§3 行列式

§§3-1 連立1次方程式と2,3次の行列式

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \text{—(3.1.1)} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \text{—(3.1.2)} \end{cases} \xrightarrow{\text{行列で表現}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{—(3.1.3)}$$

or

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Aが正則行列であれば A^{-1} が存在して

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{—(3.1.4)}$$

と解が求められる. 後は A^{-1} を具体的に書き下せばよい.

一方, 普通に

$(3.1.1)\times a_{22} - (3.1.2)\times a_{12}$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad \text{—(3.1.5)}$$

$(3.1.1)\times a_{21} - (3.1.2)\times a_{11}$

$$(a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \quad \text{—(3.1.6)}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ならば解は

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{—(3.1.7)}$$

ここで

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

と書いておくと規則正しい表式

〜"クラメールの公式"

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{—(3.1.8)}$$

が得られる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|$$ を行列Aの(2次の)行列式という.

計算の仕方(サラス)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \ominus \quad \oplus$$

逆行列と行列式の間に密接な関係が存在を示唆!!

3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

同様に(3次の)行列式を

サラスの方法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \underbrace{\Delta}_{\text{とおく}} \quad \text{—(3.1.9)}$$

$\ominus$ $\oplus$

で定義しておく。2次の行列式を用いて

〜>"余因子展開"

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \cdots(3.1.10)$$

とも書くことができる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ のとき、解は

〜>"クラメールの公式"

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{—(3.1.11)}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

1列目入れ替え

2列目入れ替え

3列目入れ替え

§§3-2 行列式の定義

・レビ・チビタ記号

$$\varepsilon_{\underbrace{i_1 i_2 \cdots i_n}_{n\text{つの添字}}} = \begin{cases} 1 & (i_1 i_2 \cdots i_n \text{が} 1,2,\cdots,n \text{の偶置換のとき}) \\ -1 & (\quad 〃 \quad \text{奇} \quad 〃 \quad) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad \text{—}(3.2.1)$$

$n=2$ $\quad \varepsilon_{12}=1,\ \varepsilon_{21}=-1,\ \varepsilon_{11}=0,\ \varepsilon_{22}=0$

$n=3$ $\quad \varepsilon_{123}=1,\ \varepsilon_{213}=-1,\ \varepsilon_{231}=1,\ \varepsilon_{112}=0,\cdots$

⋮

・定義(行列式)

$A\in M(n,n)$ に対して、行列式 $|A|$ $\left(\det(A),\ |a_{ij}|,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right)$ を

$$|A| = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \qquad \text{—}(3.2.2)$$

と定義する。

例) $n=2$ の場合:

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$ の場合:

$$|A| = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

i についての和を陽に

$$= \sum_{j,k=1}^{3} \left(\varepsilon_{1\underset{\sim}{jk}} a_{11} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{2\underset{\sim}{jk}} a_{12} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{3\underset{\sim}{jk}} a_{13} a_{2j} a_{3k}\right)$$

2or3のみ残る　　3or1　　1or2

$$= a_{11}(\varepsilon_{123} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{132} a_{23} a_{32})$$
$$+ a_{12}(\varepsilon_{231} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{213} a_{21} a_{33})$$
$$+ a_{13}(\varepsilon_{312} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{321} a_{22} a_{31})$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

(3.1.9)と同じ

列ベクトルを用いて

$$|A| = |A^1, A^2, \cdots, A^n| = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \qquad \text{—}(3.2.3)$$

とも書く。ここで

$$A^1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\quad A^2 = \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ A^n = \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

§§3-3 性質

定理 3.1

$$|{}^tA| = |A| \quad \text{— (3.3.1)}$$

証明)

$n=2$

$$|{}^tA| = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\, a_{i1} a_{j2} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{21} a_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}\, a_{1i} a_{2j} = |A|$$

⇒ 行の添字を固定して列の添字について和をとることと
列の添字を固定して行の添字について和をとることは同じ

$$|{}^tA| = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}\, a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} = |A|$$

□

定理 3.2

行列式で2つの列(または行)を入れ替えると符号が変わる.

