11 ベクトル空間と線型写像

「ベクトルもまた線型写像」— Agsaryim Ghuamie

幾何ベクトルの成分表示と連立一次方程式の解法を結びつけることで、これまで数ベクトルおよび行列の理論を展開してきた。このような座標幾何学的手法はきわめて強力なもので、これ以上の一般化は必要ないという考え方もあり得る。これはまた、観測量は最終的に数と関連づけられて初めて、その定量的法則性が確立されるという自然科学の実態にもかなったものとなっている。一方で、少なくとも幾何ベクトルにおいては、特定の座標系とは独立な存在としてのベクトルを認めるのが自然であり、そこでは、人為的かつ任意性のある座標系の設定が、物理的実体と観測量を結びつける仲立ちの役割を果たしている。ということで、数を並べた形のベクトルについても同様の扱い、すなわち座標系ないし成分による表示に依存しない存在としてのベクトルを認めた上で、座標系という仲立ちを経由して、成分表示としての数を取り出すという流れが考えられる。これは、３次元幾何ベクトルを手本に高次元の幾何学的実体を志向する過程で、グラスマンによって初めてなされた。このように高次元のベクトルを成分表示から解放することは、仮に成分表示を専ら扱う際にも有用であるのみならず、その後に発見された量子物理の記述においても欠くべからざる数学的枠組みを提供するものとなっている。

その内容の把握のためには、急がば回れ、集合と写像の言葉遣いから始めるのがよい。これについては、付録等を参考に、基本的な概念と用語を深入りはせずにひと通り自習しておく[*61]。この先で必要となるのは、写像、単射、全射、全単射。写像の合成。恒等写像、逆写像。写像の像と逆像。写像空間 Y^X, 関数空間 $\mathbb{C}^X$, 列空間 $Y^{\mathbb{N}}$ といったところ。

さて、幾何ベクトル空間を手本に、改めて一般のベクトル空間を導入しよう。その際、数の範囲は加減乗除ができればよいので、そのようなもの（体[*62]と呼ばれる）を一つ用意し、$\mathbb{K}$ と書く[*63]。具体的には、$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ を念頭において、当面は（あるいは永久に）不自由しない。体 $\mathbb{K}$ の元をベクトルとの対比で、**スカラー** (scalar) ともいう。

$\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間** (vector space) とは、ベクトルと称されるものの集まり（集合）V に和 $v, w \in V \Longrightarrow v + w \in V$ とスカラー倍 $\alpha \in \mathbb{K}, v \in V \Longrightarrow \alpha v \in V$ が定められていて、以下の条件を満たすもの[*64] をいう。

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $v + w = w + v$.

(ii) **零ベクトル** (zero vector) と呼ばれる特別な $\mathbf{0} \in V$ があって、すべての $v \in V$ に対して、$0v = \mathbf{0}$.

(iii) すべての $v \in V$ に対して、$1v = v$.

(iv) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, $(\alpha + \beta)v = (\alpha v) + (\beta v)$, $\alpha(v + w) = (\alpha v) + (\alpha w)$.

[*61] 本を読めば済むことなので、あえて授業という形で取り上げなくても、必要と感じた人は勝手に勉強しておくもの。いつまでも手取り足取りの教育を望むようなところからは innovation の生まれようもない。

[*62] 体 (field) という考えは、代数方程式の解の公式の研究をきっかけに徐々に認識されたもので、多項式の根から加減乗除をくり返して得られる数全体が典型的な例である。そのような意味での体はすべての有理数を含むので、無限性を有するものであるが、偶数全体を 0 で、奇数全体を 1 で代表させて得られる二元集合は、やはり加減乗除が可能な集団を作り、最も小さい体を提供する。他にも素数に関係した有限体とかがよく知られていて、これらが数学者のおもちゃではなく情報理論の様々なところで活用される。

