線形代数学 I

§1. 平面·空間のベクトル
§2 行列
§3 行列式
§4 行列の基本変形と連立一次方程式

線形代数学 II

§5 線形空間
§6 線形写像
§7 固有値と固有ベクトル

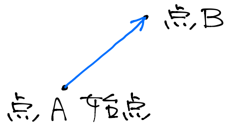
参考書 茂木勇, 横手一郎.「基礎 線形代数」裳華房

自然科学全般の基礎"言語"の1つ　微積、線形代数, …
定量化, 数式化 の道具

§1 平面・空間のベクトル 〜線形空間の身近な例〜

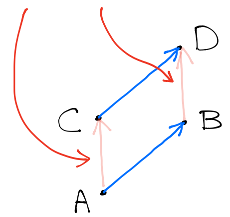
§§1-1 ベクトル

・平面、空間において　　　ベクトル $\overrightarrow{AB}$



長さと向きをもつ。　　長さを $\|\overrightarrow{AB}\|$ で表わす。

・平行移動して重なるベクトル同士は等しいという。



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ と表記する。

・ベクトルの表記　太字を用いることが多い。

$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \cdots, \mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z}, \cdots$ など。

・逆ベクトル

$\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルという。　大きさが同じ、向きは逆。

ベクトル $\mathbb{a}$ の逆ベクトルを $-\mathbb{a}$ と表わす。したがって

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

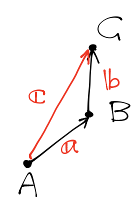
・ベクトルの加法・減法

2つのベクトル $\mathbb{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbb{b} = \overrightarrow{BC}$

$\mathbb{c} := \overrightarrow{AC}$ を $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の和と定義する。そして

$$\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{c}$$

と書く。



次の性質が成り立つ

交換法則　$\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$

結合法則　$(\mathbb{a} + \mathbb{b}) + \mathbb{c} = \mathbb{a} + (\mathbb{b} + \mathbb{c})$

・零ベクトル

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$

$\therefore\ \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\text{大きさ0のベクトル}} = \mathbf{0}$ 零ベクトル

次の性質をもつ.

$\|\mathbf{0}\| = 0,\ \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$

・差

$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と書き. これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の差という.

・ベクトルの実数倍

$m\boldsymbol{a}$　m…実数　$\boldsymbol{a}$…ベクトル

定義 (1) $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ のとき

(i) $m > 0$ ならば、$m\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで、大きさが $m\|\boldsymbol{a}\|$ のベクトル

(ii) $m < 0$ ならば、$m\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と反対向きで、大きさが $\underbrace{|m|}_{m\text{の絶対値！}}\|\boldsymbol{a}\|$ のベクトル.

(iii) $m = 0$ ならば. 零ベクトル.

(2) $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のとき. $m\boldsymbol{a}$ は零ベクトル.

次の性質が成り立つ.

結合法則　$(mn)\boldsymbol{a} = m(n\boldsymbol{a})$

分配法則Ⅰ　$(m+n)\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{a}$

分配法則Ⅱ　$m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}$

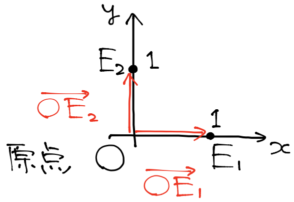
・単位ベクトル　大きさが 1

$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ のとき　$\boldsymbol{e} := \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ は単位ベクトル.

§§1-2 座標系とベクトル

(i) 平面上

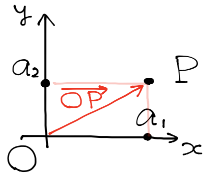
・直交座標系と基本ベクトル



$\overrightarrow{OE_1} = \boldsymbol{e}_1$: x軸方向の基本ベクトル
$\overrightarrow{OE_2} = \boldsymbol{e}_2$: y 〃

$\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = 1$

・位置ベクトル



$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OP}$ を点Pの位置ベクトルと呼ぶ。

$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$
a_1… x成分, a_2… y成分

$$\|\boldsymbol{a}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とも書く($\boldsymbol{a}$の成分表示).

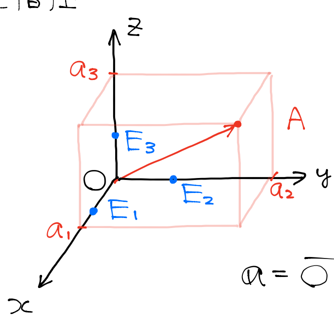
例) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \end{pmatrix},\ m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \end{pmatrix}$$

(ii) 空間上



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OE_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \\ \overrightarrow{OE_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 \\ \overrightarrow{OE_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_3 \end{array}\right\} \text{基本ベクトル}$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}$の成分表示

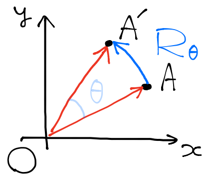
$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ピタゴラスの定理

2つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_1 + nb_1 \\ ma_2 + nb_2 \\ ma_3 + nb_3 \end{pmatrix}$$

§§1-3 回転運動



原点を中心とする平面 O-xy 内の回転運動

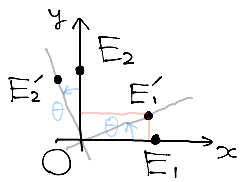
ベクトルの長さを保つ.

$$\overrightarrow{OA'} = R_\theta(\overrightarrow{OA})$$

次の性質が成り立つ [回転運動の線形性]

$$R_\theta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = R_\theta(\mathbf{a}) + R_\theta(\mathbf{b})$$
$$R_\theta(m\mathbf{a}) = m R_\theta(\mathbf{a})$$

・基本ベクトルの回転運動



$$\overrightarrow{OE_1'} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = R_\theta(\overrightarrow{OE_1}) = R_\theta(\mathbf{e}_1)$$
$$\overrightarrow{OE_2'} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = R_\theta(\overrightarrow{OE_2}) = R_\theta(\mathbf{e}_2)$$

任意のベクトル $\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ に対して

$$\begin{aligned}
R_\theta\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} &= R_\theta(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\
&= x R_\theta(\mathbf{e}_1) + y R_\theta(\mathbf{e}_2) \\
&= x\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

回転はこの2つのベクトルによって記述されている。

表にまとめると

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\updownarrow & \updownarrow \\ R_\theta(\mathbf{e}_1) & R_\theta(\mathbf{e}_2)\end{matrix}$$

行列とよぶ.

$$\therefore \boxed{R_\theta\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}} \quad \text{—(1.3.1)}$$

一般に, 表 $\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ を行列という (今の場合, 2次の正方行列)

行列 $A = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$ に対して 積 を次のように定義する.

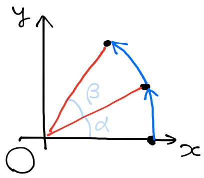
$$\boxed{A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax + by \\ cx + dy\end{pmatrix}} \quad \text{—(1.3.2)}$$

(1.3.1) は

$$R_\theta\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

と表わされる.

・回転の合成



$$R_{\alpha+\beta}(\mathbb{e}_1) = R_\beta(R_\alpha(\mathbb{e}_1))$$

$$R_{\alpha+\beta}(\mathbb{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \quad \text{—(1.3.3)}$$

一方で $R_{\alpha+\beta}(\mathbb{e}_1) = R_\beta(R_\alpha(\mathbb{e}_1)) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$ —(1.3.4)

(1.3.3), (1.3.4)より

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{cases}$$ (三角関数の加法公式)

・1次変換

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 平面上のベクトル $\boldsymbol{x}$

写像 $f: \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ [1次変換]

fは以下の性質を満足する.

$$\begin{cases} f(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b}) \\ f(m\mathbb{a}) = m f(\mathbb{a}) \end{cases}$$

例えば

$$f(\mathbb{e}_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f(\mathbb{e}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

・行列の積

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$$B(A\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (pa+qc)x + (pb+qd)y \\ (ra+sc)x + (rb+sd)y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}}_{\text{行列}}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{ベクトル}}$$

そこで

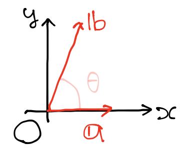
$$\boxed{BA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix}}$$

と積を定義する。すると

$$B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x}$$

§§1-4 内積

定義



$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \langle \mathbb{a}, \mathbb{b} \rangle \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

