とパラメータ表示される平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x-a & a' & a'' \\ y-b & b' & b'' \\ z-c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

と書けることを論証せよ。

問 8.6. n 次正方行列 A, B が $AB = A + B$ を満たせば、$A - I_n$ は逆をもち $AB = BA$ である。

最後に、掃き出し法による逆行列の計算方法[*48]について触れておこう。逆行列をもつ行列 A を行基本操作により、階段行列 A' に変形すると、A' は対角成分に 0 でない数が並ぶ三角行列となる。そこで、さらに行基本操作を施して簡約しておくと、A' は単位行列 I_n となる。一方、A' は、左から基本行列を何個か掛けることで実現されるので、$I_n = A' = BA$ の形、ただし B は有限個の基本行列の積、である。これは、$B = A^{-1}$ を意味する。さて、行列 B の具体的な計算方法であるが、ブロック等式 $B(A\ I_n) = (BA\ B) = (I_n\ B)$ に着目し、この左辺が行列 $(A\ I_n)$ に行基本変形を施したものであること、右辺が（簡約）階段行列の形であることに注意すれば、$n \times 2n$ 行列 $(A\ I_n)$ から得られる簡約階段行列の右半分が B すなわち A の逆行列に他ならない。すなわち、$(A\ I_n) \sim (I_n\ A^{-1})$ である。

特殊な形の掃き出し計算ではあるが、説明の途中で出てきた事実の方がより重要なので、抜き出しておくと、

命題 8.8. n 次正方行列 A が逆行列を持てば、それは n 次基本行列を何個か掛けた形で書ける。

9　部分空間の双対性

本来、行列も行列式も、縦横の違いは見かけの形式に過ぎず、本質的ではない。それにも係わらず、掃き出し法とそれに伴う階段行列・階数は行に偏ったものとして導入された。この節で、その歪みを取り除いておくことにする。なお、ここで扱う内容のうち、補題 9.3 と命題 9.5 以外は後の議論に直接の影響を及ぼさないので、省略して次に進むことも可能である。というよりも、飛ばして、後で必要になってから戻ることを勧める。

以下、列ベクトル、行ベクトルの集まりが頻繁にそして対等に登場するので、それらを表す記号をまず導入しておこう。その際、スカラーとして何を考えるかを明示する必要に迫られるので、今まで何となく、数＝実数、のようにしていたものを、次の対角化へ向けた準備も兼ねて、複素数にまで範囲を広げて考えることにする。これまでに学んだ行列計算も連立一次方程式の構造解析も、数の性質のうち使っているのは、加減乗除が可能であることだけであるので、複素数を成分あるいは係数にする場合でも何ら問題なく有効[*49]であることを強調しておく。

そこで、複素数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbb{C})$ という記号であらわし[*50]、とくに $M_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$, $M_{1,n}(\mathbb{C}) = {}^t\mathbb{C}^n$ とおく。それぞれ、n 次元列ベクトル全体、行ベクトル全体を表す。また、列ベクトルと行ベクトルを矢印の向きで区別する代わりに、今後は列ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ を基本に, 行ベクトルを ${}^tv \in {}^t\mathbb{C}^n$ のようにも書くことにする。

さて、零ベクトルを含む n 次元列ベクトルの集まり $V \subset \mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ の**部分空間**[*51] (subspace) であるとは、

[*48] 掃き出し法で逆行列を計算させることにいかほどの意味ありや、他に経験すべきことを差し置いてまで。

[*49] もっと一般のもの、体 (field) とよばれる、であってもよい。逆に、数の範囲を有理数に制限して考えることも可能で、これはこれで意味のあることである。

[*50] 本当は、$M_{m,n}(\mathbb{C}) = {}^m\mathbb{C}^n$, $M_{n,1}(\mathbb{C}) = {}^n\mathbb{C}$, $M_{1,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ と書きたかったのだが、散々迷った挙句、断念。