[*63] 体（からだ）を意味するドイツ語 Körper の頭文字。

[*64] このように、数学では代数構造に着目して「ベクトル」という用語を使っていて、「大きさと向きをもつ量」という素朴な意味でのベクトルの概念とはずれがあることに注意する。例えば、力学における速度や力は「大きさと向きをもつ量」には違いはないが、その物理的効果という観点からは空間点に束縛された量と見るのが妥当で、したがって、異なる空間点に結び付けられたベクトルどうしの和が、仮にそれが可能であっても、何を意味するかは自明ではない。

性質 (i) により、ベクトルの足し算は何個であっても括弧を省略できるし、和の順番を気にする必要はない。零ベクトルは、しばしば 0 で代用され、和に関して零のように振る舞う $v + \mathbf{0} = 1v + 0v = (1+0)v = v$ ことに注意。ベクトル $(-1)v$ は、$-v$ とも書かれ、$w + (-v) = w - v$ のように略記される。$v - v = 1v + (-1)v = (1-1)v = \mathbf{0}$ に注意。

ベクトル空間 V の部分集合 $W \subset V$ で、零ベクトルを含み、和とスカラー倍ではみ出さないものを V の**部分空間** (subspace) と呼ぶ。このとき、W 自身がベクトル空間であることに注意。

Remark 3. ベクトルのスカラー倍は、スカラーをベクトルの左に書くのが慣例であるが、行列代数との整合性を考えると右に配置するのが合理的である。そこで、左からのスカラー倍に対して、右からのスカラー倍を $v\alpha = \alpha v$ と定めると、$\alpha(v\beta) = (\alpha v)\beta$, $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$ のように左右からのスカラー倍がかみ合い便利である。なお、この左右のかみ合いにおいて、スカラーどうしの積についての交換法則が使われていることに注意。

問 11.1. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\alpha \in \mathbb{K}$ は何でも) である。なぜか。

問 11.2. 幾何ベクトルが上記性質をみたすことを確認。また、与えられた平面に対して、その平面を保つ幾何ベクトル（平行移動）全体が部分空間を構成することも確認。

問 11.3. V の部分空間 W, W' に対して、$W \cup W'$ が部分空間となるのは、$W \subset W'$ または $W \supset W'$ の場合に限る。

例 11.1.

(i) 空間内のある点に作用する力全体は、力の合成に関する平行四辺形則と力の定数倍を和とスカラー倍として、ベクトル空間を形成する。このことは、力と幾何ベクトルの関係を暗示するものであるが、それを明示的に述べたものがいわゆるニュートンの運動方程式[*65]に他ならない。

(ii) 行列の作るベクトル空間 $M_{m,n}(\mathbb{K})$。とくに、列ベクトル空間 $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ と行ベクトル空間 ${}^t\mathbb{K}^n = M_{1,n}(\mathbb{K})$。

(iii) 関数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}^X$ とその部分空間 $\mathbb{K}X$。ここで、$\mathbb{K}X$ は、有限集合で支えられた関数 $f : X \to \mathbb{K}$ 全体を表す。とくに、数列の作るベクトル空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ とその部分空間 $\mathbb{K}\mathbb{N}$。

(iv) 形式的冪級数の作るベクトル空間 $\mathbb{K}[[t]]$ と多項式の作る部分空間 $\mathbb{K}[t] \subset \mathbb{K}[[t]]$。

(v) 収束半径が $r \geq 0$ よりも大きい冪級数の作る部分空間 $\mathbb{C}_r[[t]] \subset \mathbb{C}[[t]]$。$\sum_{n\geq 0} c_n t^n \in \mathbb{C}_r[[t]] \iff \limsup |c_n|^{1/n} < 1/r$ である。入れ子関係 $\mathbb{C}[t] \subset \mathbb{C}_\infty[[t]] \subset \mathbb{C}_r[[t]] \subset \mathbb{C}_0[[t]]$ に注意。