座標系を上手に選ぶと一般性を失うことなく図のようになる。このとき

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbb{a}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbb{b}\| \cos\theta \\ \|\mathbb{b}\| \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\| \cos\theta}$$

性質

(i) $\mathbb{a} = \mathbb{0}$ または $\mathbb{b} = \mathbb{0}$ のとき $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = 0$

(ii) $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \mathbb{b}\cdot\mathbb{a}$

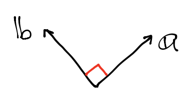
(iii) $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ なので $-\|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\| \leq \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} \leq \|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\|$

(iv) $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ のとき $\mathbb{a}\cdot\mathbb{a} = \|\mathbb{a}\|^2$

(v) ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{a}', \mathbb{b}'$, 実数 k に対して

$$\mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}+\mathbb{b}') = \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} + \mathbb{a}\cdot\mathbb{b}'$$
$$(\mathbb{a}+\mathbb{a}')\cdot\mathbb{b} = \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} + \mathbb{a}'\cdot\mathbb{b}$$
$$(k\mathbb{a})\cdot\mathbb{b} = k(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$$

幾何学的意味



$\mathbb{a}, \mathbb{b}$ のが直交しているとき $\cos\theta = 0$

$$\therefore \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = 0$$

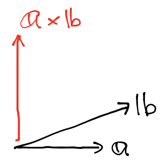
逆に、$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}, \mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ のとき、$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = 0$ ならばベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ は直交する。

§§1-5 外積

2つの空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

と定義する.



性質

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交している.

(ii) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

(iii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| |\sin\theta|$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積

(iv) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(v) $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b})$

(vi) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

$\because$

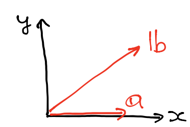
(i)

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = a_1(\cancel{a_2} b_3 - \cancel{a_3} b_2) + a_2(\cancel{a_3} b_1 - a_1 \cancel{b_3}) + a_3(\cancel{a_1} b_2 - \cancel{a_2} b_1) = 0$$

(ii)

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

(iii) x, y 軸を上手に選ぶと



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{a}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta \\ \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| |\sin\theta|$$

(iv)

(ii)より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a})$. よって, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ //

(v), (vi) 自明

レビ・チビタ記号

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & (i=1,\ j=2,\ k=3 \text{ あるいはその偶置換}) \\ -1 & (i=1,\ j=2,\ k=3 \text{ からの奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

具体的には $\varepsilon_{123}=1$, $\varepsilon_{231}=1$, $\varepsilon_{213}=-1$, $\varepsilon_{112}=0$, …

$\mathbb{a}=\sum_{i=1}^{3} a_i \mathbb{e}_i$, $\mathbb{b}=\sum_{i=1}^{3} b_i \mathbb{e}_i$ に対して、外積 $\mathbb{a}\times\mathbb{b}=\sum_{i=1}^{3}(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_i \mathbb{e}_i$ の成分 $(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_i$ $(i=1,2,3)$ は

$$\boxed{(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_i=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_k}$$

と書くことができる.

$\because$ $(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_1=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{1jk}a_j b_k=\underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1}a_2b_3+\underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1}a_3b_2=a_2b_3-a_3b_2$

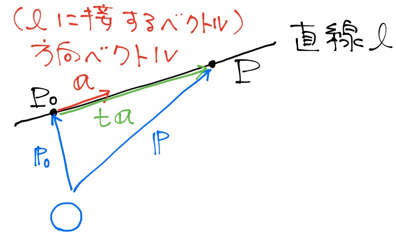
$(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_2=\underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1}a_3b_1+\underbrace{\varepsilon_{213}}_{=-1}a_1b_3=a_3b_1-a_1b_3$

$(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_3=\underbrace{\varepsilon_{312}}_{=1}a_1b_2+\underbrace{\varepsilon_{321}}_{=-1}a_2b_1=a_1b_2-a_2b_1$

//

§§1-6 直線と平面の方程式

・直線の方程式



空間の1点 P_0 を通り、方向ベクトル $\mathbf{a}$ である直線ℓ上で

$$\boxed{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}}$$ (直線の方程式)

が成り立つ。ここで $\mathbf{P}_0$ は点 P_0 の位置ベクトル、$\mathbf{P}$ はℓ上の任意の点 P の位置ベクトル、t は実数である。

パラメータと呼ばれる。

座標表示

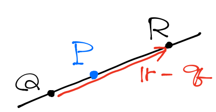
$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix},\ \mathbf{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+ta\\y_0+tb\\z_0+tc\end{pmatrix} \rightarrow t=\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

2つの等式

$\Rightarrow$ 3(次元) − 2 = 1(次元)

$\Leftrightarrow$ 線



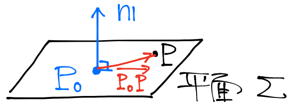
異なる2点Q, Rを通る直線ℓの方程式は

$$\mathbf{P}=\mathbf{q}+t(\mathbf{r}-\mathbf{q})$$

と書ける。ここで $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ はそれぞれ点Q, Rの位置ベクトル、$\mathbf{P}$ はℓ上の任意の点Pの位置ベクトル、t は実数である。

∵ 直線ℓの方向ベクトルが $\mathbf{r}-\mathbf{q}$ で与えられることから自明。//

◦平面の方程式



$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする. 法線ベクトル

P_0 (x_0, y_0, z_0)

P (x, y, z) … 平面Σ上の任意の点

$\mathbf{n}$ と $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ は垂直なので

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$\therefore$ $\boxed{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$ (平面の方程式)

逆に, x, y, z の1次方程式

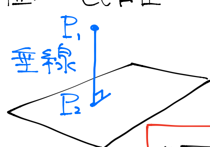
$$ax + by + cz + d = 0$$ 1つの等式 ⇒ 3(次元) − 1 = 2(次元) ⇔ 面

は平面を表わす.

∵ $c \neq 0$ とすると $ax + by + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = 0$

これは $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -\frac{d}{c}$ を通る $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面.

◦点と平面の距離



平面Σ : $ax + by + cz + d = 0$

$$\boxed{\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

∵ 法線ベクトル $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 明らかに $\overrightarrow{P_1P_2} = t\,\mathbf{n}$. ここで t はパラメータ

として P_2 : $(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$

この t を決めたい!

P_2 はΣ上にあるので

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$

$$\therefore a(x_1 + ta) + b(y_1 + tb) + c(z_1 + tc) + d = 0$$

$$\therefore t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\therefore \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = |t|\,\|\mathbf{n}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ //

平面Σが 原点 (O : (0, 0, 0)) を通る場合, $d = 0$ なので

$$\boxed{\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP_1}|}{\|\mathbf{n}\|}}$$

となる.

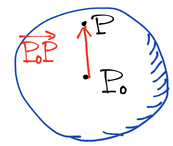
・球面の方程式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を中心にもつ半径 a の球面 S 上の点 $P(x, y, z)$ を考えると明らかに

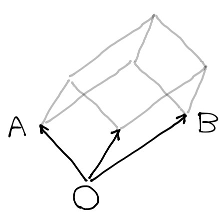
$$\|\overrightarrow{P_0P}\| = a$$

が成り立つ(球面の方程式)。或いは

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$



・平行六面体の体積



$\mathbb{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbb{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbb{c}=\overrightarrow{OC}$ が張る平行六面体の体積は

$$\boxed{V=|(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}|}$$

∵ $S:=$(${\mathbb{a}}, \mathbb{b}$ が張る平行四辺形の面積)$=\|\mathbb{a}\times\mathbb{b}\|$

$l:=$(点 C から OAB を通る平面まで下ろした垂線の距離)

$$\underset{\mathbb{n}=\mathbb{a}\times\mathbb{b}}{=}\frac{|(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}|}{\|\mathbb{a}\times\mathbb{b}\|}$$

$$\therefore V=Sl=|(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}| \quad /\!/$$

・行列式 $\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\mathbb{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\mathbb{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

$$(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}=\sum_{i=1}^{3}(\mathbb{a}\times\mathbb{b})_i c_i=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_jb_k\right)c_i=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}c_ia_jb_k$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

この式を

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \quad \text{または} \quad |\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}| \quad (\text{3次の行列式})$$

と表わす

§§1-7 数ベクトルと1次独立性

□ n項数ベクトル　"空間ベクトルの一般化" ⇝ n次元空間
本当の空間である必要なし

定義

- n項数ベクトル … n個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を順序づけて並べた組
- n項列ベクトル … $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 成分　縦に並べた組
- n項行ベクトル … $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 横に並べた組
- n項数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ … n項列ベクトル全体の集合

ここで、単なる実数はスカラーという。

ベクトルの演算

(i) 和と差　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$, 差 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$

(ii) スカラー倍　$k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$k\boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$$

特に、$k = -1$ のとき $-\boldsymbol{x}$ と表わす. また $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と表わし、これを n項零ベクトルという。

(iii) $h, k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$
$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$
$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$
$$k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y}$$
$$(h + k)\boldsymbol{x} = h\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{x}$$
$$(hk)\boldsymbol{x} = h(k\boldsymbol{x})$$
$$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

が成立つ.

