- [12] J. Hisano, S. Matsumoto, M. Nagai, O. Saito, and M. Senami, “Non-perturbative effect on thermal relic abundance of dark matter,” *Phys. Lett.* **B646** (2007) 34–38, [arXiv:hep-ph/0610249 \[hep-ph\]](#).
- [13] M. Cirelli, N. Fornengo, and A. Strumia, “Minimal dark matter,” *Nucl.Phys.* **B753** (2006) 178–194, [arXiv:hep-ph/0512090 \[hep-ph\]](#).
- [14] M. Cirelli, A. Strumia, and M. Tamburini, “Cosmology and Astrophysics of Minimal Dark Matter,” *Nucl. Phys.* **B787** (2007) 152–175, [arXiv:0706.4071 \[hep-ph\]](#).
- [15] S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, “Supersymmetry and the Scale of Unification,” *Phys.Rev.* **D24** (1981) 1681–1683.
- [16] W. J. Marciano and G. Senjanovic, “Predictions of Supersymmetric Grand Unified Theories,” *Phys. Rev.* **D25** (1982) 3092.
- [17] M. Einhorn and D. Jones, “The Weak Mixing Angle and Unification Mass in Supersymmetric SU(5),” *Nucl.Phys.* **B196** (1982) 475.

- [18] U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstenau, “Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP,” *Phys. Lett.* **B260** (1991) 447–455.
- [19] P. Langacker and M.-x. Luo, “Implications of precision electroweak experiments for M_t , ρ_0 , $\sin^2 \theta_W$ and grand unification,” *Phys. Rev.* **D44** (1991) 817–822.
- [20] G. F. Giudice and A. Strumia, “Probing High-Scale and Split Supersymmetry with Higgs Mass Measurements,” *Nucl. Phys.* **B858** (2012) 63–83, [arXiv:1108.6077 \[hep-ph\]](#).
- [21] M. Ibe and T. T. Yanagida, “The Lightest Higgs Boson Mass in Pure Gravity Mediation Model,” *Phys.Lett.* **B709** (2012) 374–380, [arXiv:1112.2462 \[hep-ph\]](#).
- [22] M. Ibe, S. Matsumoto, and T. T. Yanagida, “Pure Gravity Mediation with $m_{3/2} = 10\text{--}100\text{TeV}$,” *Phys.Rev.* **D85** (2012) 095011, [arXiv:1202.2253 \[hep-ph\]](#).
- [23] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero, and L. Silvestrini, “A Complete analysis of FCNC and CP constraints in general SUSY extensions of the standard model,” *Nucl.Phys.* **B477** (1996) 321–352, [arXiv:hep-ph/9604387 \[hep-ph\]](#).
- [24] J. Hisano, T. Kuwahara, and N. Nagata, “Grand Unification in High-scale Supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B723** (2013) 324–329, [arXiv:1304.0343 \[hep-ph\]](#).
- [25] J. Hisano, D. Kobayashi, T. Kuwahara, and N. Nagata, “Decoupling Can Revive Minimal Supersymmetric SU(5),” *JHEP* **1307** (2013) 038, [arXiv:1304.3651 \[hep-ph\]](#).
- [26] N. Nagata and S. Shirai, “Sfermion Flavor and Proton Decay in High-Scale Supersymmetry,” *JHEP* **03** (2014) 049, [arXiv:1312.7854 \[hep-ph\]](#).
- [27] G. F. Giudice, M. A. Luty, H. Murayama, and R. Rattazzi, “Gaugino mass without singlets,” *JHEP* **12** (1998) 027, [arXiv:hep-ph/9810442 \[hep-ph\]](#).
- [28] L. Randall and R. Sundrum, “Out of this world supersymmetry breaking,” *Nucl. Phys.* **B557** (1999) 79–118, [arXiv:hep-th/9810155 \[hep-th\]](#).
- [29] A. E. Nelson and N. J. Weiner, “Extended anomaly mediation and new physics at 10-TeV,” [arXiv:hep-ph/0210288 \[hep-ph\]](#).
- [30] K. Hsieh and M. A. Luty, “Mixed gauge and anomaly mediation from new physics at 10-TeV,” *JHEP* **06** (2007) 062, [arXiv:hep-ph/0604256 \[hep-ph\]](#).
- [31] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508–509.
- [32] N. Cabibbo, “Unitary Symmetry and Leptonic Decays,” *Phys.Rev.Lett.* **10** (1963) 531–533.
- [33] M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction,” *Prog.Theor.Phys.* **49** (1973) 652–657.
- [34] S. L. Adler, “Axial vector vertex in spinor electrodynamics,” *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426–2438.
- [35] J. S. Bell and R. Jackiw, “A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model,” *Nuovo Cim.* **A60** (1969) 47–61.
- [36] W. A. Bardeen, “Anomalous Ward identities in spinor field theories,” *Phys. Rev.* **184** (1969) 1848–1857.