ベクトル空間 V の要素であるベクトルの集まり $v_1, \cdots, v_r$ があるとき、その一次結合全体は V の部分空間となる。これを $\{v_1, \cdots, v_r\}$ の**張り出し** [*66](linear span) といって、$\langle v_1, \cdots, v_r \rangle$ のように書き表す。また、$v_1, \cdots, v_r$ が一次独立とは、どのベクトルも残りのベクトルの一次結合で書けないこと。有限とは限らないベクトルの集まり S が一次独立であるとは、S に含まれるすべての有限部分集合が一次独立であること。一次独立でない集団は**一次従属である** (linearly dependent) [*67]とよばれる。すなわち、あるベクトルが、残りのベクトルの一次結合で表される（一次式の形で依存する）とき、集団全体を一次従属であると称する。一

[*65] Newton 自身は、運動の法則を、微分も座標も使わないユークリッド幾何的手法で述べている (1687)。それを座標と微分による形に書き改めたのが Euler (1750) で、今の力学の教科書にあるような変位ベクトルの時間に関する 2 階微分が力に比例する（比例定数＝慣性質量）という定式化は Grassmann (1840) による。実に１５０年におよぶ紆余曲折であった。

[*66] span の訳には「張る」という動詞を当てるのが普通で、その名詞形のつもり。「張り」では間が抜けているので。

[*67] dependence に従属をあてる慣例ではあるが、その実相は（相互）依存とでもいうべきもの。

次独立な集まり $v_1, \cdots, v_r$ に対しては、次の係数比較の性質が成り立つことに注意する。

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r \iff \alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_r = \beta_r.$$

例 11.2.

(i) 行列単位 $E_{j,k} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ は一次独立。ここで、$E_{j,k}$ は、(j,k) 成分だけが 1 で残りが 0 の行列を表す。とくに、基本ベクトル $e_j = E_{j,1} \in \mathbb{K}^n$, ${}^t e_j = E_{1,j} \in {}^t\mathbb{K}^n$ の集まりは、それぞれ一次独立。
(ii) 単項式 $t^n \in \mathbb{K}[t]$ $(n = 0, 1, \dots)$ の集まりは一次独立。
(iii) 指数関数の集まり $\{e^{\lambda t} \in \mathbb{C}_\infty[[t]]; \lambda \in \mathbb{C}\}$ は一次独立 (系 12.6, 問 5.5 参照)。
(iv) 三角関数の集まり $\{\cos(ax), \sin(bx); a \geq 0, b > 0\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ は一次独立。

問 11.4. 零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む集団は一次従属であること及び上の例を確かめよ。(iii) と (iv) は要工夫。

有限個のベクトル $v_1, \dots, v_N$ があって、すべてのベクトルがこれらの一次結合で書けるとき、V を**有限次元** (finite-dimensional) と呼ぶ。有限次元でないベクトル空間は無限次元と称される。

例 11.3.

(i) 関数空間 $\mathbb{K}^X$ が有限次元であるための必要十分条件は、X が有限集合であること。
(ii) 複素数ベクトル $c = (c_1, \dots, c_n) \in {}^t\mathbb{C}^n$ に対して、漸化式 $x_{k+n} = c_1 x_{k+n-1} + \cdots + c_n x_k$ $(k \geq 0)$ をみたす複素数列[*68] $(x_j)_{j \geq 0}$ 全体を $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ と書けば、$\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ は数列空間 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の有限次元部分空間。とくに、$c = (0, \dots, 0, 1)$ のときは、周期 n の周期的数列の作る部分空間である。

問 11.5. $(\sharp)$ 上の例をすべて確かめよ。無限次元であることの証明には、定理 11.6 を使うとよい。

有限次元ベクトル空間におけるベクトルの列 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ が**基底** (basis) であるとは、

(i) $\{e_1, \dots, e_n\}$ が一次独立な集団であり、
(ii) V のすべてのベクトルが $e_1, \dots, e_n$ の一次結合で書けること。

次は、もはや自前で証明できて欲しい。

定理 11.4. 有限次元ベクトル空間 V は基底をもち[*69]、基底を構成するベクトルの個数は一定である。この一定の個数を V の**次元**とよび $\dim V$ とかく。