$$|a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots, a_s, \cdots, a_n| = -|a_1, a_2, \cdots, a_s, \cdots, a_r, \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n}\, a_{1 i_1} \cdots a_{r i_r} \cdots a_{s i_s} \cdots a_{n i_n}$$

$$= \sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n}\, a_{1 i_1} \cdots a_{s i_s} \cdots a_{r i_r} \cdots a_{n i_n}$$

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n} = -\varepsilon_{i_1 \cdots i_s \cdots i_r \cdots i_n}$$

$$= -\sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_s \cdots i_r \cdots i_n}\, a_{1 i_1} \cdots a_{r i_r} \cdots a_{s i_s} \cdots a_{n i_n} = (\text{右辺})$$

□

$n=3$

$$|a_1, a_2, a_3| = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_{1i} a_{3k} a_{2j}$$

$$= -\sum_{i,k,j=1}^{3} \varepsilon_{ikj}\, a_{1i} a_{3k} a_{2j} = -|a_1, a_3, a_2|$$

系 1

行列式で列(または行)の奇置換(偶置換)に対して符号が変わる(変わらない)。

系 2

行列式の2つの列(または行)が等しいとき, その行列式は0である.

定理 3.3

$$|a_1, a_2, \cdots, a_j' + a_j'', \cdots, a_n|$$
$$= |a_1, a_2, \cdots, a_j', \cdots, a_n| + |a_1, a_2, \cdots, a_j'', \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i_1, \cdots, i_j, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots (a'_{j i_j} + a''_{j i_j}) \cdots a_{n i_n}$$
$$= \sum_{i_1, \cdots, i_j, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots a'_{j i_j} \cdots a_{n i_n}$$
$$+ \sum_{i_1, \cdots, i_j, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots a''_{j i_j} \cdots a_{n i_n}$$
$$= (\text{右辺})$$

□

定理 3.4

$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$|a_1, \cdots, (c a_j), \cdots, a_n| = c\, |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i_1, \cdots i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots (c\, a_{j i_j}) \cdots a_{n i_n}$$
$$= c \sum_{i_1, \cdots i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} a_{1 i_1} \cdots a_{j i_j} \cdots a_{n i_n} = (\text{右辺})$$

□

定理 3.5

$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$|a_1, \cdots, a_j + c\, a_k, \cdots, a_k, \cdots a_n| = |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n|$$

証明)

$$(\text{左辺}) \overset{\text{定理3.3}}{=} |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n| + |a_1, \cdots, c\, a_k, \cdots, a_k, \cdots a_n|$$
$$\overset{\text{定理3.4}}{=} |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_k, \cdots, a_n| + c\, \underbrace{|a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_k, \cdots a_n|}_{= 0 \ (\text{定理3.2 系2})}$$
$$= (\text{右辺})$$

□

定理3.6

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

証明)

(i) $(\text{左辺}) = \displaystyle\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$

i_1について和を陽に

$= \displaystyle\sum_{i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{1 i_2 \cdots i_n} a_{11} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$

$i_2=1,\cdots,\text{or } i_n=1$ のときは 0

$= a_{11} \underbrace{\displaystyle\sum_{i_2,\cdots,i_n=2}^{n} \overset{= \varepsilon_{i_2 \cdots i_n}}{\varepsilon_{1 i_2 \cdots i_n}} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}}_{= \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}} = (\text{右辺})$

(ii) $|{}^tA| = |A|$ であることから証明は(i)と同じ

□

系

三角行列の行列式は対角成分の積である.

$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

証明) $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n2} & a_{3n} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

□

定理 3.7

$A, B \in M(n,n)$ に対して

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ。

証明)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} (AB)_{1 i_1} \cdots (AB)_{n i_n}$$

$$= \sum_{i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} a_{1 j_1} b_{j_1 i_1} \cdots a_{n j_n} b_{j_n i_n}$$

$$= \sum_{j_1, \cdots, j_n = 1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} b_{j_1 i_1} \cdots b_{j_n i_n}}_{= \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} \sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} b_{1 i_1} \cdots b_{2 i_n} \,=\, \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} |B|} \Bigg) a_{1 j_1} \cdots a_{n j_n}$$

定理 3.2 系 1

$(1, \cdots, n) \to (j_1, \cdots, j_n)$ の入れ替えが奇(偶)置換で生じる符号の変化に対応

$$= \underbrace{\sum_{j_1, \cdots, j_n = 1}^{n} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} a_{1 j_1} \cdots a_{n j_n}}_{= |A|} |B| = |A||B| = (\text{右辺})$$

□

ここで (3.1.10) の一般論を考える. そこで余因子を次のように定義する.