[*51] 接頭辞 sub に「部分」を訳語として当てるのが慣例であるが、どうだろう。「下部」の方が音も似ていてよいと思うのだが。

V が和とスカラー倍について閉じていること：すなわち、

$$v, v' \in V,\ \alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow v + v',\ \alpha v \in V.$$

このとき、有限個の $v_1, \cdots, v_l \in V$ と複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ に対して、$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_l v_l \in V$ であることに注意。$\{\mathbf{0}\}$ は最も小さい部分空間で、$\mathbb{C}^n$ はもっとも大きい部分空間となる。同様に、${}^t\mathbb{C}^n$ の部分集合で、和とスカラー倍について閉じているものを ${}^t\mathbb{C}^n$ の部分空間と称する。次に、部分空間の**基底**と**次元**を解空間の場合と同じように定義する。掃き出し定理 7.8 の証明により、基底を構成するベクトルの個数は一定であるから、それを部分空間の次元と呼ぶわけである。

定義 9.1. 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ の解空間をここでは、$\ker A = \{v \in \mathbb{C}^n; Av = 0\}$ という記号で表して、A の核 (kernel) と呼ぶ。さらに、$A\mathbb{C}^n = \{Av; v \in \mathbb{C}^n\}$ とおいて、A の像 (image) と呼ぶ。これらは、それぞれ、$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ の部分空間である。

例 9.2. 段数 r の階段行列 A について、$A\mathbb{C}^n$ は $e_1, \cdots, e_r$ の一次結合全体であり、したがって $\dim A\mathbb{C}^n = r$。

問 9.1. ($\sharp$) $A = (\overrightarrow{a}_1, \cdots, \overrightarrow{a}_n)$ ($\overrightarrow{a}_j \in \mathbb{C}^m$) とする。$A\mathbb{C}^n$ が $\overrightarrow{a}_j$ の一次結合全体の集合であり、$\mathbb{C}^m$ の部分空間であることを確かめよ。

補題 9.3 (補充定理)**.** 一次独立なベクトルの集まり $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{C}^n$ があるとき、これに何個かベクトルを補って $\mathbb{C}^n$ の基底にすることができる。とくに $m \leq n$ である。

Proof. 標準基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ の中のベクトルで、$v_1, \cdots, v_m$ の一次結合で書けないものがあったときには、その書けないベクトルを v_{m+1} とおくと、$v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}$ は一次独立である。実際、

$$t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m + t_{m+1} v_{m+1} = 0$$

として、もし $t_{m+1} \neq 0$ であれば、

$$v_{m+1} = \frac{t_1}{t_{m+1}} v_1 + \cdots + \frac{t_m}{t_{m+1}} v_m$$

が $v_1, \cdots, v_m$ の一次結合となるので仮定に反する。したがって $t_{m+1} = 0$ であり、

$$t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m = 0$$

を得るので、$v_1, \ldots, v_m$ が一次独立であることから、$t_1 = \cdots = t_m = 0$ でもある。すなわち、$v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}$ は一次独立である。

この議論を繰り返すと、最終的に一次独立なベクトルの集団 $\{v_1, \cdots, v_l\}$ で、全ての基本ベクトル e_j がこれらの一次式で表されるものが出現する。勝手なベクトルは基本ベクトルの一次結合で書けるので、$\{v_1, \ldots, v_l\}$ の一次結合で全てのベクトルが表示される。すなわち、$(v_1, \cdots, v_l)$ は基底である。これと標準基底の個数を比較することで、$n = l \geq m$ もわかる。 $\square$

命題 9.4. $\mathbb{C}^n$ の部分空間には基底が存在する。

Proof. 部分空間 $V \subset \mathbb{C}^n$ のベクトル $v_1, v_2, \cdots$ を一次独立であるように次々ととってこよう。補題 9.3 により、その最大個数 m は n 以下である。このとき、$v_1, \cdots, v_m$ は V の基底となる。実際、勝手な $v \in V$ に対して、$v_1, \cdots, v_m, v$ は一次独立にならないので、