Proof. 基底の存在は、有限個の生成元を一列に並べ、一次独立なものを取り出していけばわかる。

2つの基底 $e = (e_1, \dots, e_m)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ に対して $m = n$ となることは、$m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B を使って、$f = eA$, $e = fB$ と表すと、$eAB = fB = e$, $fBA = eA = f$ すなわち $AB = I_m$, $BA = I_n$ となるので、補題 7.7 からわかる。あるいは跡の性質を使って、$m = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = n$ のように処理してもよい。

[別解]: 行列代数の結果を使わない直接的な証明も可能で、それは、次のような置き換え原理に基づく。

一次独立な集まり $e = (e_1, \dots, e_m)$ と基底 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ があったとき、f の並べかえ $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$ を適切に行うことで, $(e_1, \cdots, e_m, f'_{m+1}, \dots, f'_n)$ が基底であるようにできる。

[*68] 数列を表す記号として { } を使うことが多いのであるが、これは集合の記号と紛らわしいので、ここでは丸括弧で表すことにする。
[*69] $V = \{0\}$ のときは、零個のベクトルからなる基底をもつ、すなわち $\dim V = 0$、と解釈する。

これを m についての帰納法で示す。$m=1$ であれば、e_1 を f の一次結合で表して、0 でない係数をもつ f_j をひとつ選びそれを f'_1 とするように並べ替える。このとき、$\{e_1, f'_2, \ldots, f'_n\}$ も基底である。つぎに、m まで正しいとし、一次独立な集まり $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}$ の最初の m 個に帰納法の仮定を適用した f の並べ替えを $(f'_1, \ldots, f'_n)$ とする。e_{m+1} を基底 $(e_1, \ldots, e_m, f'_{m+1}, \ldots, f'_n)$ の一次結合で表したとき、$f'_{m+1}, \ldots, f'_n$ の係数に 0 でないものが現れるので（そうでないと $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$ が一次独立であることに反する)、その一つが先頭にくるように $\{f'_{m+1}, \ldots, f'_n\}$ を並べかえたものを $f''_{m+1}, \ldots, f''_n$ とすれば、$(f'_1, \ldots, f'_m, f''_{m+1}, \ldots, f''_n)$ は $(f_1, \ldots, f_n)$ の並べ替えになっており、$(e_1, \ldots, e_{m+1}, f''_{m+2}, \ldots, f''_n)$ が基底になることから帰納法が進む。 □

問 11.6. 別解において、$(e_1, \ldots, e_{m+1}, f''_{m+2}, \ldots, f''_n)$ が基底であるのは何故か。

Remark 4. 無限次元ベクトル空間の場合にも、選択公理なるものを仮定すると、基底の存在と「個数」の一定性を示すことができる。集合の濃度を学べば、その良い練習問題である。

例 11.5.

(i) 行列単位の集まり $\{E_{j,k}\}$ (を一列に並べたもの) は $M_{m,n}(\mathbb{K})$ の基底。とくに、$\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$ である。

(ii) 基本ベクトル (e_j), $({}^te_j)$ は $\mathbb{K}^n$, ${}^t\mathbb{K}^n$ の基底。とくに、$\dim \mathbb{K}^n = \dim {}^t\mathbb{K}^n = n$ である。

(iii) 初期条件 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = (\delta_{j,k})_{0 \le k < n}$ で定められる c 漸化式の解を δ_j $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ で表せば、$\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}$ は $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ の基底。とくに $\dim \mathbb{C}_c^{\mathbb{N}} = n$ である。

問 11.7. (♯) 上の例をすべて確かめよ。

定理 11.6. n 次元ベクトル空間 V において、一次独立なベクトルの集まりを $v_1, \cdots, v_m$ とすると、$m \le n$ であり、一次独立な $v_1, \cdots, v_n$ が V の基底となるための必要十分条件は $m = n$ である。とくに、有限次元ベクトル空間 V の部分空間 W は有限次元であり[*70]、不等式 $\dim W \le \dim V$ が成り立つ。

Proof. 補題 9.3 とそれに続く命題の証明を繰り返すだけ。 □

問 11.8. 複素ベクトル空間 V は、スカラー倍の範囲を実数に限定することで実ベクトル空間と思える。V が有限次元であるとき、実ベクトル空間としての次元は $2\dim V$ である。これを $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim V$ のように書く。とくに $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である。

