§2 行列

§§2-1 行列

- (m,n)行列

$$A=\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{第}j\text{列} & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第}i\text{行} \end{array}$$

- 種々な表現

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

n項行ベクトル

$A_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\quad i=1,2,\cdots,m$

$$A=(A^1, A^2, \cdots, A^n)=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) \qquad A^j=\mathbf{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad j=1,2,\cdots,n$$

m項列ベクトル

- 成分　a_{ij} … 行列 A の i 行 j 列の成分，(i,j) 成分

$A=(a_{ij})$ と表わすこともある。

- 定義（行列の和と差）

A, B … m行n列の行列　$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$

和　$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

差　$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$

スカラー倍　$kA=(ka_{ij})$

零行列　$O=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$　すべての成分が0

(-1)倍　$(-1)A=-A=(-a_{ij})$

- 行列の演算法則(I)

definition（定義）

$A=B \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} A, B$が同じ$m$行$n$列であり $a_{ij}=b_{ij}\ (1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$

次の演算法則が成り立つ：　$h, k\in\mathbb{R}$ に対して

$$A+B=B+A \qquad h(A+B)=hA+hB$$
$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (h+k)A=hA+kA$$
$$A+(-1)A=O \qquad (hk)A=h(kA)$$
$$A+O=O+A=A \qquad 1A=A$$

matrix

$\mathbb{R}$上のm行n列の行列の集合 $M(m,n;\mathbb{R})=\{A=(a_{ij}) \mid a_{ij}\in\mathbb{R}\}$ は実ベクトル空間である。

§§2-2 行列の積

";$\mathbb{R}$" を略している

$A=(a_{ij})\in M(l,m)$, $B=(b_{jk})\in M(m,n)$

一致させている!!

積 AB を以下のように定義する

AB … 成分を $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} = a_{ij}b_{jk}$ にもつ l 行 n 列の行列。

Einsteinの縮約束(同じ添字について和をとる)

すなわち

$$(AB)_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

注) • ABが定義されても、BAが定義されない場合がある.

• 一般に $AB\neq BA$

"可換でない"

行列の積には順序に注意!

◦行列の演算法則(II)

$A=(a_{ij})\in M(k,l)$, $B=(b_{jk})\in M(l,m)$, $C=(c_{kl})\in M(m,n)$ に対して

$$(AB)C=A(BC)$$

が成り立つ.

$$\because\ \left((AB)C\right)_{il}=\sum_{k=1}^{m}(AB)_{ik}\,c_{kl}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\underbrace{b_{jk}c_{kl}}_{(BC)_{jl}}$$

$$=\sum_{j=1}^{l}a_{ij}(BC)_{jl}$$

$$=\left(A(BC)\right)_{il}$$

//

$A=(a_{ij})\in M(l,m)$, $B=(b_{jk})$, $B'=(b'_{jk})\in M(m,n)$, $k\in\mathbb{R}$ に対して

$$A(B+B')=AB+AB'$$

$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

が成り立つ。

$$\because\ \left(A(B+B')\right)_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(B+B')_{jk}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(b_{jk}+b'_{jk})$$

$$=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b'_{jk}$$

$$=(AB)_{ik}+(AB')_{ik}$$

$$(k(AB))_{ik}=k(AB)_{ik}=\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\underbrace{(ka_{ij})}_{(kA)_{ij}}b_{jk}}_{(kA)B}=\underbrace{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\underbrace{(kb_{jk})}_{(kB)_{ij}}}_{A(kB)}$$

//

§2-3 いろいろな行列

- 単位行列とクロネッカーデルタ

n次単位行列 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M(n,n)$

クロネッカーデルタ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} \quad (1 \leq i,j \leq n)$

$I_n = (\delta_{ij})$ である.

$A \in M(n,m)$ に対して

$$I_n A = A I_m = A$$

が成り立つ.