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$$

となる $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda) \neq (0, \cdots, 0, 0)$ がある。$\lambda = 0$ のときは、$v_1, \cdots, v_m$ の一次独立性から、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ となるので、$\lambda \neq 0$ であり、$v = (\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_m v_m)/(-\lambda)$ は、$v_1, \cdots, v_m$ の一次結合で書ける。 $\square$

ここで、部分空間 $V, W \subset \mathbb{C}^n$ に対して、その和 $V + W = \{v + w; v \in V, w \in W\}$ と共通部分 $V \cap W$ も部分空間であることに注意する。(一目でわからなければ、証明を書き下してみる。)

問 9.2. 部分空間 V, W に対して、$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$ を示せ。また、3つの部分空間 U, V, W に対して、加減公式

$$\dim(U+V+W) = \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(U\cap W)-\dim(V\cap W)+\dim(U\cap V\cap W)$$

が成り立つかどうか調べよ。ここにもまた量子の影ひとつ。

次に、像の次元が行列の階数に一致することを確かめよう。行列 A の階段行列 A' への行変形は、基本行列を左から掛ける形で実現された。とくに、$A' = BA$(B は基本行列の積として逆をもつ行列である)の形である。まず、階数の定義と例 9.2 から、$\dim A'{}^n\mathbb{C} = \mathrm{rank}(A)$。さらに、部分空間 $A\mathbb{C}^n$ の基底 $(v_1, \cdots, v_l)$ に対して、$(Bv_1, \cdots, Bv_l)$ は、部分空間 $A'\mathbb{C}^n = BA\mathbb{C}^n$ の基底を与えるので、$\dim A\mathbb{C}^n = l = \dim A'\mathbb{C}^n = \mathrm{rank}(A)$ がわかり、次の前半を得る。

命題 9.5. $m \times n$ 行列 A に対して、$\dim A\mathbb{C}^n = \mathrm{rank}(A)$ であり、$\dim A\mathbb{C}^n + \dim\ker A = n$ が成り立つ。

Proof. 後半は、これと系 7.10 からわかる。あるいは、補充定理を使って次のように直接示すこともできる。

部分空間 $\ker A$ の基底 $(v_1, \ldots, v_d)$ を用意し、これにベクトルを補って $\mathbb{C}^n$ の基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ を作る。このとき、$Av_{d+1}, \cdots, Av_n$ は $A\mathbb{C}^n$ の基底である。実際、$A\mathbb{C}^n$ のベクトルは、$\{Av_1, \ldots, Av_n\} = \{0, \ldots, 0, Av_{d+1}, \ldots, Av_n\}$ の一次結合で書け、また、

$$\lambda_{d+1}Av_{d+1} + \cdots + \lambda_n Av_n = 0$$

とすれば、$\sum \lambda_k v_k \in \ker A$ がわかり、これが $\{v_1, \cdots, v_d\}$ の一次結合で書けることから

$$\sum_{k=d+1}^{n} \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j v_j$$

を満たす $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ がある。一方、$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は一次独立であったから、これは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ を意味する。とくに $\lambda_{d+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ であり、$\{Av_{d+1}, \cdots, Av_n\}$ が一次独立であるとわかる。書けば長くなるが、単純な推論の単純な連なりに過ぎない。 $\square$

問 9.3. ($\sharp$) $Bv_1, \cdots, Bv_l$ が $A'\mathbb{C}^n$ の基底であることを確かめよ。

系 9.6. 逆をもつ n 次正方行列 B に対して、$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$ である。とくに、列に関する基本変形を施しも行列の階数は変わらない。

Proof. $B\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ に注意して、$\dim((AB)\mathbb{C}^n) = \dim(A(B\mathbb{C}^n)) = \dim(A\mathbb{C}^n)$ からわかる。 $\square$