- [37] V. Baluni, “CP Violating Effects in QCD,” *Phys. Rev.* **D19** (1979) 2227–2230.
- [38] R. J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano, and E. Witten, “Chiral Estimate of the Electric Dipole Moment of the Neutron in Quantum Chromodynamics,” *Phys. Lett.* **B88** (1979) 123. [Erratum: *Phys. Lett.*B91,487(1980)].
- [39] R. D. Peccei, “The Strong CP problem and axions,” *Lect. Notes Phys.* **741** (2008) 3–17, [arXiv:hep-ph/0607268 \[hep-ph\]](#). [3(2006)].

- [40] J. Hisano, J. Y. Lee, N. Nagata, and Y. Shimizu, “Reevaluation of Neutron Electric Dipole Moment with QCD Sum Rules,” *Phys. Rev.* **D85** (2012) 114044, [arXiv:1204.2653 \[hep-ph\]](#).
- [41] C. A. Baker *et al.*, “An Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron,” *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 131801, [arXiv:hep-ex/0602020 \[hep-ex\]](#).
- [42] R. Peccei and H. R. Quinn, “CP Conservation in the Presence of Instantons,” *Phys.Rev.Lett.* **38** (1977) 1440–1443.
- [43] R. D. Peccei and H. R. Quinn, “Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons,” *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1791–1797.
- [44] L.-L. Chau and W.-Y. Keung, “Comments on the Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix,” *Phys.Rev.Lett.* **53** (1984) 1802.
- [45] L. Wolfenstein, “Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix,” *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945.
- [46] A. J. Buras, M. E. Lautenbacher, and G. Ostermaier, “Waiting for the top quark mass, $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$, $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ mixing and CP asymmetries in B -decays,” *Phys. Rev.* **D50** (1994) 3433–3446, [arXiv:hep-ph/9403384 \[hep-ph\]](#).
- [47] **CKMfitter Group** Collaboration, J. Charles, A. Hocker, H. Lacker, S. Laplace, F. R. Le Diberder, J. Malcles, J. Ocariz, M. Pivk, and L. Roos, “CP violation and the CKM matrix: Assessing the impact of the asymmetric B factories,” *Eur. Phys. J.* **C41** (2005) 1–131, [arXiv:hep-ph/0406184 \[hep-ph\]](#).
- [48] C. Jarlskog, “Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation,” *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039.
- [49] C. Jarlskog, “A Basis Independent Formulation of the Connection Between Quark Mass Matrices, CP Violation and Experiment,” *Z. Phys.* **C29** (1985) 491–497.
- [50] A. Hocker, H. Lacker, S. Laplace, and F. Le Diberder, “A New approach to a global fit of the CKM matrix,” *Eur. Phys. J.* **C21** (2001) 225–259, [arXiv:hep-ph/0104062 \[hep-ph\]](#).
- [51] **UTfit** Collaboration, M. Bona *et al.*, “The 2004 UTfit collaboration report on the status of the unitarity triangle in the standard model,” *JHEP* **07** (2005) 028, [arXiv:hep-ph/0501199 \[hep-ph\]](#).
- [52] **UTfit** Collaboration, M. Bona *et al.*, “Model-independent constraints on $\Delta F = 2$ operators and the scale of new physics,” *JHEP* **03** (2008) 049, [arXiv:0707.0636 \[hep-ph\]](#).
- [53] **Particle Data Group** Collaboration, K. A. Olive *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Chin. Phys.* **C38** (2014) 090001.
- [54] M. Pospelov and A. Ritz, “Electric dipole moments as probes of new physics,” *Annals Phys.* **318** (2005) 119–169, [arXiv:hep-ph/0504231 \[hep-ph\]](#).
- [55] M. Raidal *et al.*, “Flavour physics of leptons and dipole moments,” *Eur. Phys. J.* **C57** (2008) 13–182, [arXiv:0801.1826 \[hep-ph\]](#).
- [56] A. De Rujula, M. B. Gavela, O. Pene, and F. J. Vegas, “Signets of CP violation,” *Nucl. Phys.* **B357** (1991) 311–356.
- [57] S. Weinberg, “Larger Higgs Exchange Terms in the Neutron Electric Dipole Moment,” *Phys.Rev.Lett.* **63** (1989) 2333.
- [58] S. Weinberg, “Baryon and Lepton Nonconserving Processes,” *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1566–1570.
- [59] L. I. Schiff, “Measurability of Nuclear Electric Dipole Moments,” *Phys. Rev.* **132** (1963) 2194–2200.

- [60] J. S. M. Ginges and V. V. Flambaum, “Violations of fundamental symmetries in atoms and tests of unification theories of elementary particles,” *Phys. Rept.* **397** (2004) 63–154, [arXiv:physics/0309054 \[physics\]](#).
- [61] P. Sandars, “The electric dipole moment of an atom,” *Physics Letters* **14** no. 3, (1965) 194–196.
