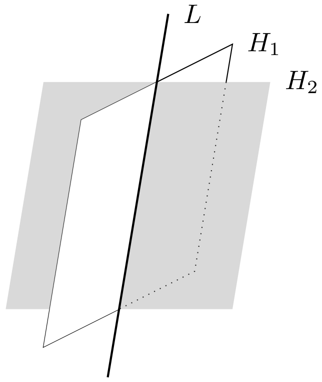
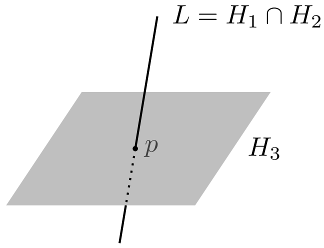
以上の幾何学的解釈を座標空間にまで広げてみよう。最初に、2 平面 $\alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z = \delta_j$ $(j = 1, 2)$ の位置関係を調べる。平行でない場合、すなわち $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ と $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ が比例しないときは、平面の共通部分として、空間内の直線 L が得られるので、解は直線の点に相当するだけ沢山（不定）存在する。平行であるときは共通部分がないので、この段階で連立方程式は解がないとわかる。





次に互いに異なる 3 平面の位置関係について。3 つの法線ベクトル $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ が独立な方向を表している場合：3 平面の交点が一点 p に定まるので、連立一次方程式はちょうど一つの解をもつことがわかる。それ以外の位置関係は、2 平面が平行で残りの平面が平行にならない場合。3 平面が平行である場合。この 2 つは、ともに連立一次方程式に解がない。

最後に 3 平面がひとつの直線を共有する場合：これは、連立一次方程式の解が沢山ある場合（解不定）である。

この解のあるなしと、3 つの法線ベクトルの広がりが 1 次元的、2 次元的、3 次元的のいずれであるかを組み合わせることで、すべての場合を判別することができる。

問 2.5. ($\sharp$) ひとつの直線を共有する 3 平面を表す連立一次方程式を具体的に一つ作れ。

以上、三元連立一次方程式の解の存在の様子が幾何学的に解釈できることを見てきた。一方、連立一次方程式自体は未知数がいくつあっても考えることができて、その解の様子を代数の技で調べてみると、3 次元ユークリッド幾何の直感が、実に、高次元の場合にまで広く有効であるという事実に行き当たる。これが、いわゆる線型代数（行列代数）の肝でもあり、視覚的直感は、そのための確かな手がかりをもたらしてくれる。

3 行列とその計算

添え字 (index) に数を結びつけた一種の**配列**[*15](array) について考えよう。以下では具体的に、$\{1, 2, \cdots, n\}$ を添え字集合に取るが、実はなんでもよい。自然数である必要もない。

さて、数の 2 次元的配列[*16]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

*15 形式的には有限集合上の関数に他ならない。

*16 このように配列そのものを一つの文字で表すことが、些細なことのように見えて行列の数学を展開する上で極めて重要である。

を $m \times n$ 型の**行列** (matrix) と言う。とくに、$m = 1$ のとき、**行ベクトル** (row vector)、$n = 1$ のとき、**列ベクトル** (column vector) と呼ぶ。$n \times n$ 型の行列を n 次の**正方行列** (square matrix) とも呼ぶ。

ここでは、行列として配列された範囲をはっきりさせるために丸括弧を使ったが、角括弧を使う人も多い。区切りさえわかれば何を使ってもいいし、紛らわしくなければ括弧で括る必要もない[*17]。ただし、縦線で区切ることは普通しない。のちに出てくる行列式の記号と区別つかなくなって困るので。

- **和** (addition) と**スカラー倍** (scalar multiplication)。
- **積** (product) は $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})_{1 \le j \le n, 1 \le k \le l}$ に対して

$$C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

  で定義される $m \times l$ 行列である。
- **零行列** (zero matrix) とは、すべての成分が 0 である行列。型を意識して $\mathbf{0}_{m,n}$ のように書くこともあるが、通常は $\mathbf{0}$ と略記するか 0 で代用する。行列の和と積に関して零の如く振る舞う。

横割と縦割を使うと、行列の積が

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

の形の配列で構成されることに注意。

問 3.1. 行列の計算を実際に色々と行ってみよう。

命題 3.1. 行列の和と積に関して、

(i) 行列の和に関して、**結合法則** (associative law) と**交換法則** (commutative law) が成り立つ。
(ii) 行列の積に関して、**結合法則**は成り立つが、交換法則は（一般には）成り立たない。
(iii) 行列の和と積に関して、**分配法則** (distributive law) が成り立つ。