例 9.7. 行変形による階段行列 $A' = BA$ の形から、像 $A\mathbb{C}^n$ の基底を求めることができる。すなわち、階段の角が現れる段差列を $j_1, j_2, \ldots, j_r$ とし、それに対応する A の列ベクトルを並べた $(\overrightarrow{a_{j_1}}, \ldots, \overrightarrow{a_{j_r}})$ は、$A\mathbb{C}^n$ の基底となる。

実際、j を $j_1,\ldots,j_r$ 以外の列番号とし、解空間のベクトル $\overrightarrow{x}$ の自由に選べる成分を $x_k = 0$ ($k \notin \{j,j_1,\ldots,j_r\}$) かつ $x_j = 1$ と選べば、$A\overrightarrow{x} = 0$ は、$\overrightarrow{a_j}$ が $\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\}$ の一次結合で書けることを意味する。とくに、$\dim A\mathbb{C}^n \leq r$ である。一方、$\dim A\mathbb{C}^n = r$ であるから、これは $\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\}$ が一次独立であることを意味する。

なお、$\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\}$ の一次独立性は次のようにしてもわかる。階段行列 A' を簡約しておけば、$e_k = B\overrightarrow{a_{j_k}}$ ($1 \leq k \leq r$) となり、$e_1,\cdots,e_r$ が一次独立であることから、$\{\overrightarrow{a_{j_1}},\ldots,\overrightarrow{a_{j_r}}\} = \{B^{-1}e_1,\cdots,B^{-1}e_r\}$ も一次独立性である。

問 9.4. ($\sharp$) このことを具体例で確かめよ。

Remark 2. n 次列ベクトルの集まり $\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_m}$ に対して、行列 $A = (\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_m})$ を階段化した際に現れる段差列を $j_1,\ldots,j_r$ とすれば、$\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_m}$ の中の零でない最初のベクトルが $\overrightarrow{a_{j_1}}$ であり、$\overrightarrow{a_{j_1}}$ と独立な最初のベクトルが $\overrightarrow{a_{j_2}}$、$\{\overrightarrow{a_{j_1}},\overrightarrow{a_{j_2}}\}$ と独立な最初のベクトルが $\overrightarrow{a_{j_3}}$、以下同様、となっている。

命題 9.8. 単位行列の右あるいは下に零行列を付け加えた形の行列を正段行列*52と呼ぶことにすれば、すべての行列は、行あるいは列に関する基本変形を繰り返すことで、正段行列に変形できる。そして、正段行列に含まれる単位行列のサイズが元の行列の階数に一致する。

系 9.9. $m \times n$ 行列 A に対して、$\mathrm{rank}({}^tA) = \mathrm{rank}(A)$ である。

Proof. 逆行列をもつ $m \times m$ 行列 B と $n \times n$ 行列 C で、BAC が正方階段行列となるものが取れる。そうすると、${}^t(BAC) = {}^tC{}^tA{}^tB$ は正方階段行列の転置として正方階段行列となり、${}^tA$ の階数と A の階数が一致する。 □

縦横の双対性

以上述べてきたことだけで通常の用には足りるはずであるが、縦横の対等性についてはさらに掘り下げてみよう。そのために、行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ には、既に見た列表示の連立一次方程式とは別に、行表示の連立一次方程式を対応させることができ、それぞれの解空間が典型的な部分空間の例を提供することに注意する。それを

$$\mathrm{coker}A = \{{}^tv \in {}^t\mathbb{C}^m; {}^tvA = 0\}, \quad {}^t\mathbb{C}^m A = \{{}^tvA; {}^tv \in {}^t\mathbb{C}^m\}$$

と書いて、それぞれ、A の余核 (cokernel)、余像 (coimage) と呼ぶ*53ことにしよう。一つの行列には、核、像、余核、余像という合計４つの部分空間が付随することになるので、これら相互の関係が後の問題となる。

基底を使えば、すべての部分空間は、ある行列の (余) 像の形であることがわかる。同様のことは像を核（解空間）に置き換えても成り立つのであるが、これを見る前に、部分空間の双対性について述べておこう。