- [62] P. Sandars, “Enhancement factor for the electric dipole moment of the valence electron in an alkali atom,” *Physics Letters* **22** no. 3, (1966) 290–291.
- [63] Z. W. Liu and H. P. Kelly, “Analysis of atomic electric dipole moment in thallium by all-order calculations in many-body perturbation theory,” *Phys. Rev. A* **45** (Apr, 1992) R4210–R4213. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.R4210>.
- [64] A.-M. Martensson-Pendrill, *Methods in Computational Chemistry, Volume 5: Atomic, Molecular Properties*. PhD thesis, ed. S. Wilson (Plenum Press, New York 1992).
- [65] A.-M. Mårtensson-Pendrill and E. Lindroth, “Limit on a p- and t-violating electron-nucleon interaction,” *EPL (Europhysics Letters)* **15** no. 2, (1991) 155.
- [66] ACME Collaboration, J. Baron *et al.*, “Order of Magnitude Smaller Limit on the Electric Dipole Moment of the Electron,” *Science* **343** (2014) 269–272, [arXiv:1310.7534 \[physics.atom-ph\]](#).
- [67] W. C. Griffith, M. D. Swallows, T. H. Loftus, M. V. Romalis, B. R. Heckel, and E. N. Fortson, “Improved Limit on the Permanent Electric Dipole Moment of Hg-199,” *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 101601.
- [68] *Fundamental Physics at the Intensity Frontier*. 2012. [arXiv:1205.2671 \[hep-ex\]](#). <http://inspirehep.net/record/1114323/files/arXiv:1205.2671.pdf>.
- [69] K. Kumar, Z.-T. Lu, and M. J. Ramsey-Musolf, “Working Group Report: Nucleons, Nuclei, and Atoms,” in *Community Summer Study 2013: Snowmass on the Mississippi (CSS2013) Minneapolis, MN, USA, July 29-August 6, 2013*. 2013. [arXiv:1312.5416 \[hep-ph\]](#). <http://inspirehep.net/record/1272872/files/arXiv:1312.5416.pdf>.
- [70] A. Lehrach, B. Lorentz, W. Morse, N. Nikolaev, and F. Rathmann, “Precursor Experiments to Search for Permanent Electric Dipole Moments (EDMs) of Protons and Deuterons at COSY,” [arXiv:1201.5773 \[hep-ex\]](#).
- [71] **Storage Ring EDM** Collaboration, Y. K. Semertzidis, “A Storage Ring proton Electric Dipole Moment experiment: most sensitive experiment to CP-violation beyond the Standard Model,” in *Particles and fields. Proceedings, Meeting of the Division of the American Physical Society, DPF 2011, Providence, USA, August 9-13, 2011*. 2011. [arXiv:1110.3378 \[physics.acc-ph\]](#). <http://inspirehep.net/record/940136/files/arXiv:1110.3378.pdf>.
- [72] J. J. Hudson, D. M. Kara, I. J. Smallman, B. E. Sauer, M. R. Tarbutt, and E. A. Hinds, “Improved measurement of the shape of the electron,” *Nature* **473** (2011) 493–496.
- [73] A. C. Vutha *et al.*, “Search for the electric dipole moment of the electron with thorium monoxide,” *J. Phys.* **B43** (2010) 074007, [arXiv:0908.2412 \[physics.atom-ph\]](#).
- [74] I. Khriplovich, “Quark Electric Dipole Moment and Induced θ Term in the Kobayashi-Maskawa Model,” *Phys.Lett.* **B173** (1986) 193–196.
- [75] A. Czarnecki and B. Krause, “Neutron electric dipole moment in the standard model: Valence quark contributions,” *Phys.Rev.Lett.* **78** (1997) 4339–4342, [arXiv:hep-ph/9704355 \[hep-ph\]](#).
- [76] M. E. Pospelov, “CP odd effective gluonic Lagrangian in the Kobayashi-Maskawa model,” *Phys. Lett.* **B328** (1994) 441–449, [arXiv:hep-ph/9402317 \[hep-ph\]](#).
- [77] M. B. Gavela, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pene, J. C. Raynal, and T. N. Pham, “CP Violation Induced by Penguin Diagrams and the Neutron Electric Dipole Moment,” *Phys. Lett.* **B109** (1982) 215.

- [78] I. B. Khriplovich and A. R. Zhitnitsky, “What Is the Value of the Neutron Electric Dipole Moment in the Kobayashi-Maskawa Model?,” *Phys. Lett.* **B109** (1982) 490.
- [79] B. H. J. McKellar, S. R. Choudhury, X.-G. He, and S. Pakvasa, “The Neutron Electric Dipole Moment in the Standard K^-m Model,” *Phys. Lett.* **B197** (1987) 556.
- [80] M. Pospelov and I. Khriplovich, “Electric dipole moment of the W boson and the electron in the Kobayashi-Maskawa model,” *Sov.J.Nucl.Phys.* **53** (1991) 638–640.