- 積の結合法則の証明で、和の記号の使い方[*18]の一般形を知る必要がある。それは、

$$\sum_{\text{和をとる範囲}} \Big(\text{和をとる対象} \Big)$$

  というもので、とくに和をとる範囲が $1, 2, \cdots, n$ で指定される場合には、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ のようにも書く、と正しく理解すべきである。

[*17] 括弧は必要なくとも添え字の存在は必要である。したがって、1 行 1 列の行列とスカラーとは別のもの。もっと詳しく（混乱させるように）言うと、同じ 1 行 1 列でも背後の添え字集合が違っていれば別の行列を表すと考える。もっとも添え字集合が何であっても、1 行 1 列の場合は、すべてスカラーと対応がつくので、同一視することがしばしばであることもまた事実。例：行ベクトルと列ベクトルの積を数と同一視。

[*18] 今は大昔、和の記号の本来の使い方に初めて接し、しばし茫然とした記憶がよみがえる。

- **単位行列**[19] (unit matrix) $I_n = (\delta_{j,k})_{1\le j,k\le n}$ と**クロネッカーのデルタ記号** (Kronecker's delta)

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例 3.2.

$$\sum_{1\le j,k\le n} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}.$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{i,j}\, a_{j,k} = a_{i,k} \iff I_m A = A.$$

問 3.2. 次の２つの行列（ベクトル）の積を計算し、その結果を比較せよ。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

問 3.3. ($\sharp$) ２次の正方行列 A, B で、$AB \ne BA$ かつ $AB = 0$ となるものがあるかどうか調べよ。

問 3.4. 正方行列 $(a_{j,k})_{1\le j,k\le n}$ の成分の和に関して、

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}$$

である。何故か。

問 3.5. $m \times n$ 行列 A に対して、$AI_n = A$ である。

結合法則が成り立つときは、括弧を省いて、$(A+B)+C = A+(B+C)$ を $A+B+C$ のように、あるいは $(AB)C = A(BC)$ を ABC のように書くことは、数の場合の和・積と同様である。これは３個に限らずもっと沢山の行列でも正しい。例えば、４個の行列の積 $ABCD$ の場合、その定義として

$$((AB)C)D, \quad (AB)(CD), \quad A(B(CD)), \quad A((BC)D), \quad (A(BC))D$$

の５通りの方法が考えられるが、隣り合ったもの同士は $(XY)Z = X(YZ)$ の形の等式により一致する。５個以上の場合も基本的に括弧のつけかえをくり返すだけなので、「当たり前」のように扱うことも多いのであるが、一度その仕組みを確かめておくのも悪くはない。ということで、

定理 3.3 (一般結合法則[20])**.** n 個の行列の積 $A_1A_2\cdots A_n$ は、括弧のつけかた[21]によらず全て一致する。

Proof. n に関する帰納法で示す。n より少ない個数の積については正しいとし、括弧を省いた書きかたも許すことにすると、n 個の行列 $A_1, \cdots, A_n$ の積として可能なものは $B_k = (A_1\cdots A_k)(A_{k+1}\cdots A_n)$ $(1 \le k \le n-1)$ という形になるので、$B_1 = B_2 = \cdots = B_{n-1}$ を示せばよい。これは、帰納法の仮定から成

[19] 数の場合の 1 に相当するので、こうよばれるが、単位ベクトルの場合と整合しないので注意。ちなみに、単位行列を表す記号として、I (英語 identity から) または E (独語 Einheit = 英語 unit から) がよく使われる。

[20] Generalized associative law. 実にこれが学部の入試で問われたことがあった。人が悪いというか、人を食ったというか。

[21] 括弧のつけかたは $(2n-2)!/(n!(n-1)!)$ 通りある。これをカタラン数 (Catalan number) と称える。

り立つ $A_k\cdots A_n = A_k(A_{k+1}\cdots A_n)$ と $A_1\cdots A_k = (A_1\cdots A_{k-1})A_k$ $(2\le k\le n-1)$ に注意して、結合法則を

$$B_{k-1} = (A_1\cdots A_{k-1})(A_k(A_{k+1}\cdots A_n)) = ((A_1\cdots A_{k-1})A_k)(A_{k+1}\cdots A_n) = B_k$$