ここで、一次独立性の概念を部分空間の集まりに拡張しておこう。まず部分空間の集まり $\{V_i\}_{1 \le i \le r}$ $(V_i \ne \{0\})$ に対して、$v_1 + \cdots + v_r$ $(v_j \in V_j)$ の形のベクトル全体を $\sum_{i=1}^r V_i = V_1 + \cdots + V_r$ という記号で表す。これも部分空間である。次に $\{V_i\}_{1 \le i \le r}$ が**一次独立**であるとは、

$$v_1 + \cdots + v_r = 0 \ (v_i \in V_i) \Longrightarrow v_1 = \cdots = v_r = 0$$

となること。この性質は $V_i \cap (\sum_{j \ne i} V_j) = \{0\}$ $(i = 1, \ldots, r)$ と言い換えられる[*71]。ベクトルの集まり $\{v_i\}$ $(v_i \ne 0)$ が一次独立であることは、1 次元部分空間の集まり $\{\mathbb{K}v_i\}$ が一次独立であることに他ならない。

ベクトル空間 V が部分空間 V_i $(1 \le i \le r)$ に**直和分解**されるとは、$\{V_i\}$ が一次独立で、$V = V_1 + \cdots + V_r$

[*70] このことは決して当たり前ではないのだが、当然のごとく扱う本の多いこと。
[*71] 集合算の場合と異なり分配法則が成り立たないので、$V_i \cap V_j = \{0\}$ $(i \ne j)$ といった条件に置きかえることはできない。

であること。この状況を $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ のように表記する[*72]。直和分解が与えられると、各直和成分 V_i の基底を用意して、それぞれを $i = 1, \cdots, r$ の順番に並べたものは全体の基底となる。これを**直和分解に合わせた基底**と呼ぶ。

問 11.9. 上の言い換えを示せ。また $V = V_1 + V_2 + V_3$ かつ $V_j \cap V_k = \{0\}$ $(j \neq k)$ であるが、直和分解にならない例を作れ。

線型写像

ベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像 $\phi : V \to W$ が**線型** (linear) であるとは、

$$\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v'), \quad \phi(\alpha v) = \alpha \phi(v)$$

が成り立つこと。一次結合を一次結合に移す写像と言ってもよい。2つの線型写像の合成は再び線型写像となる。線型写像においては、関数記号に由来する括弧を省略して $\phi(v) = \phi v$ のような表記がしばしば使われる。

線型写像 ϕ の**核**と**像**を $\ker \phi = \{v \in V; \phi(v) = 0\}$, $\phi(V) = \{\phi(v); v \in V\}$ で定める。それぞれ、V, W の部分空間である。

命題 11.7. 線型写像 ϕ について、$\ker \phi = \{0\}$ であることと ϕ が単射であることは同値である。

Proof. 実際、$\phi(v) = 0$ となる $0 \neq v \in V$ があれば、$\phi(v) = \phi(0)$ となって ϕ は単射ではない。一方、$\phi(v) = \phi(v')$ とすると、$\phi(v - v') = 0$ より $v - v' \in \ker \phi$ がわかるので、$\ker \phi = \{0\}$ ならば $v = v'$ である。 □

ベクトル空間 V からベクトル空間 W への線型写像全体を $L(V, W)$ で表せば、$L(V, W)$ は、次の和とスカラー倍でベクトル空間となる。

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (\alpha\phi)(v) = \alpha\phi(v).$$

例 11.8. 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を左から掛けることで、線型写像 $[A] : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が得られる。逆に $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線型写像はこの形である。さらに、この対応で、行列の和と線型写像の和、行列のスカラー倍と線型写像のスカラー倍、行列の積と写像の合成がうつりあうこと、すなわち

$$[A + B] = [A] + [B], \quad [\lambda A] = \lambda[A], \quad [AB] = [A] \circ [B]$$

がわかる。ということで、$M_{m,n}(\mathbb{K})$ を $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ と同一視することが多い。