- [81] **ATLAS, CMS** Collaboration, G. Aad *et al.*, “Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments,” *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 191803, [arXiv:1503.07589 \[hep-ex\]](#).
- [82] **LHC Higgs Cross Section Working Group** Collaboration, S. Dittmaier *et al.*, “Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 1. Inclusive Observables,” [arXiv:1101.0593 \[hep-ph\]](#).
- [83] S. Dittmaier *et al.*, “Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 2. Differential Distributions,” [arXiv:1201.3084 \[hep-ph\]](#).
- [84] **LHC Higgs Cross Section Working Group** Collaboration, J. R. Andersen *et al.*, “Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 3. Higgs Properties,” [arXiv:1307.1347 \[hep-ph\]](#).
- [85] **ATLAS, CMS** Collaboration, M. Flechl, “Higgs physics: Review of recent results and prospects from ATLAS and CMS,” *J. Phys. Conf. Ser.* **631** no. 1, (2015) 012028, [arXiv:1503.00632 \[hep-ex\]](#).
- [86] J. R. Ellis, M. K. Gaillard, and D. V. Nanopoulos, “A Phenomenological Profile of the Higgs Boson,” *Nucl.Phys.* **B106** (1976) 292.
- [87] M. A. Shifman, A. Vainshtein, M. Voloshin, and V. I. Zakharov, “Low-Energy Theorems for Higgs Boson Couplings to Photons,” *Sov.J.Nucl.Phys.* **30** (1979) 711–716.
- [88] M. Gavela, G. Girardi, C. Malleville, and P. Sorba, “A Nonlinear R_ξ Gauge Condition for the Electroweak $SU(2)\times U(1)$ Model,” *Nucl.Phys.* **B193** (1981) 257.
- [89] A. Djouadi, “The Anatomy of electro-weak symmetry breaking. I: The Higgs boson in the standard model,” *Phys.Rept.* **457** (2008) 1–216, [arXiv:hep-ph/0503172 \[hep-ph\]](#).
- [90] **ATLAS** Collaboration, G. Aad *et al.*, “Measurement of Higgs boson production in the diphoton decay channel in pp collisions at center-of-mass energies of 7 and 8 TeV with the ATLAS detector,” *Phys. Rev.* **D90** no. 11, (2014) 112015, [arXiv:1408.7084 \[hep-ex\]](#).
- [91] **CMS** Collaboration, V. Khachatryan *et al.*, “Observation of the diphoton decay of the Higgs boson and measurement of its properties,” *Eur. Phys. J.* **C74** no. 10, (2014) 3076, [arXiv:1407.0558 \[hep-ex\]](#).
- [92] **ATLAS** Collaboration, “Physics at a High-Luminosity LHC with ATLAS,” in *Community Summer Study 2013: Snowmass on the Mississippi (CSS2013) Minneapolis, MN, USA, July 29-August 6, 2013*. 2013. [arXiv:1307.7292 \[hep-ex\]](#). <http://inspirehep.net/record/1245017/files/arXiv:1307.7292.pdf>.
- [93] **CMS** Collaboration, “Projected Performance of an Upgraded CMS Detector at the LHC and HL-LHC: Contribution to the Snowmass Process,” in *Community Summer Study 2013: Snowmass on the Mississippi (CSS2013) Minneapolis, MN, USA, July 29-August 6, 2013*. 2013. [arXiv:1307.7135](#). <http://inspirehep.net/record/1244669/files/arXiv:1307.7135.pdf>.
- [94] H. Baer, T. Barklow, K. Fujii, Y. Gao, A. Hoang, S. Kanemura, J. List, H. E. Logan, A. Nomerotski, M. Perelstein, *et al.*, “The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 2: Physics,” [arXiv:1306.6352 \[hep-ph\]](#).
- [95] D. McKeen, M. Pospelov, and A. Ritz, “Modified Higgs branching ratios versus CP and lepton flavor violation,” *Phys.Rev.* **D86** (2012) 113004, [arXiv:1208.4597 \[hep-ph\]](#).

- [96] T. Falk, K. A. Olive, and M. Srednicki, “Heavy sneutrinos as dark matter,” *Phys. Lett.* **B339** (1994) 248–251, [arXiv:hep-ph/9409270](#) [hep-ph].
- [97] J. Hisano, K. Ishiwata, N. Nagata, and T. Takesako, “Direct Detection of Electroweak-Interacting Dark Matter,” *JHEP* **1107** (2011) 005, [arXiv:1104.0228](#) [hep-ph].
- [98] T. Falk, A. Ferstl, and K. A. Olive, “Variations of the neutralino elastic cross-section with CP violating phases,” *Astropart. Phys.* **13** (2000) 301–316, [arXiv:hep-ph/9908311](#) [hep-ph].
- [99] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, “Supersymmetric dark matter,” *Phys.Rept.* **267** (1996) 195–373, [arXiv:hep-ph/9506380](#) [hep-ph].