のように使えばわかる。これだけのことではあるが、「当たり前」は明らかに言い過ぎ、と思いませんか。 □

n 次正方行列 A と自然数 m $(m=1,2,\cdots)$ に対して、A を m 回かけて得られる行列[22]を $A^m = A\cdots A$ のように書いて A の m 乗 (the m-th power[23] of A) と呼ぶ。指数法則 $(A^l)^m = A^{lm}$, $A^lA^m = A^{l+m}$ が成り立つことに注意する[24]。とくに、$A^lA^m = A^mA^l$ である。

例 3.4. 行列の冪を計算（展開）してみよう。分配法則を使えば、

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B)+B(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$$

であり、これが $A^2+2AB+B^2$ に一致する必要十分条件は $AB=BA$ である。

問 3.6. (♯) $(A+B)^3$ の展開式を書き下し、$AB=BA$ のときには二項展開に帰着することを確かめよ。

例 3.5. 連立一次漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1x_n+b_1y_n+c_1 \\ y_{n+1} = a_2x_n+b_2y_n+c_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

について考える。列ベクトルの列[25]と行列をそれぞれ

$$\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

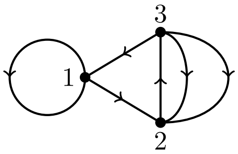
で定めると、上の漸化式は $\overrightarrow{v_{n+1}} = A\overrightarrow{v_n}$ と書けるので、等比数列の一般項の計算と同様に、

$$\overrightarrow{v_n} = A\overrightarrow{v_{n-1}} = A^2\overrightarrow{v_{n-2}} = \cdots = A^n\overrightarrow{v_0}$$

となる。すなわち、連立漸化式を解くことが行列のべき乗 A^n を求めることに帰着する。

例 3.6. N 個の点を向きのついた線で相互に結んで得られるネットワーク（有向グラフという）を用意する。点は数字 $\{1,\cdots,N\}$ をラベルとして区別し、i を始点とし j を終点とする線の個数 a_{ij} を成分にもつ N 次の正方行列（有向グラフの隣接行列 (adjacency matrix) と呼ばれる）を A とする。ただし、a_{ii} は、点 i におけるループの数を表すものとする。

このとき、点 i から出発し、ネットワークの線の向きに沿った移動を n 回くり返し、点 j に至る経路の数が、行列 A^n の (i,j) 成分に他ならない。（場合の数の計算における積と和の公式をくり返す。）



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[22] ここでも一般結合法則が必要。明らかなことではないにも係わらず、言及する本が皆無に等しいという怪。慣れのこわさかな。
[23] $m=2,3$ については、second power, third power の代わりに square (平方), cube (立方) が常用される。
[24] 一般結合法則を認めれば、自然数の積和の意味そのもの。
[25] 列ベクトルの列は column の訳で、数列の列は sequence の訳。異なる英語に同じ訳をつけてしまったというお粗末。

行列の分割計算

今、大きな行列 A, B を縦横に分割して、それぞれ小行列 $A_{i,j}$, $B_{j,k}$ を配列した形であるとしよう。ただし、小行列のサイズは、積 $A_{i,j}B_{j,k}$ がすべての i, j, k について計算できる形になっているものとする。このとき、行列 $C = AB$ は、小行列 $C_{i,k} = \sum_j A_{i,j}B_{j,k}$ を 2 次元的に並べたものになっている。これを行列の分割計算 (block matrix computation) と称する。

例 3.7.

(i) 行列 A を行ベクトル $\overleftarrow{a_1}, \cdots, \overleftarrow{a_m}$ を縦に並べ、行列 B を列ベクトル $\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_l}$ を横に並べたものと見ると、積 AB は次のような分割計算の形になっている。

$$A\begin{pmatrix}\overrightarrow{b_1} & \dots & \overrightarrow{b_l}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\overrightarrow{b_1} & \dots & A\overrightarrow{b_l}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\overleftarrow{a_1} \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m}\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}\overleftarrow{a_1}B \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m}B\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\overleftarrow{a_1} \\ \vdots \\ \overleftarrow{a_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{b_1} & \dots & \overrightarrow{b_l}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overleftarrow{a_1}\overrightarrow{b_1} & \dots & \overleftarrow{a_1}\overrightarrow{b_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overleftarrow{a_m}\overrightarrow{b_1} & \dots & \overleftarrow{a_m}\overrightarrow{b_l}\end{pmatrix}.$$

