

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名

董 欣

論文題目

Bergman kernel and its boundary asymptotics

(ベルグマン核とその境界漸近性)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
小林 亮 一

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
大 沢 健 夫

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
伊 師 英 之

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
寺 澤 祐 高

# 論文審査の結果の要旨

**1. 背景.** 本学位申請論文の背景について述べる. Bergman 核は複素多様体に内在的に定まる擬体積形式である.  $X$  を  $n$  次元複素多様体として  $\{\phi_j\}$  を  $L^2$  正則  $n$  次微分形式全体のなすヒルベルト空間の完全正規直交系とする. このとき Bergman 核は

$$K_X(z) = \sum_j \phi_j(z) \wedge \overline{\phi_j(z)}$$

によって定義される. 米谷-山口は Riemann 面複素解析族における Bergman 核のふるまいを問題にした. 彼らの先駆的研究は Berndtsson によって一般次元および代数多様体に拡張された. 複素構造の変形のもとの Bergman 核の変分問題は, 変分のもとの Bergman 核の対数多重劣調和性という形に収斂する. たとえば  $X_\lambda$  を Riemann 面の 1 パラメータ複素解析族とし  $B_\lambda = k_\lambda dz \wedge d\bar{z}$  を  $X_\lambda$  の Bergman 核とする. このとき変分のもとの Bergman 核の対数多重劣調和性とは水平方向の正值性

$$L_\lambda(z) := \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} \log k_\lambda(z) \geq 0$$

が成り立つことである. この研究方向は驚くべき豊かさを持っている. 最近, Berndtsson-Lempert により, 変分のもとの Bergman 核の対数多重劣調和性は, 最適定数の大沢・竹腰  $L^2$  拡張定理と同値であることが示された. 一方 Blocki (Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem, Inv. Math. 2013) と Guan-Zhou (A solution of an  $L^2$ -extension problem with optimal estimate and applications, Ann. Math. 2015) は, 最適定数の大沢・竹腰  $L^2$  拡張定理を導き, ポテンシャル論的双曲リーマン面における Bergman 核と対数容量という 2 種類のポテンシャルの間の関係に関する吹田予想を解決に導いた. この状況のもと, 本論文では, 吹田予想をポテンシャル論的放物リーマン面の場合に拡張する問題と, 複素構造が退化したときの Bergman 核の挙動はどうなるかという問題が考察の対象になっている.

**2. 本論文の内容.** 本論文は第 3 章からオリジナルな内容が始まる. 第 3 章では吹田予想のポテンシャル論的非双曲リーマン面における類似が考察される. コンパクトリーマン面の場合, 申請者は Bergman 核と比較されるもの (対数容量の代用物) として Arakelov-Green 関数から決まる Arakelov 計量をとることを提案している. 吹田予想の類似を示すために Berndtsson-Lempert の方法はそのままでは使えないが, トーラスの場合には対数容量がテータ関数によって具体的に書き下せることから, 数値実験によって吹田予想の類似が成り立つことを示した, というのが主要結果である. これは興味深い結果と言えるが, 種数一般のコンパクトリーマン面への言及はない. 第 3 章のもう一つの結果はポテンシャル論的放物リーマン面の例として 1 点穴あきトーラスの Bergman 核と Evans-Selberg ポテンシャルから決まる基本計量の比較に関する吹田予想の類似である. 副産物として 1 点穴あきトーラスの Evans-Selberg ポテンシャルのテータ関数による表現を求めている. ただし申請者のここでの考察は大沢・竹腰  $L^2$  拡張定理との関連については及んでいない.

本論文の主要部分をなすのが第 4,5 章である.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{D}}$  をコンパクトリーマン面の複素解析的退化族で  $\lambda = 0$  で退化が起きているとするときの極限挙動  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_\lambda(z)$  が考察の対象である. 複素構造の退化に伴う Bergman 核の振舞の系統的な研究は Habermann-Jost (1996) の pinching coordinate の方法によるもの以外にほとんど知られていない. 本論文では H-J と異なる方法 (代数曲線論的な古典的方法) が展開されている. 本論文の方法では H-J の結果の一部 (非分離的なリーマン面の退化の場合) が再現される一方, H-J が扱っていない種々の退化に伴う Bergman 核の挙動の精緻な解析がなされている. 本論文の方法の出発点は種数  $g$  のコンパクトリーマン面の Bergman 核は周期行列  $\int_{a_j} \phi_i = \delta_{ij}$ ,  $Z_{ij} = \int_{b_j} \phi_i$  を使って