ベクトル空間 V に対して、V のベクトルを横に m 個並べたもの全体 V^m は、和とスカラー倍を

$$(v_1, \cdots, v_m) + (w_1, \cdots, w_m) = (v_1 + w_1, \cdots, v_m + w_m), \quad \lambda(v_1, \cdots, v_m) = (\lambda v_1, \cdots, \lambda v_m)$$

とすることでベクトル空間となる。これを V の多重ベクトル空間 (multiple vector space) と呼ぶ[*73]。

[*72] これは本来の直和記号の乱用ではあるが、よく使われる。

[*73] $\mathbb{K}^m$ は、本来、行ベクトルを表すべきであった。世間の無理に道理を引っ込める理由もなく、あえて記法の矛盾を放置する。放置したくない場合は、$V^{\oplus m}$ とでも書く。

定義 11.9. 多重ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_m) \in V^m$ と線型写像 $\phi : V \to W$ あるいは行列 $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ との積 $\phi v \in W^m$, $vA \in V^n$ をそれぞれ

$$\phi v = (\phi(v_1), \ldots, \phi(v_m)), \quad vA = (\sum_i v_i a_{i1}, \ldots, \sum_i v_i a_{in})$$

で定める。ただし、vA の右辺では、ベクトル v のスカラー倍を $\lambda v = v\lambda$ のように書いた。

命題 11.10. 二つの積 ϕv, vA は分配法則と次の三種類の結合法則をみたす。

(i) 線型写像 $\phi : V \to W$, $\varphi : W \to X$ に対して、$\varphi(\phi v) = (\varphi\phi)v$.
(ii) 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{K})$ に対して、$(vA)B = v(AB)$.
(iii) 線型写像 $\phi : V \to W$ と行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対して、$(\phi v)A = \phi(vA)$.

これにより、いずれの場合も括弧を省いて $\varphi\phi v$, vAB, ϕvA のように書くことが許される。

問 11.10. これを確かめる。また、一般結合法則が成り立つことを $\varphi\phi vAB$ について確かめよ。

問 11.11. 一般の写像 $\phi : V \to W$ に対しても、$\phi(v_1, \cdots, v_m) = (\phi(v_1), \cdots, \phi(v_m))$ と定める。このとき、結合法則 $(\phi v)A = \phi(vA)$ が成り立つことと ϕ が線型であることは同値である。

例 11.11. 多重ベクトル $v = (v_1, \cdots, v_m) \in V^m$ を列ベクトル $x \in \mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$ に左から掛けることで、線型写像 $[v] : \mathbb{K}^m \to V$ をえる。すなわち、

$$[v] : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto vx = x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m \in V.$$

逆に $\mathbb{K}^m$ から V への線型写像はこの形である。

この対応で、$\{v_1, \cdots, v_m\}$ が一次独立であることと $[v]$ が単射であることは同値であり、$V = \langle v_1, \cdots, v_m \rangle$ であることと $[v]$ が全射であることも同値。とくに、$v = (v_1, \cdots, v_m)$ が基底であることと $[v]$ が全単射であることが同値。

問 11.12. ($\sharp$) これをチェック。$v = (v_1, \cdots, v_n)$ が V の基底であれば、$\phi v = 0 \Longrightarrow \phi = 0$、$vA = 0 \Longrightarrow A = 0$。

問 11.13. 例 11.8 と例 11.11 の記号は整合的である。すなわち、v と行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ の積に関して、$[v] \circ [A] = [vA]$ が $\mathbb{K}^n$ から V への写像として成り立つ。

線型写像 $\phi : V \to W$ で全単射であるものを線型同型写像 (linear isomorphism) 略して**同型写像** (isomorphism) という。同型写像については、その逆写像も線型である。同型写像が存在する 2 つのベクトル空間は同型である[*74](isomorphic) といい、$V \cong W$ のように表記する。

問 11.14. ($\sharp$) 同型写像の逆写像も線型であることを確かめよ。

例 11.12. 転置写像により、$M_{m,n}(\mathbb{K})$ と $M_{n,m}(\mathbb{K})$ は同型である。とくに、$\mathbb{K}^n$ と ${}^t\mathbb{K}^n$ は同型である。