定義

$A \in M(n,n)$ に対して A の (i,j) 余因子 Δ_{ij} は

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & i\text{行} \end{array}$$

j 列　第 i 行と第 j 列を除いた行列の行列式

次の定理が成り立つ.

定理 3.8 ($|A|$の展開)

$A = (a_{ij}) \in M(n,n)$ に対して

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij} = a_{i1} \Delta_{i1} + a_{i2} \Delta_{i2} + \cdots + a_{in} \Delta_{in}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij} = a_{1j} \Delta_{1j} + a_{2j} \Delta_{2j} + \cdots + a_{nj} \Delta_{nj} \quad \text{―― (3.3.2)}$$

が成り立つ.

証明)

i番目の和だけ抜き出す

$$|A| = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{i-1},j_{i+1},\cdots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1\,j_{i-1}} a_{i+1\,j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

i番目の数 j_i を除いて (n−1)次のレビ・チビタ記号で表わす

i番目の数 j_i を先頭に移動し j_i を除いた (n−1)次のレビ・チビタ記号で表わす

$$\varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{i+j_i} \underbrace{\overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}}_{(n-1)個} \quad \text{—(☆)}$$

∵

$$\varepsilon_{j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n} = (-1)^{i-1} \varepsilon_{j_i j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

先頭に移動
(i−1)回置換

$$= (-1)^{j_i-1} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

$$\therefore \varepsilon_{i_1 \cdots i_{j-1} i_j i_{j+1} \cdots i_n} = (-1)^{i+j_i} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n}$$

$$\therefore |A| = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{i-1},j_{i+1},\cdots,j_n=1}^{n} (-1)^{i+j_i} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n} \times a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1\,j_{i-1}} a_{i+1\,j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

j_i を除いて和をとる

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} (-1)^{i+j_i} \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{i-1},j_{i+1},\cdots,j_n=1}^{n} \overset{(n-1)}{\varepsilon}_{j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{i-1\,j_{i-1}} a_{i+1\,j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

i番目の行と j_i 番目の列を除いた行列の行列式

$$= \Delta_{ij_i}$$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \Delta_{ij_i}$$

$j_i \to j$ "名前"の変更

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$$

$|{}^tA| = |A|$ であることから、 $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$ も成り立つことが容易にわかる。 □

定理 3.9

$A=(a_{ij})\in M(n,n)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ik}=\delta_{jk}|A|,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj}=\delta_{ik}|A| \quad \text{———}(3.3.3)$$

が成り立つ.

証明)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj}=\sum_{j_k=1}^{n} a_{ij_k}\Delta_{kj_k}$$

$$=\sum_{j_k=1}^{n} a_{ij_k}(-1)^{k+j_k}\sum_{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n=1}^{n}{}' \varepsilon^{(n-1)}_{j_1\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_n} a_{1j_1}\cdots a_{k-1\,j_{k-1}}a_{k+1\,j_{k+1}}\cdots a_{nj_n}$$

※

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1\cdots j_n} a_{1j_1}\cdots a_{k-1j_{k-1}}a_{ij_k}a_{k+1\,j_{k+1}}\cdots a_{nj_n}$$

k列目

$$=|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n|$$

$$=\delta_{ik}|A|$$

$k\neq i$ のとき 定理3.2 系2 より 0.
$k=i$ のとき 行列式 そのもの.

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ik}=\delta_{jk}|A|$ も同様に示される. □

ここで余因子行列を次のように定義する.

定義

$A=(a_{ij})\in M(n,n)$ に対して余因子行列 adj(A) は、余因子を Δ_{ij} としたとき,

$$(\mathrm{adj}(A))_{ij}=\Delta_{ji} \quad \text{——}(3.3.4)$$

として定義される. 添字に注意.

すると定理 3.9 の式 (3.3.3) は

$$\mathrm{adj}(A)\,A=A\,\mathrm{adj}(A)=|A|\,I_n \quad \text{——}(3.3.5)$$

と書くことができる.

