

# 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名

Ade Irma Suriajaya

論 文 題 目

On the Distribution of Zeros of the Derivatives of Dirichlet  
 $L$ -Functions

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
山 上 滋

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
松 本 耕 二

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
糸 健 太 郎

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
中 島 誠

## 論文審査の結果の要旨

Riemann ゼータ関数  $\zeta(s)$  の零点分布の研究は、素数分布の問題と密接に結びつく、整数論の中心的問題のひとつである。その中核に位置するのが、 $\zeta(s)$  の非自明な（言い換えれば、critical strip, すなわち帯領域  $0 < \Re s < 1$  内の）零点の実部はすべて  $1/2$  であろう、という、今なお未解決の Riemann 予想である。

Speiser は 1935 年、 $\zeta(s)$  の一階導関数  $\zeta'(s)$  が  $0 < \Re s < 1/2$  内に零点を持たないという主張が、Riemann 予想と同値であることを発見した。この Speiser の結果により、導関数の零点分布の研究も重要なテーマであることがわかる。この研究方向は 1970 年代になって、Spira, Berndt, Levinson, Montgomery らによって新たに取り上げられ、活発な研究が開始された。特に Berndt は  $\zeta(s)$  の任意階の導関数  $\zeta^{(k)}(s)$  に対して、その零点の critical strip における分布を研究し、零点の個数に関する漸近公式を示した。次いで Levinson と Montgomery は  $\zeta^{(k)}(s)$  の零点の実部の  $1/2$  からのずれの和に関する漸近公式を得た。赤塚広隆氏は最近 (2012) になって、この Berndt および Levinson-Montgomery の公式を再び取り上げ、一階導関数の場合に、Riemann 予想が正しいと仮定すればそれらの誤差項の評価が改良できることを示した。

Suriajaya 氏の学位論文は、このような状況を背景としたものであり、Riemann のゼータ関数および、その指標付き一般化である Dirichlet  $L$  関数の高次導関数の零点に関する知見を大きく前進させるものと言えよう。その主たる成果は以下の通りである。

第一の成果として、Riemann 予想が正しいという仮定の下、Riemann ゼータ関数の二次以上の高次導関数、および Dirichlet  $L$  関数の一次導関数の零点分布について、Berndt 型、および Levinson-Montgomery 型の漸近公式を、赤塚氏の結果と同じレベルの精密な誤差評価付きで証明した。その証明方針の基本的な枠組みは赤塚氏のものを踏襲するが、導関数を高次化させたこと、あるいは Dirichlet の  $L$  関数を扱うことに伴う、評価方法の複雑化・困難さ（例えば赤塚氏のような対数微分の議論は高次の場合には上手く行かない）を、扱う量の特性に応じた各種の工夫を施すことで突破して証明を達成している。

第二の成果として、Speiser の定理とその精密化の  $L$  関数版を赤塚氏との共同研究により示した。また、 $L$  関数の高次導関数が零点をもたない領域に関する Yildirim の結果 (1996) の改良と精密化を、一次導関数の場合に、同じく赤塚氏との共同研究で明らかにした。

第三の成果は、以上の一連の結果とは方向性が異なり、エルゴード論的な手法により、零点分布に関するリーマン予想のエルゴード論的な傍証を得るというものである。これは、Steuding による先行結果が Dirichlet  $L$  関数や、さらにより一般の  $L$  関数を含む広いクラスの導関数についても成り立つことを Lee 氏との共同研究によって示したもので、Birkhoff のエルゴード定理を基盤にしたその手法も第一、第二の成果における手法とは相当異なっており、Suriajaya 氏の今後の研究の広がりについても期待できる内容となっている。

このように、Suriajaya 氏の学位論文は Riemann ゼータ関数および Dirichlet  $L$  関数の導関数の零点の分布についての研究を大きく前に進めるものであり、学位論文として十分な内容を持つものである。第一の成果は副論文として *Funct. Approx. Comment. Math.* 誌において掲載されており、第二・第三の成果も preprint として公開済みである。

## 論文審査の結果の要旨

本学位申請に伴う公開学位審査セミナーは、2016年7月6日に行われ、学位申請内容の明快な説明と質問に対する的確な応対を通じて、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することが確認された。

以上により、学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。

学位審査委員会

糸 健太郎

中島 誠

松本 耕二（指導教員）

山上 滋（委員長）