□ 1次独立性

・1次結合

<u>定義</u>　$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$,　$v_1, v_2, \cdots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

を数ベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_r$ の1次結合という

・1次独立と1次従属

<u>定義</u>　$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$,　$v_1, v_2, \cdots, v_r \in \mathbb{R}^n$

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = \mathbb{0}$ が成り立つとする. このとき

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

の場合のみであるとき、$\{v_1, \cdots, v_r\}$ は1次独立であるという.

1次独立でない場合、1次従属であるという.

注）$\{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$: 1次独立 $\Rightarrow \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$: 1次独立

$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$: 1次従属 $\Rightarrow \{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$: 1次従属

例）空間のベクトル

基本ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は1次独立

例）$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(i) $\{v_1, v_2\}$ は1次独立である.

∵ $k_1 v_1 + k_2 v_2 = \mathbb{0}$ とする.

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ 2k_1 + 3k_2 \\ 3k_1 + 5k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

容易に $k_1 = k_2 = 0$ となることが示される //

(ii) $\{v_1, v_2, v_3\}$ は1次従属である.

∵ $k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \mathbb{0}$ とする.

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 4k_3 \\ 2k_1 + 3k_2 + 3k_3 \\ 3k_1 + 5k_2 + 2k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} —① \\ —② \\ —③ \end{matrix}$$

①×3−② より　$k_1 + 9k_3 = 0$

②×3−③×2 より　$-k_2 + 5k_3 = 0$

→ $k_1 = -9k_3$, $k_2 = 5k_3$

このとき、任意の $k_3 \neq 0$ に対して①〜③は成り立つ. よって非自明な $k_1 \sim k_3$ が存在 //

定理1.1 $r(\geq 2)$個のベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r$ が1次従属

$\Leftrightarrow$ 少なくとも1個のベクトルを、残りの $r-1$ 個のベクトルの1次結合として表わされる.

証明 $\Rightarrow$) $k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r = \mathbb{0}$ を満たす係数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ の中で0でないものが存在する. そこで $k_r \neq 0$ としよう. すると

$$\mathbb{v}_r = -\frac{k_1}{k_r}\mathbb{v}_1 - \frac{k_2}{k_r}\mathbb{v}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\mathbb{v}_{r-1}$$

$\Leftarrow$) $\mathbb{v}_r = l_1\mathbb{v}_1 + l_2\mathbb{v}_2 + \cdots + l_{r-1}\mathbb{v}_{r-1}$ $(l_1, l_2, \cdots, l_{r-1} \in \mathbb{R})$

$\therefore l_1\mathbb{v}_1 + l_2\mathbb{v}_2 + \cdots + l_{r-1}\mathbb{v}_{r-1} + (-1)\mathbb{v}_r = \mathbb{0}$

$\square$

定理1.2 r個のベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r$ が1次独立であるとする. このとき $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r, \mathbb{P}$ が1次従属になるならば、$\mathbb{P}$ は $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_r$ の1次結合として唯一に表わされる.

証明

$$k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + \cdots + k_r\mathbb{v}_r + k\mathbb{P} = \mathbb{0}$$

を満たす少なくとも1つは0でない $r+1$ 個の係数の組 $k_1, k_2, \cdots, k_r, k$ が存在.
ここで $k=0$ とすると仮定より $k_1 = k_2 = \cdots = k = 0$ となり, 1次従属であることに反する.
よって $k \neq 0$ としてよい. すると

$$\mathbb{P} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\mathbb{v}_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\mathbb{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k}\right)\mathbb{v}_r$$

と $\mathbb{v}_1, \cdots, \mathbb{v}_r$ の1次結合で書ける. 次に

$$\mathbb{P} = l_1\mathbb{v}_1 + \cdots + l_r\mathbb{v}_r, \quad \mathbb{P} = m_1\mathbb{v}_1 + \cdots + m_r\mathbb{v}_r$$

と2通り書けたとする. 両辺の差をとると

$$(l_1 - m_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (l_r - m_r)\mathbb{v}_r = \mathbb{0}$$

1次独立性より

$$l_1 = m_1, \cdots, l_r = m_r$$

よって唯一。

$\square$

3次元

・空間のベクトルと1次独立性　～幾何学的意味～

$\mathbb{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbb{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbb{c}=\overrightarrow{OC}$

定理1.3

(i) 2個のベクトル $\mathbb{a},\mathbb{b}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ 3点O, A, Bが同一直線上にある.

(ii) 3個のベクトル $\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow$ 4点O, A, B, Cが同一平面上にある.

証明) (i) $\mathbb{a},\mathbb{b}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow \exists k(\neq 0)\in\mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{a}=k\mathbb{b}$

$\Longleftrightarrow$ 3点O, A, Bが が同一直線上にある.

(ii) $\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}$ が1次従属 $\Longleftrightarrow \exists k_1, k_2\in\mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{a}=k_1\mathbb{b}+k_2\mathbb{c}$

$\Longleftrightarrow$ 4点O, A, B, Cが同一平面上にある. □

系

(i) 2個のベクトル $\mathbb{a},\mathbb{b}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ 3点O, A, Bは同一直線上にない.

(ii) 3個のベクトル $\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}$ が1次独立 $\Longleftrightarrow$ 4点O, A, B, Cは同一平面上にない.

定理1.4

空間で4個以上のベクトルの組は常に1次従属である.

証明) $\mathbb{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbb{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbb{c}=\overrightarrow{OC}$, $\mathbb{d}=\overrightarrow{OD}$ のうちで, どの3個も1次独立の場合を考えればよい. このとき適当に k_1, k_2, k_3 を選べば

$$\mathbb{d}=k_1\mathbb{a}+k_2\mathbb{b}+k_3\mathbb{c}$$

と書ける. □

§2 行列

§§2-1 行列

- (m, n) 行列

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & \text{第 } j \text{ 列} & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\leftarrow \text{第 } i \text{ 行}
$$

- 種々な表現

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

n 項行ベクトル

$A_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad i=1,2,\cdots,m$

$$A=(A^1, A^2, \cdots, A^n)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \qquad A^j=\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad j=1,2,\cdots,n$$

m 項列ベクトル

- 成分　a_{ij} … 行列 A の i 行 j 列の成分, (i, j) 成分

$A=(a_{ij})$ と表わすこともある。

- 定義 (行列の和と差)

A, B … m 行 n 列の行列　$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$

和　$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

差　$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$

スカラー倍　$kA=(ka_{ij})$

零行列　$O=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$　すべての成分が 0

(−1) 倍　$(-1)A=-A=(-a_{ij})$

- 行列の演算法則 (I)　definition (定義)

$A=B \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ A, B が同じ m 行 n 列であり $a_{ij}=b_{ij}\ (1\le i\le m, 1\le j\le n)$

次の演算法則が成り立つ:　$h, k\in\mathbb{R}$ に対して

$$A+B=B+A \qquad h(A+B)=hA+hB$$
$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (h+k)A=hA+kA$$
$$A+(-1)A=O \qquad (hk)A=h(kA)$$
$$A+O=O+A=A \qquad 1A=A$$

matrix

$\mathbb{R}$ 上の m 行 n 列の行列の集合 $M(m,n;\mathbb{R})=\{A=(a_{ij}) \mid a_{ij}\in\mathbb{R}\}$ は実ベクトル空間である。

§§2-2 行列の積

"$;\mathbb{R}$" を略している

$A=(a_{ij})\in M(l,m)$, $B=(b_{jk})\in M(m,n)$

一致させている!!