部分集合 $S \subset \mathbb{C}^n$ に対して、その余空間*54 (dual complement) を

$$S^\perp = \{{}^tv \in {}^t\mathbb{C}^n; {}^tvw = 0 \text{ for any } w \in S\}$$

で、部分集合 $T \subset {}^t\mathbb{C}^n$ の余空間を

$$T^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n; {}^twv = 0 \text{ for any } {}^tw \in T\}$$

*52 これを表す用語はないようなので、ここだけの言い方。

*53 cokernel と coimage の本当の定義は少し違うのだが、まあ、いいだろう。

*54 これは、ここだけの用語である。英語では polar set とも呼ばれるので、余でなく極でよかったのであるが、cokernel, coimage に合わせて。あと、余空間を表す記号として「直交補空間」のそれを流用しているので使い分けに注意。

で定めると、$S^\perp \subset \mathbb{C}^n$, $T^\perp \subset {}^n\mathbb{C}$ はそれぞれ部分空間となる。定義の意味から、$R \subset S \Longrightarrow S^\perp \subset R^\perp$ であり、$S \subset (S^\perp)^\perp$ となる[*55]。また、$(A\mathbb{C}^n)^\perp = \mathrm{coker}A$, $({}^t\mathbb{C}^m A)^\perp = \ker A$ であることにも注意。

補題 9.10. 列ベクトルの基底 $a_1, \cdots, a_n$ に対して、行ベクトルの基底 ${}^tb_1, \cdots, {}^tb_n$ で、${}^tb_j a_k = \delta_{j,k}$ となるものが存在する。

Proof. 行列 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ の逆行列 B を $B = \begin{pmatrix} {}^tb_1 \\ \vdots \\ {}^tb_n \end{pmatrix}$ と行分割して得られる基底を ${}^tb_1, \cdots, {}^tb_n$ とすればよい。 □

命題 9.11. $(S^\perp)^\perp$ は、S を含む最小の部分空間となる。とくに部分空間 V に対して、$(V^\perp)^\perp = V$ が成り立つ。また、部分空間の次元について、$\dim V + \dim V^\perp = n$ が成り立つ。

Proof. 部分空間 V が S を含めば、$S \subset (S^\perp)^\perp \subset (V^\perp)^\perp$ であるから、前半は、$(V^\perp)^\perp = V$ に帰着する。

そこで、これと後半部分をまとめて処理するために、V の基底 $a_1, \cdots, a_m$ を用意し、それにベクトルを補って ${}^n\mathbb{C}$ の基底 $a_1, \cdots, a_n$ を作る。そうして、行ベクトルの基底 ${}^tb_1, \cdots, {}^tb_n$ を ${}^tb_j a_k = \delta_{j,k}$ であるようにとれば、${}^tb_{m+1}, \cdots, {}^tb_n$ は $V^\perp$ の基底を与える。実際、${}^tw \in \mathbb{C}^n$ を ${}^tw = \sum_{j=1}^n \beta_j {}^tb_j$ と表せば、

$${}^tw \in V^\perp \iff {}^twa_j = 0\ (j = 1, \ldots, m) \iff \beta_j = 0\ (j = 1, \ldots, m).$$

この段階で $\dim V + \dim V^\perp = m + (n - m) = n$ がわかる。さらに、$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \in \mathbb{C}^n$ が $(V^\perp)^\perp$ に入るための条件は、${}^tb_j u = 0\ (j = m+1, \ldots, n) \iff \alpha_j = 0\ (j = m+1, \ldots, n) \iff u \in V$. □

系 9.12. すべての部分空間 $V \subset \mathbb{C}^n$ は $V = \ker A$ の形である。

Proof. $V^\perp = {}^t\mathbb{C}^m A$ のように表せば、$V = (V^\perp)^\perp = ({}^t\mathbb{C}^m A)^\perp = \ker A$. □

