6 行列式の特徴づけ

行列式を n 次列ベクトル $\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ の関数 $\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ と思ったとき、(i) 列に関する線型性、(ii) 列に関する交代性、(iii) 規格化条件 $\det(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = 1$ を満たす。ここで、

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

は単位行列を縦割にしたとき現れる列ベクトルの集団で**基本ベクトル**[*32]と呼ばれる。この節の目標は、この性質が行列式を特徴づけていること。

目標： n 個のベクトル $\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ の関数 $f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ で、線型性と交代性を満たすものがあれば、それは行列式の定数倍になる。さらに規格化条件もみたせば、行列式に一致する。

数字 $1, 2, \cdots, n$ を並べ換えたものを n 次の**並換**[*33](permutation) とよび記号 σ, τ 等で表す。また、並換 σ の i 番目の数字を $\sigma(i)$ で表す：$\sigma = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$.

例 6.1. $\sigma = (3, 1, 2), \quad \tau = (3, 5, 1, 4, 2)$ のとき、

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2, \quad \tau(1) = 3, \tau(2) = 5, \tau(3) = 1, \tau(4) = 4, \tau(5) = 2.$$

補題 6.2. 与えられた n 次の並換 σ に対して

$$f(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}) = \det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \overrightarrow{e_{\sigma(n)}}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}).$$

Proof. 等式

$$f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = \det(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$$

から出発して左辺の f および右辺の det のなかの 2 つの列ベクトルを入れ替えるたびに両辺の符号が同時に反転し、上の式の等号が成り立ち続ける。勝手な並換はこのような 2 つの入れ替えを何回か繰り返して得られるので、補題の等式が一般の並換でも成り立つ。 □

定理 6.3.

$$f(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}).$$

Proof. 基本ベクトルを使うことにより、$\overrightarrow{a_j}$ は

$$\overrightarrow{a_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{e_i}$$

[*32] これは日本だけの言い方のようで、該当する英語はなさそう。基本ベクトルの集団であれば、standard basis と呼べるのであるが、個々のベクトルを fundamental vector とか standard vector とは呼ばない。苦し紛れに standard basis vectors と呼んでる英語の本を目にしたことはあるが。

[*33] ここだけの言い方で「ならべかえ」と称える。通常は、置換ないし順列という実態にそぐわない用語が使われる。個々の並換を表す際に、ギリシャ小文字を使うのが慣例である。σ = sigma, τ = tau など。

と表示されるので、f の多重線型性により

$$f(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) = f(\sum_{i_1} a_{i_1 1}\overrightarrow{e_{i_1}},\cdots,\sum_{i_n} a_{i_n n}\overrightarrow{e_{i_n}})$$
$$= \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n} f(\overrightarrow{e_{i_1}},\cdots,\overrightarrow{e_{i_n}}).$$

f の交代性により、$i_1,\cdots,i_n$ のなかに同じ数字が２ヶ所以上現れると、$f(\overrightarrow{e_{i_1}},\cdots,\overrightarrow{e_{i_n}}) = 0$ となる。このような場合を除くと上の和は $(i_1,\cdots,i_n) = \sigma$（$\sigma$ は並換）という形のものだけを考えれば良いことがわかる。すなわち

$$f(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} f(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\cdots,\overrightarrow{e_{\sigma(n)}}).$$

この右辺で上の補題を使えば、

$$f(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) = f(\overrightarrow{e_1},\cdots,\overrightarrow{e_n})\sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\cdots,\overrightarrow{e_{\sigma(n)}}).$$

一方 f として行列式 det をとると、行列式の規格化条件により

$$\det(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\cdots,\overrightarrow{e_{\sigma(n)}}).$$

これら２つの表示式を合わせると定理の主張が得られる。 □

並換 σ の**符号** (signature) を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\cdots,\overrightarrow{e_{\sigma(n)}})$$

で定める。

この定義の仕方と行列式の性質から、並換の符号は、もし並換が２文字の入れ替えを偶数回行って実現されるならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$, 奇数回行って実現されるならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ となる。

系 6.4 (行列式の完全展開)**.**

$$|A| = \sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(n),n}.$$

問 6.1. ($\sharp$) $n = 3$ の場合に上の完全展開式を具体的に書き下してみよ。

問 6.2. 勝手な並換は、隣り合った２箇所の入れ替えを繰り返すことにより実現できる。（あみだ籤のしくみ。）

例 6.5. 並換の符号と１５パズル。不可能性と解法のアルゴリズム。

命題 6.6 (分解型行列式)**.** $m\times m$ 型行列 A と $n\times n$ 型行列 B に対して、

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\,|B| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}.$$