(ii) 行列 A を列ベクトル $\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ を横に並べ、行列 B を行ベクトル $\overleftarrow{b_1}, \cdots, \overleftarrow{b_n}$ を縦に並べたものと見ると、積 AB は次のような分割計算の形でもある。

$$(\overrightarrow{a_1} \quad \dots \quad \overrightarrow{a_n})\begin{pmatrix}\overleftarrow{b_1} \\ \vdots \\ \overleftarrow{b_n}\end{pmatrix} = \overrightarrow{a_1}\overleftarrow{b_1} + \cdots + \overrightarrow{a_n}\overleftarrow{b_n}.$$

とくに、B が n 次列ベクトルであれば、

$$A\begin{pmatrix}b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = (\overrightarrow{a_1} \quad \dots \quad \overrightarrow{a_n})\begin{pmatrix}b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = \overrightarrow{a_1}b_1 + \cdots + \overrightarrow{a_n}b_n = b_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + b_n\overrightarrow{a_n}.$$

(iii) サイズ n の正方行列 A, B, 列ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とスカラー λ, μ に対して、

$$\begin{pmatrix}A & \overrightarrow{a} \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & \overrightarrow{b} \\ 0 & \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}AB & A\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{a} \\ 0 & \lambda\mu\end{pmatrix}.$$

分割計算が成り立つ理由を一般的に説明するのは煩わしいので、証明にはあえて触れないことが多い*26。何が鬱陶しいかというと、証明そのものではなく、成分と分割の関係の記述の仕方。自然数を 1 から順番に並べて配列の場所を指定するという素朴な方法にこだわると思いの外煩雑である。具体的に書いたからといってその仕組みが見えるわけでもなく。

適切な見方は、添字を自然数に限定せずに一般の有限集合 X とし、その有限分割 $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_l$ を考える。同様に、$Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_m$ あるいは $Z = Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_n$ とし、分割小行列を $A_{i,j} = (a_{xy})_{x \in X_i, y \in Y_j}$ のように認識すれば、$C = AB$ においては $C_{i,k} = (c_{xz})_{x \in X_i, z \in Z_k}$ であり、$x \in X_i$, $y \in Z_k$ についての

$$c_{xz} = \sum_{y \in Y} a_{xy}b_{yz} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{y \in Y_j} a_{xy}b_{yz} = \sum_j \text{「}A_{i,j}B_{j,k} \text{ の } (x,z) \text{ 成分」} = \text{「}\sum_j A_{i,j}B_{j,k} \text{ の } (x,z) \text{ 成分」}$$

*26 煩わしい説明は [1] とか [2] にあるが、見るよりは自分で考えた方が早いとしたもの。人を頼る前にまずは己を、である。

を小行列の形にまとめると、$C_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}B_{j,k}$ を得る。これだけのことではあるが、行列の本質は配列の場所でも場所を表す数字でもないということ。それが分かったかどうかの試金石というと大げさか。

4　２次・３次の行列式

２元連立１次方程式

$$\begin{cases} ax+by=s \\ cx+dy=t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

を x, y について解けば

$$x = \frac{sd-tb}{ad-bc}, \quad y = \frac{at-cs}{ad-bc}.$$

問 4.1. この表示式を導け。

この分母に共通して現れる式 $ad-bc$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式** (determinant[*27]) といい、

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などと書く[*28]。この記号を使えば、上で与えた解の公式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

のようになる。

行列 A を縦割にして $A = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ と書こう。

(i) **線型性** (linearity)：各ベクトルに対して、次のような分配法則が成り立つ。

$$\det(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \alpha\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \beta\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}).$$

(ii) **交代性** (alternating property)：

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}).$$

(iii) **規格化条件** (normalization condition)：

$$\det(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

一般化

$$a_1x + b_1y + c_1z = t_1 \tag{1}$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = t_2 \tag{2}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = t_3 \tag{3}$$

[*27] 意味は「決定式」。言い方は似ているが、行列とは別物であることに注意せよ。ついでながら、行列式を縦棒で表すのが慣例ではあるが、絶対値記号との相性はよくない。１行１列の行列が数そのものとは区別されるべきことを知る上では良いが。

[*28] 「２次行列式は、たすき掛け」と唱えるものだが、たすき掛けを知らぬ世代には何と説く。