定理 3.10

正方行列 A が正則 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$

証明) $\Rightarrow$) A^{-1} が存在して $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

両辺の行列式を計算すると

$$|A|\,|A^{-1}| = |I| = 1.$$

よって $|A| \neq 0$. (なお $|A^{-1}| = |A|^{-1}$)

$\Leftarrow$) 式(3.3.5)より、$|A| \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)\,A = A\,\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A) = I$$

が成り立つ. よって $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

□

上の証明でわかったように、$|A| \neq 0$ のとき逆行列が存在して

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{—— (3.3.6)}$$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|}\Delta_{ji}$$

と計算できる. ここで

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 行と第 j 列を除いた行列の行列式

であった. 特に $n=2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

定理(おまけ)

$A(x) = (a_{ij}(x))$ に対して

$$\frac{d}{dx}|A(x)| = |A(x)|\sum_{i,j=1}^{n}(A^{-1})_{ij}\frac{d}{dx}A_{ij}$$

が成り立つ.

☺ $n=2$ を確かめる. 一般の場合は宿題

$$|A|' = a_{22}a_{11}' + a_{11}a_{22}' - a_{21}a_{12}' - a_{12}a_{21}' = |A|((A^{-1})_{11}a_{11}' + (A^{-1})_{22}a_{22}' + (A^{-1})_{12}a_{12}' + (A^{-1})_{21}a_{21}')$$

$$= |A|\sum_{i,j=1}^{n}(A^{-1})^{ij}\,a_{ij}' \quad /\!/$$

§§3-4 クラメールの公式

n個の連立1次方程式

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

行列 $A=(a_{ij})$ とベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ で表わすと

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Aが正則であれば解は

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

と表わされる.

定理 3.11

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ならば

$$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = x_i|A|$$

が成り立つ. 特に $|A| \neq 0$ のとき

$$\underbrace{x_i = \frac{1}{|A|}|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n|}_{\text{クラメールの公式}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

と解が書ける.

証明) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}$ と書いておく.

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{=(\boldsymbol{a}_j)_i} x_j = b_i$$

すると

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \\
&= |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n|}_{= \delta_{ji}|A|} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ji} |A| \\
&= x_i |A|
\end{aligned}
$$

$|A| \neq 0$ であるとき, $x_i = \frac{1}{|A|}|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$

と書けるのは自明. □

$$= \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{i-1},j_{i+1},\cdots,j_n=1}^{n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{i-1\,j_{i-1}} a_{i+1\,j_{i+1}} \cdots a_{nj_n}$$

$$\varepsilon_{j_1\cdots j_{i-1} j_i j_{i+1}\cdots j_n} = (-1)^{i-1}\varepsilon_{j_i j_1\cdots j_{i-1} j_{i+1}\cdots j_n}$$

先頭に移動
$(i-1)$回 置換

i番目の数 j_i を先頭に移動し j_i を除いた $(n-1)$次のレビ・チビタ記号で表わす

$$\therefore \varepsilon_{j_1\cdots j_{i-1} j_i j_{i+1}\cdots j_n} = (-1)^{i-1}\varepsilon_{j_i j_1\cdots j_{i-1} j_{i+1}\cdots j_n}$$

$$\varepsilon_{2341} = (-1)^{i-1}\varepsilon_{4231}$$

$$\varepsilon_{j_i j_1\cdots j_{i-1} j_{i+1}\cdots j_n} = (-1)^{j_i-1}\varepsilon_{\underbrace{j_1\cdots j_{i-1} j_{i+1}\cdots j_n}_{(n-1)次}}$$

が成り立つ.

"j_i"を除いて定義されたレビ・チビタ記号

j_iを先頭に移動する際の置換の回数

$$\therefore \varepsilon_{j_1\cdots j_{i-1} j_i j_{i+1}\cdots j_n} = (-1)^{i-1+j_i-1}\varepsilon_{j_1\cdots j_{i-1} j_{i+1}\cdots j_n}$$

$$= (-1)^{i+j_i}\varepsilon_{j_1\cdots j_{i-1} j_{i+1}\cdots j_n} \quad —(☆)$$