問 9.5. $(S^\perp)^\perp$ は、S に含まれる有限個のベクトルの一次結合全体に一致する。また、$R \subset S$ ならば $R^\perp \supset S^\perp$ であり、$Q, R \subset {}^n\mathbb{C}$ に対して $(Q + R)^\perp = Q^\perp \cap R^\perp$ が成り立つ。

問 9.6. 2×4 行列 A を適当にとってきて、列に関する変形を施すことで、それを下階段行列に直し、A の余像と余核の基底をそれぞれ一組求めよ。

問 9.7. $m \times n$ 行列 A の階数が r であれば、一次独立なベクトルの集まり $\{u_1, \cdots, u_r\} \subset \mathbb{C}^m$, $\{v_1, \cdots, v_r\} \subset \mathbb{C}^n$ をとってきて、

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \vdots \\ {}^tv_r \end{pmatrix}$$

と表すことができる。

連立一次方程式の行列を使った解法では、行に関する変形を常用した。これは言い換えれば、$\ker A$ を保存する変形に他ならない。一方、列に関する操作の方は $\mathrm{coker}A$ および $A\mathbb{C}^n$ を維持するものになっている。上で見た部分空間に関する双対性は、その連動性を明確に示してくれる。ここまで理解すると、行列の縦横の操

[*55] $v \in S$, ${}^tw \in S^\perp$ ならば ${}^twv = 0$ である。これを使う。

作が文字通り縦横にできて、そのような操作に対して、付随する４つの部分空間の次元（とくに階数）は一定であり続ける[*56]。

なお、この節の最初でも指摘したように、双対性に関する議論で必要なことは、数の範囲が加減乗除で閉じていることで、複素数あるいは実数に限るものではないことを再度強調しておく。

10　行列の対角化

この節では、スカラーの範囲は、とくに断らない限り複素数とする。正方行列 D で次の形のものを**対角行列** (diagonal matrix) という。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \text{\Large 0} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{\Large 0} & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

与えられた $n \times n$ 行列 A に対して、逆をもつ $n \times n$ 行列 T をうまく選んで $T^{-1}AT$ (A の相似変形という) が対角行列になるようにする操作を行列の**対角化** (diagonalization) と呼ぶ。対角化の直接の御利益は冪の計算が簡単になること。

ここで、行列の冪 (べき) について復習しておこう。正方行列 A と自然数 m ($m = 1, 2, \cdots$) に対して、A を m 回かけて得られる行列を $A^m = A \cdots A$ のように書いて A の m 乗とよぶのであった。指数法則 $(A^l)^m = A^{lm}$, $A^l A^m = A^{l+m}$ が成り立つことに再度注意。

問 10.1. 対角行列 D に対して、$D^2, D^3, \cdots$ の表示を与えよ。また、$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^m T$ を確かめよ。

対角化の行列を見つけるために、T を縦割りにして $T = (\overrightarrow{x_1}, \dots \overrightarrow{x_n})$ と表すと、$AT = TD$ という関係は

$$A\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}, \qquad j = 1, \dots, n$$

となる。そこで、行列 A に対して、ベクトル $\overrightarrow{x} \neq 0$ が

$$A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}$$

なる関係をみたすとき、$\overrightarrow{x}$ を**固有値** (eigenvalue) λ の**固有ベクトル** (eigenvector) と称える。

定理 10.1. 行列 A の固有値 λ は、方程式（固有方程式, *eigen*[*57]*equation,* という）

$$|tI_n - A| = 0$$

の解である（左辺を固有多項式という）。

Proof. 定理 8.6 による。 □

系 10.2. 行列 A の固有値と転置行列 ${}^tA$ の固有値は一致する。

問 10.2. n 次正方行列 A, B に対して、２つの行列 AB, BA の固有多項式が一致することを示せ。

[*56] 群の言葉を使えば、行列群 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の $M_{m,n}(\mathbb{C})$ への双作用に関する軌道の完全不変量が階数の意味である。
[*57] これは独語であるが、その英訳である characteristic を使うことも多い。ちなみに、こちらの和訳は「特性」をあてる。