Proof. 左辺に現れる $m+n$ 次正方行列を C とすると、$c_{ij} = a_{ij}$ $(1 \le i,j \le m)$、$c_{m+k,m+l} = b_{kl}$ $(1 \le k,l \le n)$、$c_{m+k,j} = 0$ $(1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n)$ である[*34]。$m+n$ 次の並換 ρ による完全展開式

$$|C| = \sum_{\rho}\mathrm{sgn}(\rho)c_{\rho(1),1}\cdots c_{\rho(m+n),m+n}$$

[*34] ということで、$*$ は、条件なしの範囲を表している。

で、$c_{\rho(1),1}\cdots c_{\rho(m),m}$ の部分に注目する。もし $\{\rho(1),\dots,\rho(m)\}$ の中に $m+1, m+2, \dots, m+n$ の数字が一つでも現れると $c_{\rho(1),1}\cdots c_{\rho(m),m}=0$ となるので、$\{\rho(1),\dots,\rho(m)\}=\{1,2,\dots,m\}$ であるようなものについてのみ和を取ればよい。すなわち、ρ としては、m 次の並換 σ と n 次の並換 τ を使って、

$$(\rho(1),\dots,\rho(m),\rho(m+1),\dots,\rho(m+n)) = (\sigma(1),\dots,\sigma(m), m+\tau(1),\dots,m+\tau(n))$$

と表される場合についての和が問題であるが、これは $\operatorname{sgn}(\rho)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ に注意して、以下のように計算する。

$$\begin{aligned}
|C| &= \sum_{\sigma,\tau} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) c_{\sigma(1),1}\dots c_{\sigma(m),m} c_{m+\tau(1),m+1}\dots c_{m+\tau(n),m+n} \\
&= \sum_{\sigma,\tau} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(m),m} b_{\tau(1),1}\dots b_{\tau(n),n} \\
&= \left(\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(m),m}\right)\left(\sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) b_{\tau(1),1}\dots b_{\tau(n),n}\right) \\
&= |A|\,|B|.
\end{aligned}$$

□

問 6.3. 上の公式を

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |AB - 0C| = |AB| = |A|\,|B|$$

のように「証明」するのは大たわけ[*35]である。その理由を大たわけに何と説く。

問 6.4. n 次の正方行列 A の (i,j) 成分 $a_{i,j}$ が条件

$$a_{i,j}=0 \quad \text{for } i+j \geq n+2$$

を満たすとき、行列式 $|A|$ の値を $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$ の積で表せ。

<u>定理 5.2（行列式の性質）の証明</u>

まず、行についての交代性を示そう。i 行と j 行 $(i<j)$ を入れ替えることにして、行列 $A=(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n})$ の i 行と j 行を入れ替えたものを A' で表し

$$f(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) = |A'|$$

とおく。行列式の列に関する性質（これは既に確かめてある）を使って、f が列についての線型性と交代性を満たすことがわかる。そこで上の定理を適用すれば

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) &= \det(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) f(\overrightarrow{e_1},\cdots,\overrightarrow{e_n}) \\
&= \det(A)|I'|.
\end{aligned}$$

ところが I' は単位行列の i 列と j 列を入れ替えたものに等しいので、列に関する交代性と規格化条件により $|I'|=-|I|=-1$ であることに注意すると、

$$|A'| = f(\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_n}) = -|A|.$$

[*35] 行列といえども人の命に関わりかねない世の中、扱っている量を正しく認識することは極めて重要である、と肝に銘じる。

次に特定の i 行に注目して、その i 行を一つ前の行と次々入れ替えて最初の行に持ってきて行列式の帰納的定義式 (1 行目に関する展開) を使えば、i 行に関する展開式

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

が得られる。ここで、A_{ij} は A から i 行と j 列を取り除いた残りの $(n-1)\times(n-1)$ 行列を表す。A_{ij} は i 行の成分を含まないから、i 行目に関する線型性は上の展開式から明らか（i 行目の成分の１次式で書ける）。

次に転置行列についての性質を示そう：今度は、$f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |{}^tA|$ と置く。証明したばかりの行に関する線型性・交代性により、f は定理の仮定を満たす。そこで $f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = |{}^tI| = |I| = 1$ に注意して、

$$|{}^tA| = f(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |A| f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = |A|.$$