- [100] M. Drees and M. Nojiri, “Neutralino - nucleon scattering revisited,” *Phys.Rev.* **D48** (1993) 3483–3501, [arXiv:hep-ph/9307208](#) [hep-ph].
- [101] J. Hisano, K. Ishiwata, and N. Nagata, “Gluon contribution to the dark matter direct detection,” *Phys.Rev.* **D82** (2010) 115007, [arXiv:1007.2601](#) [hep-ph].
- [102] A. Corsetti and P. Nath, “Gaugino mass nonuniversality and dark matter in SUGRA, strings and D-brane models,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 125010, [arXiv:hep-ph/0003186](#) [hep-ph].
- [103] H. Ohki, H. Fukaya, S. Hashimoto, T. Kaneko, H. Matsufuru, J. Noaki, T. Onogi, E. Shintani, and N. Yamada, “Nucleon sigma term and strange quark content from lattice QCD with exact chiral symmetry,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 054502, [arXiv:0806.4744](#) [hep-lat].
- [104] H.-Y. Cheng, “Low-energy Interactions of Scalar and Pseudoscalar Higgs Bosons With Baryons,” *Phys. Lett.* **B219** (1989) 347.
- [105] LUX Collaboration, D. S. Akerib *et al.*, “First results from the LUX dark matter experiment at the Sanford Underground Research Facility,” *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 091303, [arXiv:1310.8214](#) [astro-ph.CO].
- [106] XENON1T Collaboration, E. Aprile, “The XENON1T Dark Matter Search Experiment,” *Springer Proc. Phys.* **148** (2013) 93–96, [arXiv:1206.6288](#) [astro-ph.IM].
- [107] P. Cushman *et al.*, “Working Group Report: WIMP Dark Matter Direct Detection,” in *Community Summer Study 2013: Snowmass on the Mississippi (CSS2013) Minneapolis, MN, USA, July 29-August 6, 2013*. 2013. [arXiv:1310.8327](#) [hep-ex]. <http://inspirehep.net/record/1262767/files/arXiv:1310.8327.pdf>.
- [108] J. Hisano, D. Kobayashi, N. Mori, and E. Senaha, “Effective Interaction of Electroweak-Interacting Dark Matter with Higgs Boson and Its Phenomenology,” *Phys. Lett.* **B742** (2015) 80–85, [arXiv:1410.3569](#) [hep-ph].
- [109] N. Nagata and S. Shirai, “Electroweakly-Interacting Dirac Dark Matter,” *Phys. Rev.* **D91** no. 5, (2015) 055035, [arXiv:1411.0752](#) [hep-ph].
- [110] N. Nagata and S. Shirai, “Higgsino Dark Matter in High-Scale Supersymmetry,” *JHEP* **01** (2015) 029, [arXiv:1410.4549](#) [hep-ph].
- [111] H.-C. Cheng, B. A. Dobrescu, and K. T. Matchev, “Generic and chiral extensions of the supersymmetric standard model,” *Nucl. Phys.* **B543** (1999) 47–72, [arXiv:hep-ph/9811316](#) [hep-ph].
- [112] S. M. Barr and A. Zee, “Electric Dipole Moment of the Electron and of the Neutron,” *Phys.Rev.Lett.* **65** (1990) 21–24.
- [113] J. C. Ward, “An Identity in Quantum Electrodynamics,” *Phys. Rev.* **78** (1950) 182.
- [114] K. Fuyuto, J. Hisano, N. Nagata, and K. Tsumura, “QCD Corrections to Quark (Chromo)Electric Dipole Moments in High-scale Supersymmetry,” *JHEP* **12** (2013) 010, [arXiv:1308.6493](#) [hep-ph].

- [115] M. Voloshin, “CP Violation in Higgs Diphoton Decay in Models with Vectorlike Heavy Fermions,” *Phys.Rev.* **D86** (2012) 093016, [arXiv:1208.4303 \[hep-ph\]](#).
- [116] J. Fan and M. Reece, “Probing Charged Matter Through Higgs Diphoton Decay, Gamma Ray Lines, and EDMs,” *JHEP* **1306** (2013) 004, [arXiv:1301.2597](#).
- [117] J. Hisano, K. Ishiwata, and N. Nagata, “A complete calculation for direct detection of Wino dark matter,” *Phys.Lett.* **B690** (2010) 311–315, [arXiv:1004.4090 \[hep-ph\]](#).
- [118] Y. Sakemi *et al.*, “Search for a permanent EDM using laser cooled radioactive atom,” *J. Phys. Conf. Ser.* **302** (2011) 012051.
- [119] D. M. Kara, I. J. Smallman, J. J. Hudson, B. E. Sauer, M. R. Tarbutt, and E. A. Hinds, “Measurement of the electron’s electric dipole moment using YbF molecules: methods and data analysis,” *New J. Phys.* **14** (2012) 103051, [arXiv:1208.4507 \[physics.atom-ph\]](#).