積 AB を以下のように定義する

AB … 成分を $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} = a_{ij}b_{jk}$ にもつ l 行 n 列の行列。

Einsteinの縮約束(同じ添字について和をとる)

すなわち

$$(AB)_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

注) • AB が定義されても、BA が定義されない場合がある.

• 一般に $AB \neq BA$

"可換でない"　　行列の積には順序に注意!

・行列の演算法則(II)

$A=(a_{ij})\in M(k,l)$, $B=(b_{jk})\in M(l,m)$, $C=(c_{kl})\in M(m,n)$ に対して

$$(AB)C=A(BC)$$

が成り立つ.

$$\because\ \left((AB)C\right)_{il}=\sum_{k=1}^{m}(AB)_{ik}\,c_{kl}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\underbrace{b_{jk}\,c_{kl}}_{=(BC)_{jl}}$$

$$=\sum_{j=1}^{l} a_{ij}(BC)_{jl}$$

$$=\left(A(BC)\right)_{il}$$

//

$A=(a_{ij})\in M(l,m)$, $B=(b_{jk})$, $B'=(b'_{jk})\in M(m,n)$, $k\in\mathbb{R}$ に対して

$$A(B+B')=AB+AB'$$

$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

が成り立つ。

$$\because\ \left(A(B+B')\right)_{ik}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(B+B')_{jk}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_{jk}+b'_{jk})$$

$$=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b'_{jk}$$

$$=(AB)_{ik}+(AB')_{ik}$$

$$(k(AB))_{ik}=k(AB)_{ik}=\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\underbrace{(ka_{ij})}_{=(kA)_{ij}}b_{jk}}_{=(kA)B}=\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\underbrace{(kb_{jk})}_{=(kB)_{jk}}}_{=A(kB)}$$

//

§2-3 いろいろな行列

・単位行列とクロネッカーデルタ

n次単位行列 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M(n,n)$

クロネッカーデルタ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1 \leq i,j \leq n)$

$I_n = (\delta_{ij})$ である.

$A \in M(n,m)$ に対して

$$I_n A = A I_m = A$$

が成り立つ.

・転置行列 ${}^tA$

${}^tA$ の (i,j)-成分 $=$ A の (j,i)-成分 $\left[({}^tA)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji} \right]$

$A \in M(m,n) \Leftrightarrow {}^tA \in M(n,m)$

定理 2.1

(i) ${}^t({}^tA) = A$,

(ii) $k \in \mathbb{R}$ に対して ${}^t(kA) = k\,{}^tA$,

(iii) $A, B \in M(m,n)$ に対して ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(iv) $A \in M(l,m)$, $B \in M(m,n)$ に対して ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

順番が逆転！

証明) (i) $({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = (A)_{ij} = a_{ij}$

(ii) $({}^t(kA))_{ij} = (kA)_{ji} = k(A)_{ji} = k({}^tA)_{ij}$

(iii) $({}^t(A+B))_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ji}$

(iv) $({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{b_{ki}}_{=({}^tB)_{ik}} \underbrace{a_{jk}}_{=({}^tA)_{kj}} = ({}^tB\,{}^tA)_{ij}$ $\square$

・正方行列

n次正方行列　$M(n,n)$
行と列の数が同じ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \vdots \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
対角成分

対角成分の和をトレースという. $tr(A)$ で表わす.

Einsteinの縮約則

$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} \overset{\downarrow}{=} a_{ii}$$

性質
$A, B \in M(n,n)$ に対して
$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$
$$tr(kA) = k\,tr(A)$$
$$tr(AB) = tr(BA)$$

非対角成分すべてが0の場合, その行列を対角行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

対角成分より下(上)の成分すべてが0である行列を上三角行列(下)という.

上三角行列　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

下三角行列　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A \in M(n,n)$ で

$${}^tA = A \qquad [a_{ji} = a_{ij}]$$

を満たすものを対称行列という.

また

$${}^tA = -A \qquad [a_{ji} = -a_{ij}]$$

を満たすものを交代行列という.

正方行列は対称行列と交代行列に分解できる.

symmetric　anti-symmetric

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} = A_S + A_A$$

$$A_S := \frac{A + {}^tA}{2}, \quad A_A := \frac{A - {}^tA}{2}$$
対称　交代

交代行列の対角成分は0である. $[\because\ a_{11} = -a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0, \cdots]$

・正則行列

$A, B \in M(n,n) \Rightarrow AB,\ A+B \in M(n,n)$

$M(n,n)$は加法と乗法に関して閉じている

⇝ 数と同じ性質をもつ. 零行列, 単位行列もある.

しかし,

(i) 積について行列は一般に順番について交換可能でない.

$AB \neq BA$ 非可換

例) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&6\\7&0\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}19&6\\43&18\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}23&34\\7&14\end{pmatrix}$

(ii) $A \neq O, B \neq O$ でも $AB=O$ となるものがある.

例) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-6&4\\3&-2\end{pmatrix}$

(iii) $AX=XA=I_n$ を満たす $X \in M(n,n)$ が存在しないことがある.

例) $A=\begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in M(2,2)$

$$AX=\begin{pmatrix}2a+6c & 2b+6d\\ a+3c & b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ 2a+6c=1,\ 2b+6d=0,\ a+3c=0,\ b+3d=1$

これらを満足する a,b,c,d は存在しない.

定義

definition　exist　such that

$A \in M(n,n)$ が正則 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists X \in M(n,n)$ s.t. $AX=XA=I_n$

ここで X を A の逆行列とよび.

$$X=A^{-1}$$

と表わす.

注) 逆行列の唯一性

$AX=XA=I_n,\quad AY=YA=I_n$

$(XA)Y=I_nY=Y \qquad X(AY)=XI_n=X$

同じ

$\Rightarrow X=Y$

定理2.2

(i) A：正則 $\Rightarrow$ A^{-1}：正則

(ii) A, B：n次正則行列 $\Rightarrow$ ABも正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

証明)

(i) $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ より自明.

(ii) $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$ より

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}(AB) = I_n.$$

よって $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ であることがわかった. $\square$

定理2.3

$$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$$

証明)

$$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A\underbrace{BB^{-1}}_{I}) = \mathrm{tr}(A)$$

$\square$

§3 行列式

§§3-1 連立1次方程式と2,3次の行列式

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \text{—(3.1.1)} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \text{—(3.1.2)} \end{cases} \xrightarrow{\text{行列で表現}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ —(3.1.3)}$$

or

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

Aが正則行列であれば A^{-1} が存在して

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

$$\therefore\ \mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b} \quad \text{—(3.1.4)}$$

と解が求められる。後は A^{-1} を具体的に書き下せばよい。

一方、普通に

$(3.1.1)\times a_{22} - (3.1.2)\times a_{12}$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad \text{—(3.1.5)}$$

$(3.1.1)\times a_{21} - (3.1.2)\times a_{11}$

$$(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \quad \text{—(3.1.6)}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ならば解は

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{—(3.1.7)}$$

ここで

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

と書いておくと規則正しい表式

〜"クラメールの公式"

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{—(3.1.8)}$$

が得られる。

計算の仕方(サラス)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|$ を行列Aの(2次の)行列式という。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \ominus \quad \oplus$$

逆行列と行列式の間に密接な関係が存在を示唆!!

3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

同様に(3次の)行列式 を

サラスの方法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \Delta \quad \text{—(3.1.9)}$$

$-$ $+$

とおく

で定義しておく。2次の行列式を用いて

〜"余因子展開"

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \cdots(3.1.10)$$

とも書くことができる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ のとき、解は

〜"クラメールの公式"

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{—(3.1.11)}$$

$$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1列目入れ替え

2列目入れ替え

3列目入れ替え

§§3-2 行列式の定義

・レビ・チビタ記号

$$\underbrace{\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}}_{n\text{つの添字}} = \begin{cases} 1 & (i_1 i_2 \cdots i_n \text{が} 1,2,\cdots,n \text{の偶置換のとき}) \\ -1 & (\quad 〃 \quad \text{奇} \quad 〃 \quad) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad —(3.2.1)$$

$n=2 \quad \varepsilon_{12}=1,\ \varepsilon_{21}=-1,\ \varepsilon_{11}=0,\ \varepsilon_{22}=0$

$n=3 \quad \varepsilon_{123}=1,\ \varepsilon_{213}=-1,\ \varepsilon_{231}=1,\ \varepsilon_{112}=0,\cdots$

$\vdots$

・定義(行列式)

$A\in M(n,n)$に対して、行列式 $|A|$ $\left(\det(A),\ |a_{ij}|,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right)$ を

$$|A| = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \qquad —(3.2.2)$$

と定義する.

