

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 大城 和秀

論 文 題 目

Construction of continuous wavelet transforms associated  
to unitary representations of semidirect product groups

(半直積群のユニタリ表現に付随する連続ウェーブレット変換の構成)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 Ph.D.  
宇 澤 達

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
伊 師 英 之

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
山 上 滋

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
林 正 人

## 論文審査の結果の要旨

本論文は  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \rtimes (SO(n) \times \mathbb{R}_{>0}) / (SO(n) \times \mathbb{R}_{>0})$  上の同変ベクトルバンドルの  $L^2$ -切断の空間に対して Continuous Wavelet Transform (以下 CWT と略する) を新しく定義して、幾つかの場合には許容関数を具体的に求めている。また、 $\mathbb{R}^n \rtimes (SO(n) \times \mathbb{R}_{>0})$  を含むクラスの半直積群に対して CWT の一般論、特に存在に関する条件の研究を展開している。

Wavelet の理論は Morlet により石油探索の必要から考案された Morlet Wavelet が始まりだとされる。Morlet は地震波を爆薬などで起こし、地下の石油の reservoir の反射を捉えることにより探索するために Morlet Wavelet を考案したのである。地震波のような「スパイク」はフーリエ級数のように台が全体に広がっている関数を基底とする変換にとっては局所的な変化が全体にならされてしまうために非常に扱いにくく、多数の項を必要とする。そこで時間領域、周波数領域において「局所化」された関数を用いて近似することを考えたのである。Wavelet 自体は Haar wavelet (1910)、Gabor filter(1946) など先駆的な発見はあるが、Groupillaud, Grossmann, Morlet (1984) によって CWT として定式化され、飛躍的に発展することとなる。

CWT の定義は以下のとおりである。 $G$  を局所コンパクト群、 $\pi$  を  $G$  のヒルベルト空間  $H_\pi$  上のユニタリ表現とする。 $H_\pi$  の元  $f_0$  が認容ベクトル、もしくは wavelet であるとは

$$(W_{f_0} f)(x) = (f, \pi(x)f_0) \quad (f \in H_\pi, \quad x \in G)$$

によって定義される写像  $W_{f_0}: H_\pi \rightarrow L^2(G)$  が等距離写像になることを言う。この  $W_{f_0}$  が CWT と呼ばれる。

本論文の舞台は  $G$  が局所コンパクトアーベル群  $N$  と  $N$  の自己同型群の閉部分群  $H$  の半直積  $N \rtimes H$  となっている場合である。 $H$  のユニタリ表現  $\sigma$  の  $G$  への誘導表現  $\pi$  を考えた時、 $\pi$  が  $G$  の既約表現の直和となる条件を  $G$  の  $\hat{N}$  ( $N$  のユニタリ双対) への作用を通して Theorem 5 として与えている。CWT の存在は Theorem 8 において、 $\pi$  の既約成分に対する認容ベクトルの和が収束するという形で与えられている。したがって、 $\pi$  が有限個の既約表現の直和となる時には自明に満たされる。最後に  $G = \mathbb{R}^n \rtimes (SO(n) \times \mathbb{R}_{>0})$  の場合が扱われている。特に興味深いのが  $n = 3$  の場合の具体的な計算である。 $SO(3)$  の自然表現と二次の対称テンソル表現に対して困難な計算をやり遂げ、Antoine, Murenzi, Vandergheynst ら (1999) の  $n = 2$  に対する結果を  $n = 3$  ( $SO(n)$  が非可換群となるので格段に難しくなる) に拡張することに成功している。3次元の問題への応用が期待される所以である。

申請者は、表現論と実解析における興味深い問題に対し、独創的な貢献を行っている。学位審査セミナーで主論文を明確に説明することができ、セミナー参加者からの質問に的確に答えることができた。

以上を鑑み、審査委員会は本学位申請論文は学位に値すると結論した。

学位審査委員会  
宇沢 達 (委員長)  
伊師 英之 (指導教員)  
林 正人  
山上 滋