$$K = \sum_{i,j=1}^g ((\text{Im}Z)^{-1})_{ij} \phi_i \wedge \overline{\phi_j}$$

で与えられるという事実である. 本論文の方法は 2 つある. 第 3 章では楕円曲線の Legendre 族  $X_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$  において node への退化  $\lambda \rightarrow 0$  にともなう Bergman 核の振舞が楕円関数を使う計算によって  $\lambda \rightarrow 0$  のとき

$$L_\lambda(z) \sim \frac{1}{4|\lambda|^2(\log|\lambda|)^2} + \frac{\log 16}{2|\lambda|^2(\log|\lambda|)^3} + \frac{3(\log 16)^2}{4|\lambda|^2(\log|\lambda|)^4} + \frac{(\log 16)^3}{|\lambda|^2(\log|\lambda|)^5} + \dots$$

## 論文審査の結果の要旨

という結果が示される。この結果はトーラスの Bergman 核  $k_\lambda(z) = 1/\text{Im}(\tau)$  と  $\lambda$  の関係  $\lambda(\tau) = 16q - 128q^2 + 704q^3 + \dots$  ( $q = e^{\pi i \tau}$ ) から来ている。これはポアンカレ計量を表しているが、穴あき円板の通常のポアンカレ計量の形と異なる理由は、 $\lambda$  と  $\tau$  の関係が高次の項を含むことに由来している。第4章ではこの結果に加えて cusp に退化するトーラスの族のいくつかの例について  $\lambda \rightarrow 0$  のときの  $L_\lambda(z)$  の振舞が計算されている。計算結果は  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_\lambda(z) = 0$  のこともあるしポアンカレ計量と同様の発散が起きることもあり、どのような族を考えるかによって結果が異なることが示されている。cusp に退化する族に対しても精密な結果が得られる点が、H-J の方法と比較した場合の申請者の方法のメリットである。

第5章では Bergman 核の周期行列による表示にテイラー展開を適用するという第2の方法を駆使して、超楕円曲線が node や cusp に退化する族に対して Bergman 核の振舞を精密に計算している。計算の結果はトーラスの場合と大きく異なっている。たとえば  $y^2 = x(x - \lambda)p(x)$  ( $\deg p$  は  $\geq 3$  で重根を持たない) の  $\lambda \rightarrow 0$  という node への退化に伴って

$$L_\lambda(z) \sim (\text{const.}) \frac{1}{|\lambda|^2 (-\log |\lambda|)^3}$$

という振舞が観察される。これは Bergman 計量の退化にともなう振舞は一意化に大きく依存して変わることの意味している。一方、トーラスの node や cusp への退化の一般化としては、 $X_\lambda$  の Jacobi 多様体  $J_\lambda$  の Bergman 核の退化を考えることも可能である。この場合には非分離な node への退化にともなう Jacobi 多様体の Bergman 核の振舞は

$$L_\lambda^{\text{Jacobi}}(z) \sim \frac{1}{|\lambda|^2 (-\log |\lambda|^2)^2}$$

となり、トーラスの場合と同様にポアンカレ計量と同様の発散が起きることが観察されている。さらに cusp への退化が起きる場合にも Jacobi 多様体の Bergman 核の振舞が計算されている。

**3. 学位審査の結論.** 申請者は主にリーマン面の Bergman 核研究でいくつかの興味ある成果を得ている。第一の成果は、ポテンシャル論的非双曲リーマン面に対する吹田予想の類似を提案し、特別の場合に解答を与えたことである。第二の成果は、リーマン面の退化にともなう Bergman 核の振舞という未開拓の研究分野において、トーラスと超楕円曲線（およびそのヤコビ多様体）の退化にともなう Bergman 核の振舞に関していくつかの具体的な計算結果を示し、どのような現象が起きていて今後どのようなことが問題になるかを示している。学位審査セミナーでは主に Bergman 核の境界挙動に限ってわかりやすい発表がなされた。申請者の具体的な計算の蓄積の豊かさを示すものであった。これらの成果は結果自体興味あるものであり、将来の研究方向を示唆している点で、学位論文として十分な水準に達していると学位審査委員会は考えて、本論文は学位論文に値すると判断した。

学位審査委員会  
伊師英之  
大沢健夫（指導教員）  
小林亮一（主査）  
寺澤祐高