例) $n=2$の場合:

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$の場合:

$$|A| = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

iについての和を陽に

$$= \sum_{j,k=1}^{3} (\varepsilon_{1\underbrace{jk}_{2\text{or}3\text{のみ残る}}} a_{11} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{2\underbrace{jk}_{3\text{or}1}} a_{12} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{3\underbrace{jk}_{1\text{or}2}} a_{13} a_{2j} a_{3k})$$

$$= a_{11}(\varepsilon_{123} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{132} a_{23} a_{32})$$
$$+ a_{12}(\varepsilon_{231} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{213} a_{21} a_{33})$$
$$+ a_{13}(\varepsilon_{312} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{321} a_{22} a_{31})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

(3.1.9)と同じ

列ベクトルを用いて

$$|A| = |A^1, A^2, \cdots, A^n| = |a_1, a_2, \cdots, a_n| \qquad —(3.2.3)$$

とも書く。ここで

$$A^1 = a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ A^2 = a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ A^n = a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

§3-3 性質

定理 3.1

$$|{}^tA|=|A| \qquad —(3.3.1)$$

証明)

$n=2$

$$|{}^tA|=\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}\,a_{i1}a_{j2}=\varepsilon_{12}a_{11}a_{22}+\varepsilon_{21}a_{21}a_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}a_{1i}a_{2j}=|A|$$

⇒ 行の添字を固定して列の添字について和をとることと
列の添字を固定して行の添字について和をとることは同じ

$$|{}^tA|=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}\,a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}\,a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=|A|$$

□

定理 3.2

行列式で2つの列(または行)を入れ替えると符号が変わる.

$$|a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots,a_s,\cdots,a_n|=-|a_1,a_2,\cdots,a_s,\cdots,a_r,\cdots,a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺})=\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n}\varepsilon_{i_1\cdots i_r\cdots i_s\cdots i_n}\,a_{1i_1}\cdots a_{ri_r}\cdots a_{si_s}\cdots a_{ni_n}$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n}\underset{-\varepsilon_{i_1\cdots i_s\cdots i_r\cdots i_n}}{\underset{\parallel}{\varepsilon_{i_1\cdots i_r\cdots i_s\cdots i_n}}}\,a_{1i_1}\cdots a_{si_s}\cdots a_{ri_r}\cdots a_{ni_n}$$

$$=-\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n}\varepsilon_{i_1\cdots i_s\cdots i_r\cdots i_n}\,a_{1i_1}\cdots a_{ri_r}\cdots a_{si_s}\cdots a_{ni_n}=(\text{右辺})$$

□

$n=3$

$$|a_1,a_2,a_3|=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,a_{1i}a_{3k}a_{2j}$$

$$=-\sum_{i,k,j=1}^{3}\varepsilon_{ikj}\,a_{1i}a_{3k}a_{2j}=-|a_1,a_3,a_2|$$

系 1

行列式で列(または行)の奇置換(偶置換)に対して符号が変わる(変わらない)。

系 2

行列式の2つの列(または行)が等しいとき、その行列式は0である.

定理 3.3

$$|a_1, a_2, \cdots, a_j' + a_j'', \cdots, a_n|$$
$$= |a_1, a_2, \cdots, a_j', \cdots, a_n| + |a_1, a_2, \cdots, a_j'', \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i_1, \cdots, i_j, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots (a'_{j i_j} + a''_{j i_j}) \cdots a_{n i_n}$$
$$= \sum_{i_1, \cdots, i_j, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots a'_{j i_j} \cdots a_{n i_n}$$
$$+ \sum_{i_1, \cdots, i_j, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots a''_{j i_j} \cdots a_{n i_n}$$
$$= (\text{右辺})$$

□

定理 3.4

$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$|a_1, \cdots, (c a_j), \cdots, a_n| = c\,|a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i_1, \cdots i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots (c\, a_{j i_j}) \cdots a_{n i_n}$$
$$= c \sum_{i_1, \cdots i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots a_{j i_j} \cdots a_{n i_n} = (\text{右辺})$$

□

定理 3.5

$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$|a_1, \cdots, a_j + c\,a_k, \cdots, a_k, \cdots a_n| = |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) \overset{\text{定理3.3}}{=} |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n| + |a_1, \cdots, c\,a_k, \cdots, a_k, \cdots a_n|$$
$$\overset{\text{定理3.4}}{=} |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n| + c\,\underbrace{|a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_k, \cdots a_n|}_{=0 \ \leftarrow \ \text{定理3.2 系2}}$$
$$= (\text{右辺})$$

□

定理3.6

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

証明)

(i) $(\text{左辺}) = \sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$

i_1について和を陽に

$= \sum_{i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{1 i_2 \cdots i_n} a_{11} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$

$i_2=1,\cdots,$ or $i_n=1$ のときは0

$= a_{11} \underbrace{\sum_{i_2,\cdots,i_n=2}^{n} \underbrace{\varepsilon_{1 i_2 \cdots i_n}}_{= \varepsilon_{i_2 \cdots i_n}} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}}_{= \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}} = (\text{右辺})$

(ii) $|{}^tA| = |A|$ であることから証明は(i)と同じ

□

系

三角行列の行列式は対角成分の積である.

$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

証明) $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n2} & a_{3n} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

□

定理 3.7

$A, B \in M(n,n)$ に対して

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ。

証明)

$$(左辺) = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1\cdots i_n} (AB)_{1i_1} \cdots (AB)_{ni_n}$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1\cdots i_n} a_{1j_1} b_{j_1 i_1} \cdots a_{nj_n} b_{j_n i_n}$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1\cdots i_n} b_{j_1 i_1} \cdots b_{j_n i_n}}_{} \Bigg) a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

定理 3.2 系 1 " $\varepsilon_{j_1\cdots j_n} \sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1\cdots i_n} b_{1i_1} \cdots b_{2i_n}$

$(1,\cdots,n) \to (j_1,\cdots,j_n)$ の入れ替えが奇(偶)置換で生じる符号の変化に対応

$= \varepsilon_{j_1\cdots j_n} |B|$

$$= \underbrace{\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\cdots j_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}}_{=|A|} |B| = |A||B| = (右辺)$$

□

ここで (3.1.10) の一般論を考える。そこで余因子を次のように定義する。

定義

$A \in M(n,n)$ に対して A の (i,j) 余因子 Δ_{ij} は

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i 行

j 列　第 i 行と第 j 列を除いた行列の行列式

次の定理が成り立つ。

定理 3.8 ($|A|$ の展開)

$A = (a_{ij}) \in M(n,n)$ に対して

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij} = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

—— (3.3.2)

が成り立つ。

証明)

i番目の和だけ抜き出す

$$|A| = \sum_{j_1, j_2, \cdots j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_{i-1}, j_{i+1}, \cdots j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1 j_{i-1}} a_{i+1 j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

i番目の数 j_i を除いて(n-1)次のレビ・チビタ記号で表わす

i番目の数 j_i を先頭に移動し j_i を除いた(n-1)次のレビ・チビタ記号で表わす

$$\varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{i+j_i} \underbrace{\overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}}_{(n-1)\text{コ}} \quad \text{—}(※)$$

∵

$$\varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{i-1} \varepsilon_{j_i j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

先頭に移動
(i-1)回置換

$$\| \quad (-1)^{j_i-1} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

$$\therefore \varepsilon_{i_1 \cdots i_{j-1} i_j i_{j+1} \cdots i_n} = (-1)^{i+j_i} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

$$\therefore |A| = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_{i-1}, j_{i+1}, \cdots j_n=1}^{n} (-1)^{i+j_i} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n} \times a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1 j_{i-1}} a_{i+1 j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

j_i を除いて和をとる

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} (-1)^{i+j_i} \underbrace{\sum_{j_1, j_2, \cdots, j_{i-1}, j_{i+1}, \cdots j_n=1}^{n} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1 j_{i-1}} a_{i+1 j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}}_{\text{i番目の行と } j_i \text{ 番目の列を除いた行列の行列式}}$$

$$\| \quad \Delta_{ij_i}$$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \Delta_{ij_i}$$

$j_i \to j$ "名前"の変更

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$$

$|{}^tA| = |A|$ であることから、 $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$ も成り立つことが容易にわかる。 □

定理 3.9

$A=(a_{ij})\in M(n,n)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\Delta_{ik}=\delta_{jk}|A|,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta_{kj}=\delta_{ik}|A| \qquad \text{——(3.3.3)}$$

が成り立つ.