- [120] D. Kawall, “Searching for the electron EDM in a storage ring,” *J. Phys. Conf. Ser.* **295** (2011) 012031.
- [121] S. P. Martin, “A Supersymmetry primer,” *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.* **21** (2010) 1–153, [arXiv:hep-ph/9709356 \[hep-ph\]](#).
- [122] F. Zwirner, “Observable Delta B=2 Transitions Without Nucleon Decay in a Minimal Supersymmetric Extension of the Standard Model,” *Phys. Lett.* **B132** (1983) 103–106.
- [123] S. Dawson, “R-Parity Breaking in Supersymmetric Theories,” *Nucl. Phys.* **B261** (1985) 297.
- [124] R. Barbieri and A. Masiero, “Supersymmetric Models with Low-Energy Baryon Number Violation,” *Nucl. Phys.* **B267** (1986) 679.
- [125] S. Dimopoulos and L. J. Hall, “Lepton and Baryon Number Violating Collider Signatures from Supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B207** (1988) 210.
- [126] V. D. Barger, G. F. Giudice, and T. Han, “Some New Aspects of Supersymmetry R-Parity Violating Interactions,” *Phys. Rev.* **D40** (1989) 2987.
- [127] R. M. Godbole, P. Roy, and X. Tata, “Tau signals of R-parity breaking at LEP-200,” *Nucl. Phys.* **B401** (1993) 67–92, [arXiv:hep-ph/9209251 \[hep-ph\]](#).
- [128] I. Hinchliffe and T. Kaeding, “B+L violating couplings in the minimal supersymmetric Standard Model,” *Phys. Rev.* **D47** (1993) 279–284.
- [129] G. Bhattacharyya and D. Choudhury, “D and tau decays: Placing new bounds on R-parity violating supersymmetric coupling,” *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 1699–1704, [arXiv:hep-ph/9503263 \[hep-ph\]](#).
- [130] G. R. Farrar and P. Fayet, “Phenomenology of the Production, Decay, and Detection of New Hadronic States Associated with Supersymmetry,” *Phys.Lett.* **B76** (1978) 575–579.
- [131] L. J. Hall, V. A. Kostelecky, and S. Raby, “New Flavor Violations in Supergravity Models,” *Nucl. Phys.* **B267** (1986) 415.
- [132] F. Gabbiani and A. Masiero, “Superheavy Contributions to F_{nc} in the Flipped $SU(5) \times U(1)$,” *Phys. Lett.* **B209** (1988) 289–294.
- [133] R. Barbieri and L. J. Hall, “Signals for supersymmetric unification,” *Phys. Lett.* **B338** (1994) 212–218, [arXiv:hep-ph/9408406 \[hep-ph\]](#).
- [134] R. Barbieri, L. J. Hall, and A. Strumia, “Violations of lepton flavor and CP in supersymmetric unified theories,” *Nucl. Phys.* **B445** (1995) 219–251, [arXiv:hep-ph/9501334 \[hep-ph\]](#).
- [135] H. Goldberg, “Constraint on the Photino Mass from Cosmology,” *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1419. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 103,099905(2009)].

- [136] J. R. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, K. A. Olive, and M. Srednicki, “Supersymmetric Relics from the Big Bang,” *Nucl. Phys.* **B238** (1984) 453–476.
- [137] H. E. Haber and R. Hempfling, “Can the mass of the lightest Higgs boson of the minimal supersymmetric model be larger than $m(Z)$?,” *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1815–1818.
- [138] Y. Okada, M. Yamaguchi, and T. Yanagida, “Upper bound of the lightest Higgs boson mass in the minimal supersymmetric standard model,” *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 1–6.
- [139] Y. Okada, M. Yamaguchi, and T. Yanagida, “Renormalization group analysis on the Higgs mass in the softly broken supersymmetric standard model,” *Phys. Lett.* **B262** (1991) 54–58.
- [140] J. R. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner, “Radiative corrections to the masses of supersymmetric Higgs bosons,” *Phys. Lett.* **B257** (1991) 83–91.
- [141] J. R. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner, “On radiative corrections to supersymmetric Higgs boson masses and their implications for LEP searches,” *Phys. Lett.* **B262** (1991) 477–484.
- [142] G. F. Giudice and A. Romanino, “Split supersymmetry,” *Nucl. Phys.* **B699** (2004) 65–89, [arXiv:hep-ph/0406088 \[hep-ph\]](#). [Erratum: *Nucl. Phys.* **B706**,65(2005)].
- [143] J. Hisano, D. Kobayashi, W. Kuramoto, and T. Kuwahara, “Nucleon Electric Dipole Moments in High-Scale Supersymmetric Models,” *JHEP* **11** (2015) 085, [arXiv:1507.05836 \[hep-ph\]](#).
- [144] G. F. Giudice and A. Masiero, “A Natural Solution to the mu Problem in Supergravity Theories,” *Phys. Lett.* **B206** (1988) 480–484.