[*74] 同型写像を通じて、ベクトル空間の構造が同一であることに注意。

例 11.13. 複素数列 $c = (c_1, \cdots, c_n)$ に対して、c 漸化式の解空間 $\mathbb{C}_c^{\mathbb{N}}$ から ${}^t\mathbb{C}^m$ への線型写像 ϕ を $\phi((x_k)_{k\geq 0}) = (x_0, x_1, \cdots, x_{m-1})$ で定めると、ϕ が単射 $\iff m \geq n$, ϕ が全射 $\iff m \leq n$ である。とくに、ϕ が全単射 $\iff m = n$ となる。

例 11.14 (テイラー展開)**.** $T : \mathbb{C}[[t]] \ni \sum_k a_k t^k \mapsto (k!a_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は同型写像 (テイラー写像とよぼう) で、その逆写像 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ni (a_k) \mapsto \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} t^k \in \mathbb{C}[[t]]$ はテイラー級数を作ることに他ならない。

また、T による $\mathbb{C}_0[[t]]$ の像は $T\mathbb{C}_0[[t]] = \{(a_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; \limsup |a_k/k!|^{1/k} < \infty\}$ で特徴づけられる。

定理 11.15. 2つの有限次元ベクトル空間 V, W が同型であるための必要十分条件は、その次元が一致すること。とくに、n 次元ベクトル空間はすべて $\mathbb{K}^n$ と同型である。また、同型写像 $\phi : \mathbb{K}^n \to V$ と V の基底 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ との間には、関係 $\phi = [e]$ すなわち $\phi(x) = ex$ $(x \in \mathbb{K}^n)$ により一対一の対応がある。

Proof. ベクトル空間 V の基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を用意すると、$[e] : \mathbb{K}^n \to V$ は同型写像である。逆に、同型写像 $\phi : \mathbb{K}^n \to V$ に対して、$e = (\phi(\delta_1), \cdots, \phi(\delta_n))$ は、V の基底であり、$\phi = [e]$ となる。また、同型写像 $\varphi : V \to W$ があれば、$(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$ は、W の基底となるので、$\dim V = n = \dim W$ である。 □

例 11.16. 例 11.11 で与えた対応により、$L(\mathbb{K}^m, V)$ と V^m は自然な形で同型であるので、以後 $V^m = L(\mathbb{K}^m, V)$ の如く扱う。すなわち、$v = [v]$ とみなす。とくに $m = 1$ の場合、$V = L(\mathbb{K}, V)$ は、ベクトル $v \in V$ と線型写像 $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda v \in V$ の同一視を意味する。ベクトルもまた線型写像。

さて、V の基底 $e = (e_1, \ldots, e_n)$ が与えられると、各ベクトル $v \in V$ は $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ のように表され、この表し方は一つしかない。この係数の集まり (x_j) を、基底 e に関する v の**成分**という。基底の定める同型写像 $e = [e] : \mathbb{K}^n \to V$ を使えば、

$$v = e \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e^{-1} v$$

ということである。

別の基底 $f = (f_1, \ldots, f_n)$ を用意し、最初の基底 e に関する f_j の成分を $(p_{ij})_{1\leq i\leq n}$ とすれば、$f = (\sum_i p_{i1} e_i, \ldots, \sum_i p_{in} e_i)$ である。この関係式は、行列 $P = (p_{ij})$ を使って、$f = eP$ と表される。同様に、基底 f に関する e_j の成分を (q_{ij}) とすると、行列 $Q = (q_{ij})$ により $e = fQ$ と表される。P, Q を**基底取替行列** (change-of-basis matrix) という。$n \times n$ 行列と付随する線型写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ を同一視すれば、$P = e^{-1} f$, $Q = f^{-1} e$ となるので、P と Q は互いに逆行列の関係にあることがわかる。さらに、e, f に関する v の成分を縦にならべた列ベクトルをそれぞれ $x, y \in \mathbb{K}^n$ とすれば、$ex = v = fy$ より、$x = e^{-1} f y = Py$ あるいは $y = f^{-1} e x = Qx = P^{-1} x$ という 2つの成分表示の間の関係 (一種の座標変換) を得る。