証明)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj}=\sum_{j_k=1}^{n} a_{ij_k}\,\Delta_{kj_k}$$

$$=\sum_{j_k=1}^{n} a_{ij_k}(-1)^{k+j_k}\sum_{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n=1}^{n}{}' \varepsilon^{(n-1)}_{j_1\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_n}\,a_{1j_1}\cdots a_{k-1\,j_{k-1}}\,a_{k+1\,j_{k+1}}\cdots a_{nj_n}$$

☆: →

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n}\varepsilon_{j_1\cdots j_n}\,a_{1j_1}\cdots a_{k-1\,j_{k-1}}\,a_{ij_k}\,a_{k+1\,j_{k+1}}\cdots a_{nj_n}$$

k 列目

$$=|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n|$$

$$=\delta_{ik}|A|$$

$k\neq i$ のとき 定理3.2 系2 より 0.
$k=i$ のとき 行列式そのもの.

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\Delta_{ik}=\delta_{jk}|A|$ も同様に示される.

□

ここで余因子行列を次のように定義する.

<u>定義</u>

$A=(a_{ij})\in M(n,n)$ に対して余因子行列 $\mathrm{adj}(A)$ は、余因子を Δ_{ij} としたとき,

$$(\mathrm{adj}(A))_{ij}=\Delta_{ji} \qquad \text{——(3.3.4)}$$

として定義される. 添字に注意.

すると定理 3.9 の式 (3.3.3) は

$$\mathrm{adj}(A)\,A=A\,\mathrm{adj}(A)=|A|\,I_n \qquad \text{——(3.3.5)}$$

と書くことができる.

定理 3.10

正方行列 A が正則 $\iff |A| \neq 0$

証明) $\Rightarrow$) A^{-1} が存在して $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

両辺の行列式を計算すると

$$|A||A^{-1}| = |I| = 1.$$

よって $|A| \neq 0$. (なお $|A^{-1}| = |A|^{-1}$)

$\Leftarrow$) 式 (3.3.5) より、$|A| \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)A = A\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) = I$$

が成り立つ. よって $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

$\square$

上の証明でわかったように、$|A| \neq 0$ のとき逆行列が存在して

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{—— (3.3.6)}$$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|}\Delta_{ji}$$

と計算できる. ここで

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 行と第 j 列を除いた行列の行列式

であった. 特に $n=2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

定理(おまけ)

$A(x) = (a_{ij}(x))$ に対して

$$\frac{d}{dx}|A(x)| = |A(x)|\sum_{i,j=1}^{n}(A^{-1})_{ij}\frac{d}{dx}A_{ij}$$

が成り立つ.

☺ $n=2$ を確かめる. 一般の場合は宿題

$$|A|' = a_{22}a_{11}' + a_{11}a_{22}' - a_{21}a_{12}' - a_{12}a_{21}' = |A|((A^{-1})_{11}a_{11}' + (A^{-1})_{22}a_{22}' + (A^{-1})_{12}a_{12}' + (A^{-1})_{21}a_{21}')$$

$$= |A|\sum_{i,j=1}^{n}(A^{-1})^{ij}a_{ij}' \quad //$$

§§3-4 クラメールの公式

n個の連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

行列 $A=(a_{ij})$ と列ベクトル $\mathbb{x}, \mathbb{b}$ で表わすと

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

Aが正則であれば 解は

$$\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

と表わされる.

定理 3.11

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ならば

$$|\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_{i-1}, \mathbb{b}, \mathbb{a}_{i+1}, \cdots, \mathbb{a}_n| = x_i|A|$$

が成り立つ. 特に $|A| \neq 0$ のとき

$$x_i = \frac{1}{|A|}|\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_{i-1}, \mathbb{b}, \mathbb{a}_{i+1}, \cdots, \mathbb{a}_n| \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

クラメールの公式

と解が書ける.

証明)

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ を $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{a}_j x_j = \mathbb{b}$ と書いておく.

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{(\mathbb{a}_j)_i} x_j = b_i$$

すると

$$\begin{aligned} &|\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_{i-1}, \mathbb{b}, \mathbb{a}_{i+1}, \cdots, \mathbb{a}_n| \\ &= |\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \mathbb{a}_j x_j, \mathbb{a}_{i+1}, \cdots, \mathbb{a}_n| \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{|\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_{i-1}, \mathbb{a}_j, \mathbb{a}_{i+1}, \cdots, \mathbb{a}_n|}_{= \delta_{ji}|A|} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ji} |A| \\ &= x_i |A| \end{aligned}$$

$|A| \neq 0$ であるとき, $x_i = \frac{1}{|A|}|\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_{i-1}, \mathbb{b}, \mathbb{a}_{i+1}, \cdots, \mathbb{a}_n|$

と書けるのは自明.

□

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{i-1},j_{i+1},\cdots j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1\,j_{i-1}} a_{i+1\,j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n}}_{\text{先頭に移動}} = (-1)^{i-1} \varepsilon_{j_i j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

先頭に移動
(i-1)回 置換

i番目の数 j_i を先頭に移動し j_i を除いた(n-1)次のレビ・チビタ記号で表わす

$$\therefore \varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{i-1} \varepsilon_{j_i j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

$$\varepsilon_{2341} = (-1)^{i-1} \varepsilon_{4231}$$

$$\varepsilon_{j_i j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{j_i - 1} \underbrace{\varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}}_{(n-1)次}$$

が成り立つ.

"j_i"を除いて定義されたレビ・チビタ記号

j_iを先頭に移動する際の置換の回数

$$\therefore \varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{i-1+j_i-1} \varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

$$= (-1)^{i+j_i} \varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n} \quad \text{—(☆)}$$

§4 行列の基本変形と連立1次方程式と逆行列

§§4-1 行列の基本変形

・基本行列

$$\begin{array}{cc} & \text{第}i\text{列} \\ I_n(i;k) \equiv & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{第}i\text{行} \quad \xleftarrow[\text{但し}k\neq 0]{\text{第}i\text{列を}k\text{倍}} \quad I_n$$

$$I_n(i;k) = (e_1, e_2, \cdots, ke_i, \cdots, e_n) \quad , e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{第}i\text{列} \quad \text{第}j\text{列} \\ I_n(i,j;k) \equiv & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \xleftarrow[\text{但し}i\neq j]{\text{第}i\text{列を}k\text{倍して第}j\text{列に加える}} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \xrightarrow{k\text{倍して加える}} 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n(i,j;k) = (e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_j + ke_i, \cdots, e_n)$$

$$\begin{array}{cc} & \text{第}i\text{列} \quad \text{第}j\text{列} \\ I_n(i,j) \equiv & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 0 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \xleftarrow[\text{但し}i\neq j]{\text{第}i\text{列と第}j\text{列と交換。}} \quad I_n \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & \overset{\text{交換}}{\longleftrightarrow} & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n(i,j) = (e_1, e_2, \cdots, e_j, \cdots, e_i, \cdots, e_n)$$

基本行列は正則行列である.

$\because$ $|I_n(i;k)| = k$, $|I_n(i,j;k)| = 1$, $|I_n(i,j)| = -|I_n| = -1$ //

◦行基本変形

$A\in M(m,n)$ に対して

$I_m(i;k)A$ は A の第 i 行に数 k を掛けたものである

$I_m(i,j;k)A$ は A の第 j 行を k 倍して第 i 行に加えたものである.

$I_m(i;k)A$ は A の第 i 行と第 j 行を交換したものである.