この転置に対する不変性と行に関する展開式から列に関する展開式が得られる。

最後に行列の積に関する性質 $|AB| = |A|\,|B|$ を示す。行列 A は固定して、行列 B の列ベクトルを変数とする関数

$$f(\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}) = |AB|$$

を考える。$|AB| = \det(A\overrightarrow{b_1}, \cdots, A\overrightarrow{b_n})$ であるから f は再び定理の仮定を満たし、したがって

$$|AB| = f(\overrightarrow{b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_n}) = |B|\, f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = |B|\,|A|.$$

$(f(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}) = \det(A\overrightarrow{e_1}, \cdots, A\overrightarrow{e_n}) = \det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = |A|$ に注意。)

問 6.5. 以上の説明を参考に証明の細部を埋めよ。

問 6.6 (*)**.** 行列式は、成分に関する多項式として因数分解されない (既約である)。

行列式の幾何学的意味

平面の上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ を考える。$S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ で２つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ から作られる平行４辺形の面積を表す。ただし、$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ がこの順序で時計回り[*36]の位置にあるときには、面積の値にマイナス符号をつけたものを $S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ とする。平行４辺形の面積が平行変形で不変であることから

$$S(\overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

等が成り立つ。これから S の（多重）線型性が出てくる：

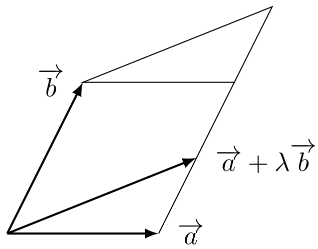
$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) &= S(\overrightarrow{a} + \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = S((1+\alpha)\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (1+\alpha) S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \\ &= S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + S(\alpha\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + S(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}). \end{aligned}$$

[*36] 角度を測るときの符号の選び方でも使われる、直感的には明らかな時計回りであるが、数学としての定義は、それほど明らかではない。これは、平面の向きに２つの選び方があることに対応しているのだが、問題は、物質的ないし物理的裏付けのない状況で「正の向き」は決められないということ。これに関連したものに空間座標の選び方における右手系・左手系というのがあり、こちらは、平面の向きの存在のようには直感的に明らかではないものの、数学的には、座標変換の変換行列の行列式の符号として捉えられるものである。もう少し感覚的な説明を試みると、座標系の選び方で連続変形で互いに移り合うものを考えると２つの種類に集約することがわかるので、それに右手系・左手系という名前を当てているわけであるが、問題は、どちらが右でどちらを左と呼ぶべきかは数学的には定まらず、その弁別は物理現象に頼らざるを得ないということ。具体的には、人間の身体の３次元的非対称性を基準にしての選別という他ない。虚数単位の定義にも通底するビュリダンのロバ (Buridan's ass) の悩ましさ。

また定義から S は交代性をもつ。従って基本定理により

$$S(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) S(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \det(\vec{a}, \vec{b}).$$

すなわち２次の行列式は**平行４辺形の符号つき面積** (signed area of parallelogram) を表す。同様の考察により３次の行列式は**平行６面体の符号つき体積** (signed volume of parallelepiped) を表すことがわかる。



問 6.7. 体積の符号をどう定めるべきか考え（ヒント：右手系と左手系）、$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ が、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を稜とする平行６面体の符号付き体積に一致することを確かめよ。

例 6.7. 同一直線上にない３点 (a_j, b_j, c_j) $(j = 1, 2, 3)$ を通る平面の上の点 (x, y, z) は、３つのベクトル $(a_j - x, b_j - y, c_j - z)$ の張る平行６面体の体積が 0 であることから、次の方程式をみたす。

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & b_1 - y & c_1 - z \\ a_2 - x & b_2 - y & c_2 - z \\ a_3 - x & b_3 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

問 6.8. (♯) 同一直線上にない３点 (a_j, b_j, c_j) $(j = 1, 2, 3)$ を通る平面の方程式は、次のように書ける[*37]。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

問 6.9. 空間内の４点 O, A, B, C を頂点とする三角錐（４面体）の体積は $\dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})\right|$ である。

例 6.8 (ベクトル積)**.** ここでは、ベクトルの縦横の区別をしない幾何ベクトルの成分表示について考える。２つの平行でないベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して、ベクトル

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

は、$\vec{a}, \vec{b}$ と直交し、その大きさが $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に一致する。

問 6.10. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ に注意して、上の性質を導け。

問 6.11. 等式 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ を確かめ、これから $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ を導け。

[*37] これを面白いと見るか、くだらんと思うか、何も感じないか。面白うて、やがて虚しき母式かな。