- [145] J. Hisano and Y. Shimizu, “Hadronic EDMs induced by the strangeness and constraints on supersymmetric CP phases,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 093001, [arXiv:hep-ph/0406091 \[hep-ph\]](#).
- [146] J. Hisano, M. Nagai, and P. Paradisi, “Flavor effects on the electric dipole moments in supersymmetric theories: A beyond leading order analysis,” *Phys. Rev.* **D80** (2009) 095014, [arXiv:0812.4283 \[hep-ph\]](#).
- [147] J. L. Evans and K. A. Olive, “Universality in Pure Gravity Mediation with Vector Multiplets,” [arXiv:1408.5102 \[hep-ph\]](#).
- [148] G. Giudice and R. Rattazzi, “Theories with gauge mediated supersymmetry breaking,” *Phys.Rept.* **322** (1999) 419–499, [arXiv:hep-ph/9801271 \[hep-ph\]](#).
- [149] S. P. Martin, “Generalized messengers of supersymmetry breaking and the sparticle mass spectrum,” *Phys. Rev.* **D55** (1997) 3177–3187, [arXiv:hep-ph/9608224 \[hep-ph\]](#).
- [150] S. Abel, S. Khalil, and O. Lebedev, “EDM constraints in supersymmetric theories,” *Nucl.Phys.* **B606** (2001) 151–182, [arXiv:hep-ph/0103320 \[hep-ph\]](#).
- [151] M. Ciuchini, E. Franco, L. Reina, and L. Silvestrini, “Leading order QCD corrections to $b \rightarrow s\gamma$ and $b \rightarrow sg$ decays in three regularization schemes,” *Nucl. Phys.* **B421** (1994) 41–64, [arXiv:hep-ph/9311357 \[hep-ph\]](#).
- [152] G. Degrandi, E. Franco, S. Marchetti, and L. Silvestrini, “QCD corrections to the electric dipole moment of the neutron in the MSSM,” *JHEP* **0511** (2005) 044, [arXiv:hep-ph/0510137 \[hep-ph\]](#).
- [153] J. F. Kamenik, M. Papucci, and A. Weiler, “Constraining the dipole moments of the top quark,” *Phys. Rev.* **D85** (2012) 071501, [arXiv:1107.3143 \[hep-ph\]](#). [Erratum: *Phys. Rev.* **D88**,no.3,039903(2013)].
- [154] J. Brod, U. Haisch, and J. Zupan, “Constraints on CP-violating Higgs couplings to the third generation,” *JHEP* **11** (2013) 180, [arXiv:1310.1385 \[hep-ph\]](#).
- [155] F. Sala, “A bound on the charm chromo-EDM and its implications,” *JHEP* **03** (2014) 061, [arXiv:1312.2589 \[hep-ph\]](#).

- [156] M. Gorbahn and U. Haisch, “Searching for $t \rightarrow c(u)h$ with dipole moments,” *JHEP* **06** (2014) 033, [arXiv:1404.4873 \[hep-ph\]](#).
- [157] G. Giudice and A. Romanino, “Electric dipole moments in split supersymmetry,” *Phys.Lett.* **B634** (2006) 307–314, [arXiv:hep-ph/0510197 \[hep-ph\]](#).
- [158] T. Bhattacharya, V. Cirigliano, R. Gupta, H.-W. Lin, and B. Yoon, “Neutron Electric Dipole Moment and Tensor Charges from Lattice QCD,” [arXiv:1506.04196 \[hep-lat\]](#).
- [159] D. A. Demir, M. Pospelov, and A. Ritz, “Hadronic EDMs, the Weinberg operator, and light gluinos,” *Phys.Rev.* **D67** (2003) 015007, [arXiv:hep-ph/0208257 \[hep-ph\]](#).
- [160] ATLAS Collaboration, G. Aad *et al.*, “Search for squarks and gluinos with the ATLAS detector in final states with jets and missing transverse momentum using $\sqrt{s} = 8$ TeV proton–proton collision data,” *JHEP* **09** (2014) 176, [arXiv:1405.7875 \[hep-ex\]](#).
- [161] CMS Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, “Search for new physics in the multijet and missing transverse momentum final state in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV,” *JHEP* **06** (2014) 055, [arXiv:1402.4770 \[hep-ex\]](#).
- [162] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” *Westview Press* (1995).
- [163] J. Taylor, “Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang–Mills Field,” *Nucl.Phys.* **B33** (1971) 436–444.
- [164] A. Slavnov, “Ward Identities in Gauge Theories,” *Theor.Math.Phys.* **10** (1972) 99–107.
- [165] T. Muta, “Foundations of Quantum Chromodynamics,” *World Scientific* (1987).
- [166] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, “Two Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory. 1. Wave Function Renormalization,” *Nucl.Phys.* **B222** (1983) 83.
- [167] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, “Two Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory. 2. Yukawa Couplings,” *Nucl.Phys.* **B236** (1984) 221.
- [168] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, “Two Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory. 3. Scalar Quartic Couplings,” *Nucl.Phys.* **B249** (1985) 70.