∵

$$\begin{array}{c}\\ \\ \text{第}i\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&k&&\\&&&&1&\\0&&&&&\ddots\;1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ ka_{i1}&\cdots&ka_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ kA_i\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&\text{第}i\text{列}&\text{第}j\text{列}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&k\\&&&\ddots&\\&&&&1\\&&&&&\ddots\;1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}+ka_{j1}&\cdots&a_{in}+ka_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_i+kA_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}&\begin{array}{ccc}&\text{第}i\text{列}&\text{第}j\text{列}\end{array}\\ \begin{array}{c}\\ \\ \text{第}i\text{行}\\ \\ \text{第}j\text{列}\\ \\ \end{array}&\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&0&&1&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&1&\\&&&1&&0&\\&&&&&&1\;\;1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$$

□

◦列基本変形

$AI_n(i;k)$ は A の第 i 列に数 k を掛けたものである

$AI_n(i,j;k)$ は A の第 i 列を k 倍して第 j 列に加えたものである.

$AI_n(i;j)$ は A の第 i 列と第 j 列を交換したものである.

∵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}&\text{第}i\text{列}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&k&&\\&&&&1&\\0&&&&&\ddots\;1\end{pmatrix}\end{array}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,k\boldsymbol{a}_k,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jm}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{m}\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&\text{第}i\text{列}&\text{第}j\text{列}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&k\\&&&\ddots&\\&&&&1\\&&&&&\ddots\;1\end{pmatrix}\end{array}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j+k\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&\text{第}i\text{列}&\text{第}j\text{列}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&0&&1&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&1&\\&&&1&&0&\\&&&&&&1\;\;1\end{pmatrix}\end{array}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

□

定理4.1

$A \in M(m,n)$に対して有限回の行/列基本変形を行った結果得られた行列Bは

$$B = PAQ$$

と書けている. ここで $P \in M(m,m)$, $Q \in M(n,n)$ で各々正則行列。

証明) 変形は基本行列を左と右から有限回掛けることによって行われる. 基本行列は正則であり, その掛け合わせたものも正則であるから, P, Q が正則であることは自明

□

上記の行列AとBの関係を

$$A \sim B$$

で表わすと,

$A \sim A$ (反射律)

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (対称律)

$A \sim B$ かつ $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (推移律)

を満たすことが容易にわかる。このような関係を同値関係という.

行列が見た目は異なっていても, ある量に注目すると実質同じであることが後にわかる.

§§4-2 行列の階数

定理4.2

$A=(a_{ij})\in M(m,n)$ に有限回の基本変形を行って

$$I(r)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \end{array}$$

と変形できる. ここで r は基本変形の仕方に依らない整数であり, 行列Aの**階数**といい, $r=\mathrm{rank}(A)$ と表わす.

注意

$$A=(a_{ij})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in M(m,n),\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

に対して**階数(rank)**とは $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\cdots,n}$ のうち1次独立なベクトルの個数である。

手順

$$A \xrightarrow{\text{(i) 基本変形}} B(r)=\left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline O & O \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(ii)列基本変形}} \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(iii)}} r\text{がAのみに依ること}$$

証明) (i) $A=O$ のとき $B(0)=A$ で 自明. このとき基本変形に関係なく $r=0$.
そこで $A\neq O$ とする. このとき a_{ij} で 0でないものがあるので、たとえ $a_{11}=0$ であっても 基本変形後に(1, 1)成分が0でないようにとることができる.
よって、以下では $a_{11}\neq 0$ とする.

例) $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

まず 第1行を $\frac{1}{a_{11}}$ 倍して

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

次に第1行に a_{21} を掛けて第2行から引くことにより (2,1)成分を0に。

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

繰り返して $(i,1)$ $(3\leq i\leq m)$ 成分も 0に。

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ 0 & a_{32}' & \cdots & a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{m2}' & \cdots & a_{mn}' \end{pmatrix}$$

今度は第二行に $\frac{1}{a'_{22}}$ を掛けて (但し $a'_{22} \neq 0$ とした。)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \boxed{a'_{12}} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n}/a'_{22} \\ 0 & a'_{32} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

先と同様にこの部分を0にできる。
(※)

結局、基本変形後に

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & \cdots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

となる。同様の変形を対角成分が0になるまで行う。

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & & a'''_{1\,r+1} \cdots a'''_{1n} \\ & & \vdots \qquad \vdots \\ \vdots & 0 & 0 \\ & \vdots & a'''_{r+2\,r+1} \; 0 \\ & & \quad \ddots \\ 0 \cdots & 0 & a'''_{m\,r+1} \cdots 0 \end{pmatrix}$$

この部分は行の交換によりすでに0となっている
0でなかったとすると行の入れ替えで

$$\begin{pmatrix} I_r & & a'''_{1\,r+1} \cdots a'''_{1n} \\ & & \vdots \qquad \vdots \\ \vdots & 0 & 0 \\ & \vdots & a'''_{r+2\,r+1} \; 0 \\ 0 \cdots & 0 & a'''_{m\,r+1} \cdots 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_r & & a'''_{1\,r+1} \cdots a'''_{1n} \\ \vdots & 0 & a'''_{r+2\,r+1} \; 0 \\ & 0 & 0 \quad a'''_{r+1\,r+2} \\ & \vdots & \vdots \qquad \ddots \\ 0 \cdots & 0 & a'''_{m\,r+1} \cdots 0 \end{pmatrix}$$

と $(r+1, r+1)$ 成分が0でなくなる。これはおかしい。

従って

$$A''' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array}$$

と変形できた。

(ii)

$$A \sim B(r) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

次の列基本変形を考える

$$\begin{array}{c} \\ B(r) \sim \end{array} \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j\text{-列} \\ \left(\begin{array}{c|ccccccc} I_r & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1\,r+j-1} & 0 & a_{1\,r+j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{r\,r+j-1} & 0 & a_{r\,r+j+1} & \cdots & a_{rn} \\ \hline 0 & & & & 0 & & & \end{array}\right) \end{array} \quad (1 \leq j \leq n-r)$$

$$\therefore\ A \sim B(r) \sim I(r) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array}$$

(iii) 最後に r が唯一に決まることをみる。

そのために他の有限回の基本変形を行い $I(p)$ が得られたとする。
すると $I(p) = P\,I(r)\,Q$ を満たすある m次正則行列 P, n次正則行列 Q が存在する。

ここで

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{m-r} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right) \end{array}, \quad Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right) \end{array}$$

と書いておくと

$$I(p) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

ここで $r < s$ として一般性を失うことはない。

$$P_{11}Q_{11} = I_r, \quad P_{11}Q_{12} = O, \quad P_{21}Q_{11} = O, \quad P_{21}Q_{12} \neq O$$

P_{11}, Q_{11} は正則行列で逆行列が存在

$$Q_{12} = P_{11}^{-1} O = O$$

$$P_{21} = O\,Q_{11}^{-1} = O$$

$$P_{21}Q_{12} = O$$

矛盾 $\Rightarrow r = p$

□

- 定義から明らかなように $r \leq m$ かつ $r \leq n$
- rank(A)は

階段行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & & & \\ 0 & & \ddots & a_{rr} & \\ 0 & & & 0 & \end{pmatrix}$ の形まで変形できればわかる。

定理4.3

$A \in M(n,n)$ が正則 $\iff \mathrm{rank}(A) = n$

証明)

$\Rightarrow$) $\mathrm{rank}(A) = r < n$ とする. すると n 次のある正則行列 P, Q が存在して

$$I(r) = PAQ$$

が成り立つ. そして PAQ も正則であるから定理3.10より

$$|PAQ| \neq 0$$

一方で $|I(r)| = 0$. これは

$r<n$ としているので

$$|I(r)| = |PAQ|$$

であることと矛盾. したがって $r = n$.

$\Leftarrow$) $I(r) = I_n$. よって $PAQ = I_n$. そして $A = P^{-1}Q^{-1}$ と正則行列の積として A が書けるので, A は正則である.