- 転置行列 ${}^tA$

${}^tA$ の (i,j)-成分 $=$ A の (j,i)-成分 $\quad [({}^tA)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji}]$

$A \in M(m,n) \Leftrightarrow {}^tA \in M(n,m)$

定理 2.1

(i) ${}^t({}^tA) = A$,

(ii) $k \in \mathbb{R}$ に対して $\quad {}^t(kA) = k\,{}^tA$,

(iii) $A, B \in M(m,n)$ に対して $\quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(iv) $A \in M(l,m)$, $B \in M(m,n)$ に対して $\quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

順番が逆転!

証明) (i) $({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = (A)_{ij} = a_{ij}$

(ii) $({}^t(kA))_{ij} = (kA)_{ji} = k(A)_{ji} = k({}^tA)_{ij}$

(iii) $({}^t(A+B))_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ji}$

(iv) $({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{b_{ki}}_{= ({}^tB)_{ik}} \underbrace{a_{jk}}_{= ({}^tA)_{kj}} = ({}^tB\,{}^tA)_{ij}$ $\square$

・正方行列

n次正方行列　$M(n,n)$
行と列の数が同じ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
対角成分

対角成分の和をトレースという. $tr(A)$ で表わす.

Einsteinの縮約則
$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} \overset{\downarrow}{=} a_{ii}$$

性質
$A, B \in M(n,n)$ に対して
$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
$tr(kA) = k\,tr(A)$
$tr(AB) = tr(BA)$

非対角成分すべてが0の場合, その行列を対角行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

対角成分より下の成分すべてが0である行列を上三角行列という.
(上)　(下)

上三角行列　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

下三角行列　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A \in M(n,n)$ で
$${}^tA = A \quad [a_{ji} = a_{ij}]$$
を満たすものを対称行列という.

また
$${}^tA = -A \quad [a_{ji} = -a_{ij}]$$
を満たすものを交代行列という.

正方行列は対称行列と交代行列に分解できる.

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} = A_S + A_A$$
symmetric　anti-symmetric

$$A_S := \frac{A + {}^tA}{2}, \quad A_A := \frac{A - {}^tA}{2}$$
対称　交代

交代行列の対角成分は0である. $[\because a_{11} = -a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0, \cdots]$

・正則行列

$A, B \in M(n,n) \Rightarrow AB,\ A+B \in M(n,n)$

$M(n,n)$ は加法と乗法に関して閉じている

⇝ 数と同じ性質をもつ。零行列，単位行列もある。

しかし，

(i) 積について行列は一般に順番について交換可能でない。

$AB \neq BA$ 非可換

例) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&6\\7&0\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}19&6\\43&18\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}23&34\\7&14\end{pmatrix}$

(ii) $A \neq O, B \neq O$ でも $AB = O$ となるものがある。

例) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-6&4\\3&-2\end{pmatrix}$

(iii) $AX = XA = I_n$ を満たす $X \in M(n,n)$ が存在しないことがある。

例) $A=\begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in M(2,2)$

$$AX = \begin{pmatrix}2a+6c & 2b+6d\\ a+3c & b+3d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ 2a+6c=1,\ 2b+6d=0,\ a+3c=0,\ b+3d=1$

これらを満たす a,b,c,d は存在しない。

definition　exist　such that

定義

$A \in M(n,n)$ が正則 $\overset{def}{\iff} \exists X \in M(n,n)$ s.t. $AX = XA = I_n$

ここで X を A の逆行列とよび，

$$X = A^{-1}$$

と表わす。

注) 逆行列の唯一性

$AX = XA = I_n,\ AY = YA = I_n$

$(XA)Y = I_n Y = Y$　　$X(AY) = XI_n = X$

同じ

$\Rightarrow X = Y$

定理2.2

(i) A：正則 $\Rightarrow$ A^{-1}：正則

(ii) A, B：n次正則行列 $\Rightarrow$ ABも正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

証明)

(i) $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ より自明.

(ii)
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,\ BB^{-1} = B^{-1}B = I_n \text{ より}$$
$$(AB)B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}(AB) = I_n.$$
よって $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ であることがわかった. □

定理2.3

$$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A)$$

証明)

$$\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}(A\underbrace{BB^{-1}}_{I}) = \mathrm{tr}(A)$$
□