線型写像 $\phi : V \to W$ と V, W の基底 $e = (e_j)_{1\leq j\leq n}$, $f = (f_k)_{1\leq k\leq m}$ に対して、行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を、

$$\phi(e_k) = \sum a_{j,k} f_j \iff (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)) = (f_1, \cdots, f_m) A \iff \phi e = fA$$

で定めると、次の可換図式が成り立つ。すなわち、$[A] = f^{-1} \phi e$ である。これを 線型写像 ϕ の基底 e, f に

関する**行列表示**[*75](matrix representation) と呼ばれる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] & W \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "e"] \arrow[r, "{[A]}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

問 11.15. 上の可換図式の意味を推測し、$L(V, W) \cong M_{m,n}(\mathbb{K})$ を示せ。

行列の場合の結果 (命題 9.5 =ほぼ掃き出し定理) を言いかえるか、そこでの直接証明を繰り返すことで、次がわかる。

定理 11.17. 有限次元ベクトル空間の間の線型写像 $\phi : V \to W$ について、$\dim \phi(V) = \dim V - \dim \ker \phi$. とくに、$\phi$ が全射であるための必要十分条件は $\dim W = \dim V - \dim \ker \phi$ である。

系 11.18. $\dim V = \dim W < \infty$ のとき、次は同値。

(i) ϕ は単射 ($\ker \phi = \{0\}$)。
(ii) ϕ は全射 ($W = \phi(V)$)。
(iii) ϕ は全単射。

問 11.16. ($\sharp$) これを確かめよ。

以上の基底を通じた線型写像と行列の間の対応はきわめて形式的なものなので、各自、必要に応じて確かめて使えればよい。必要でないかも知れないし、証明とかは敢えて授業で取り上げるほどのものでもない。

12 線型作用素

ここでは $V = W$ とする。この場合の線型写像は、とくに、**線型変換** (linear transformation) あるいは**線型作用素** (linear operator[*76]) と呼ばれる[*77]。線型変換のほかに**一次変換**という言い方も一般的である[*78]。以下では、とくにこだわりなく何れをも使うことにする。また、ベクトル空間 V における線型作用素全体を $L(V)$ で表し、それに応じて行列の方も $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ と書くことにしよう。これのありがたいところは、写像の合成=積、が自由に行えること。以下において、V における恒等写像 (identity map) を I_V あるいは略して I と書くことにする。

線型作用素の行列表示には、基底は V のそれ $e = (e_1, \cdots, e_n)$ を一つ用意しておけばよいことにまず注意する。対応 $L(V) \ni \phi \mapsto [e]^{-1}\phi[e] \in M_n(\mathbb{K})$ は、ベクトル空間としての同型を与えるのみならず、積の構造も保つ：$([e]^{-1}\varphi[e])([e]^{-1}\psi[e]) = [e]^{-1}(\varphi\psi)[e]$ $(\varphi, \psi \in L(V))$.

[*75] representation の訳ということで行列表現とも呼ばれるが、ここでの意味合いは表示といったところ。

[*76] operator の訳語としては、作用素と演算子が同程度に使われる。前者は数学関係者に、後者はそれ以外で好まれるようであるが、どちらも硬すぎる。もっと日本語らしく「働き」と呼べぬものか。

[*77] 両者の使い分けであるが、変換の方は移されるものが主役で、作用素の方は作用素自体に注目している印象がある。例：座標変換と微分作用素、積分変換と積分作用素。

[*78] 統一がとれていないのは、連立一次方程式という言い方に引きづられたせいか。すべて線型でよいようにも思うが、習慣の力は強い。なお、線型という文字の代わりに線形を使うのが近年の風潮であるが、漢字本来の意味からすれば、線型が適切であろう。ちなみに中国語では線性という。型でもまだ具象に引きづられていると見たのであろうか。それとも、・・・。