$\square$

系

$A \in M(n,n)$ が正則 $\iff A \sim I_n$

$\because$ 定理の証明過程から

$$I_n = PAQ$$

が成り立つことがわかっている. ここで P, Q は n 次正則行列. //

§§4-3 連立1次方程式の解法

$$A\mathbb{x}=\mathbb{b},\quad A=(a_{ij})\in M(m,n),\quad \mathbb{x}\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbb{b}\in\mathbb{R}^m \qquad —(4.3.1)$$

係数行列

$$\tilde{A}\equiv(A,\mathbb{b})=(\mathbb{a}_1,\cdots,\mathbb{a}_n,\mathbb{b})\in M(m,n+1)$$: 拡大係数行列 —(4.3.2)

さて $\tilde{A}$ に行基本変形を行うと

$$\tilde{B}=P\tilde{A}=(PA,P\mathbb{b})=(B,\mathbb{c}) \qquad —(4.3.3)$$

ここで P はある m次正則行列。また

$$B=PA,\ \mathbb{c}=P\mathbb{b}\ (逆に\ A=P^{-1}B,\ \mathbb{b}=P^{-1}\mathbb{c}) \qquad —(4.3.4)$$

とおいた。$\tilde{B}$ に対応する連立1次方程式は

$$B\mathbb{x}=\mathbb{c} \qquad —(4.3.5)$$

であるが、(4.3.1)の解とこの解は一致する。

$$\because\quad A\mathbb{x}=\mathbb{b}\longrightarrow PA\mathbb{x}=P\mathbb{b}\rightarrow B\mathbb{x}=\mathbb{c}$$
$$B\mathbb{x}=\mathbb{c}\longrightarrow P^{-1}B\mathbb{x}=P^{-1}\mathbb{c}\rightarrow A\mathbb{x}=\mathbb{b} \qquad //$$

よって $\tilde{B}$ の具体形が簡単な形にとっておけば、式(4.3.5)は簡単に解け式(4.3.1)の解が容易に得られる。

定理4.4

(i) (4.3.1)が解をもつ $\Leftrightarrow$ rank(A)=rank$(\tilde{A})$。

特に

(ii) 解が唯一 $\Leftrightarrow$ rank(A)=rank$(\tilde{A})$=n

証明) $\tilde{A}$ に行基本変形を行って

$$\tilde{A}\sim\tilde{B}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\ }^{r} & \overbrace{\ }^{n-r} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} I_r & * & \begin{matrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{matrix} \\ \hline O & O & \begin{matrix}\beta_{r+1}\\ \vdots\\ \beta_m\end{matrix} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}\,r \\ \}\,m-r \end{array}$$

$\underset{B}{\shortparallel}$

とできる。方程式は $B\mathbb{x}=\beta$, $\mathbb{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$ を解くことと等価であるが

$\beta_{r+1},\cdots,\beta_m$ のなかで 0 でないものがあれば

$(m-r)\times(n-r)\rightarrow O\,\mathbb{x}^{(-)}=\beta^{(-)}$, $\mathbb{x}^{(-)}=\begin{pmatrix}x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\beta^{(-)}=\begin{pmatrix}\beta_{r+1}\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$

から明らかなように解は持たない。よって $\beta_{r+1}=\cdots=\beta_m=0$ であれば解をもつ。

従って rank$(\tilde{B})$=rank$(\tilde{A})$ = rank(A)。逆は上の議論から明らか。

$\beta^{(-)}=\mathbb{0}$ のとき、rank$(A)<n$ とすると解が唯一に定まらない。⇝ $\mathbb{x}^{(-)}$ が勝手

従って rank$(A)=n$ のときに限り解が唯一に定まる。 □

同次または斉次連立1次方程式

$$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \quad (A\in M(m,n),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{0}\in\mathbb{R}^m) \quad \text{—(4.3.6)}$$

これは自明な解

$$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

をもつ.

定理4.5

(4.3.6)が自明ではない解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)<n$.

証明)

(4.3.6)が自明ではない解をもつ $\overset{\text{定理4.4}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\tilde{A})$

もし $\mathrm{rank}(A)=n$ の場合, 唯一解が存在し, 今の場合 自明な解である.

従って $\mathrm{rank}(A)<n$.

□

定理4.6

$m=n$ のとき, (4.3.6)の解は自明な解のみ $\Longleftrightarrow$ Aは正則 $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$

例)

$$\begin{pmatrix}1&5&-13&5\\2&5&-11&5\\-1&7&-23&3\\3&1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\13\\17\end{pmatrix}$$

基本変形で0に

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\2&5&-11&5&6\\-1&7&-23&3&13\\3&1&3&-1&17\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(3行)+(1行)\\(4行)-3(1行)}]{(2行)-(1行)\times 2}\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\0&-5&15&-5&0\\0&12&-36&8&16\\0&-14&42&-16&8\end{pmatrix}$$

約分できるものを整理

0に.

$$\xrightarrow[(4行)\times(-\frac{1}{2})]{\substack{(2行)\times(-\frac{1}{5})\\(3行)\times\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix}1&5&-13&5&3\\0&1&-3&1&0\\0&3&-9&2&4\\0&7&-21&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[(4行)-7(2行)]{\substack{(1行)-5(2行)\\(3行)-3(2行)}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-3&1&0\\0&0&0&-1&4\\0&0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

入れ替え

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&1&-3&0\\0&0&-1&0&4\\0&0&1&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{1に}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&1&-3&0\\0&0&1&0&-4\\0&0&1&0&-4\end{pmatrix}$$

0に.

$$\xrightarrow[(4行)-(3行)]{(2行)-(3行)}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&-3&4\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

以上より

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\\0\end{pmatrix}$$ を解けばよい.

途中で第3列と4列の入れ替えを行っているので。

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=3\\x_2-3x_3=4\\x_4=-4\\0\cdot x_3=0\end{cases}$$

$\therefore x_3=c$ (任意定数)

$\therefore\ x_1=3-2c,\ x_2=4+3c,\ x_3=c,\ x_4=-4$

§§4-4 逆行列の計算

A：n次の正則行列

$$PAQ = I_n$$

$$QPA\underbrace{QQ^{-1}}_{= I_n} = QI_nQ^{-1} = QQ^{-1} = I_n$$

$$\therefore QPA = I_n$$

$$\therefore A^{-1} = QP$$

また $(QP)I_n = A^{-1}I_n = A^{-1}$

左から掛けているので

即ち、I_nを行基本変形することでA^{-1}が得られる.

具体的には $(n, 2n)$ 行列 (A, I_n) を行基本変形を施し

$$(A, I_n) \sim (QPA, QPI_n) = (I_n, A^{-1})$$

となるまで変形すればA^{-1}が求められる.

例)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\8&3&-1&-1\\3&0&3&-1\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\longrightarrow(A,I_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\8&3&-1&0&0&1&0&0\\3&0&3&-1&0&0&1&0\\0&-2&3&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

0に

1にしたいため
第4行を加える

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&3&-17&7&-8&1&0&0\\0&0&-3&2&-3&0&1&0\\0&-2&3&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-14&8&-8&1&0&1\\0&0&-3&2&-3&0&1&0\\0&-2&3&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

0にするため(第2行)×2を加える

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-14&8&-8&1&0&1\\0&0&-3&2&-3&0&1&0\\0&0&-25&17&-16&2&0&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-14&8&-8&1&0&1\\0&0&1&-1&-8&-2&8&-3\\0&0&-25&17&-16&2&0&3\end{pmatrix}$$

1にするため8倍し
第4行目を引く

0にするため(第3行)×25を加える

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-14&8&-8&1&0&1\\0&0&1&-1&-8&-2&8&-3\\0&0&0&-8&-216&-48&200&-72\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-14&8&-8&1&0&1\\0&0&1&-1&-8&-2&8&-3\\0&0&0&1&27&6&-25&9\end{pmatrix}$$

1にするため$\left(-\frac{1}{8}\right)$を掛ける

0にするため"−(第3行)×2 −(第4行)"を加える

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-10&-2&9&-3\\0&1&-14&8&-8&1&0&1\\0&0&1&-1&-8&-2&8&-3\\0&0&0&1&27&6&-25&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-10&-2&9&-3\\0&1&0&0&42&9&-38&13\\0&0&1&-1&-8&-2&8&-3\\0&0&0&1&27&6&-25&9\end{pmatrix}$$

0にするため"(第3行)×14 +(第4行)×6"を加える

0にするため第4行を加える

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-10&-2&9&-3\\0&1&0&0&42&9&-38&13\\0&0&1&0&19&4&-17&6\\0&0&0&1&27&6&-25&9\end{array}\right)=(I_4,A^{-1})$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-10&-2&9&-3\\42&9&-38&13\\19&4&-17&6\\27&6&-25&9\end{pmatrix}$$