- [169] S. P. Martin and M. T. Vaughn, “Two loop renormalization group equations for soft supersymmetry breaking couplings,” *Phys.Rev.* **D50** (1994) 2282, [arXiv:hep-ph/9311340 \[hep-ph\]](#). Erratum [191].
- [170] Y. Yamada, “Two loop renormalization group equations for soft SUSY breaking scalar interactions: Supergraph method,” *Phys.Rev.* **D50** (1994) 3537–3545, [arXiv:hep-ph/9401241 \[hep-ph\]](#).
- [171] I. Jack and D. Jones, “Soft supersymmetry breaking and finiteness,” *Phys.Lett.* **B333** (1994) 372–379, [arXiv:hep-ph/9405233 \[hep-ph\]](#).
- [172] I. Jack, D. T. Jones, S. P. Martin, M. T. Vaughn, and Y. Yamada, “Decoupling of the epsilon scalar mass in softly broken supersymmetry,” *Phys.Rev.* **D50** (1994) 5481–5483, [arXiv:hep-ph/9407291 \[hep-ph\]](#).
- [173] M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Rocek, “Improved Methods for Supergraphs,” *Nucl.Phys.* **B159** (1979) 429.
- [174] W. E. Caswell, “Asymptotic Behavior of Nonabelian Gauge Theories to Two Loop Order,” *Phys.Rev.Lett.* **33** (1974) 244.
- [175] D. Jones, “Two Loop Diagrams in Yang–Mills Theory,” *Nucl.Phys.* **B75** (1974) 531.
- [176] E. Egorian and O. Tarasov, “Two Loop Renormalization of the QCD in an Arbitrary Gauge,” *Teor.Mat.Fiz.* **41** (1979) 26–32.

- [177] R. Tarrach, “The Pole Mass in Perturbative QCD,” *Nucl.Phys.* **B183** (1981) 384.
- [178] T. Kadoyoshi and N. Oshimo, “Neutron electric dipole moment from supersymmetric anomalous W boson coupling,” *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1481–1486, [arXiv:hep-ph/9607301](#) [[hep-ph](#)].
- [179] D. Chang, W.-F. Chang, and W.-Y. Keung, “Electric dipole moment in the split supersymmetry models,” *Phys. Rev.* **D71** (2005) 076006, [arXiv:hep-ph/0503055](#) [[hep-ph](#)].
- [180] N. G. Deshpande and J. Jiang, “Signals for CP violation in split supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B615** (2005) 111–119, [arXiv:hep-ph/0503116](#) [[hep-ph](#)].
- [181] K. Hagiwara, R. Peccei, D. Zeppenfeld, and K. Hikasa, “Probing the Weak Boson Sector in $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$,” *Nucl.Phys.* **B282** (1987) 253.
- [182] K. Fujikawa, B. Lee, and A. Sanda, “Generalized Renormalizable Gauge Formulation of Spontaneously Broken Gauge Theories,” *Phys.Rev.* **D6** (1972) 2923–2943.
- [183] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane, and S. Dawson, “The Higgs Hunter’s Guide,” *Front. Phys.* **80** (2000) 1–448.
- [184] D. A. Dicus, “Neutron Electric Dipole Moment From Charged Higgs Exchange,” *Phys.Rev.* **D41** (1990) 999.
- [185] V. M. Belyaev and B. L. Ioffe, “Determination of Baryon and Baryonic Resonance Masses from QCD Sum Rules. 1. Nonstrange Baryons,” *Sov. Phys. JETP* **56** (1982) 493–501. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 83,876(1982)].
- [186] I. I. Kogan and D. Wyler, “A Sum rule calculation of the neutron electric dipole moment from a quark chromoelectric dipole coupling,” *Phys. Lett.* **B274** (1992) 100–110.
- [187] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. F. Giudice, and A. Romanino, “Aspects of split supersymmetry,” *Nucl. Phys.* **B709** (2005) 3–46, [arXiv:hep-ph/0409232](#) [[hep-ph](#)].
- [188] D. Chang, W.-F. Chang, and W.-Y. Keung, “New constraint from electric dipole moments on chargino baryogenesis in MSSM,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 116008, [arXiv:hep-ph/0205084](#) [[hep-ph](#)].
- [189] A. Arvanitaki, C. Davis, P. W. Graham, and J. G. Wacker, “One loop predictions of the finely tuned SSM,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 117703, [arXiv:hep-ph/0406034](#) [[hep-ph](#)].
- [190] Y. Yamada, “Two loop renormalization of gaugino mass in supersymmetric gauge model,” *Phys.Lett.* **B316** (1993) 109–111, [arXiv:hep-ph/9307217](#) [[hep-ph](#)].
- [191] S. P. Martin and M. T. Vaughn, “Two loop renormalization group equations for soft supersymmetry breaking couplings (Erratum),” *Phys.Rev.* **D78** (2008) 039903.