別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論 文 題 目　Singular Vector of Ding-Iohara-Miki Algebra and Hall-Littlewood Limit of 5D AGT Conjecture
(Ding-Iohara-Miki 代数の特異ベクトルと５次元 AGT 予想の Hall-Littlewood 極限)

氏　　　名　大久保勇輔

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では，近年５次元 AGT 予想において重要な役割を演じている Ding-Iohara-Miki 代数（DIM 代数）という Hopf 代数や，変形 Virasoro 代数の表現論について主に考察する．

AGT 予想とは２次元共形場理論の共形ブロックと４次元ゲージ理論のインスタントン分配関数が一致するという主張であり，５次元AGT予想とはそのq-変形版，つまり変形 Virasoro 代数や DIM 代数と５次元ゲージ理論との間の関係である．AGT 予想に関連した研究から，ある共形場理論のヒルベルト空間上に AFLT 基底と呼ばれる良い基底が存在することが発見され，この基底を用いて共形ブロックを組み合わせ論的に展開する計算手法が確立された．q-変形版の AFLT 基底は DIM 代数の表現空間上に存在し，一般化された Macdonald 多項式によって表せることが知られている．

① 本論文では DIM 代数のレベル N 表現（レベル$(N,0)$表現とも呼ばれる）から得られる代数の特異ベクトルが，この一般化 Macdonald 多項式に一致しているということを発見した．またその代数の Kac 行列式の公式を得た．この行列式の公式によって，DIM 代数のレベル N 表現に関する PBW 型のベクトルが基底を成すという予想を解決することができる．この Kac 行列式は，DIM 代数のレベル N 表現を変形 W 代数と$U(1)$因子に対応する Heisenberg 代数の部分に分解できることを用い，変形 W 代数の遮蔽作用素から特異ベクトルを作ることによって証明できる．このときこの遮蔽作用素を用いて作った特異ベクトルは，変形 W 代数のそれと本質的に同じものであり，変形 W 代数の特異ベクトルには，ある種の射影によって通常の Macdonald 多項式と一致するという事実が知られている．本論文の結果である一般化Macdonald 多項式との一致は，射影が不必要である分，その事実の一般化とみなすことができる．またこれらの事実の系として，一般化 Macdonald 多項式と通常の Macdonald 多項式との新しい関係式を見出すことができる．

② Macdonald 多項式は q と t の２つの独立なパラメータを持っているが，$t = q^{\beta}$とお

いて$q \to 1$とする極限をとるとJack多項式という多項式に退化する．この極限は５次元AGT予想から４次元AGT予想への退化と一致する．一方でtを固定して$q \to 0$とする極限をとると Hall-Littlewood 多項式という直交多項式に一致する．本論文では変形Virasoro代数やDIM代数のレベルN表現，また５次元AGT予想の$q \to 0$極限についても考察した．特に最も簡単な場合の５次元 AGT 予想，つまり変形 Virasoro 代数の Whittaker ベクトルの内積が，５次元ピュアゲージ理論の分配関数に一致することを$q \to 0$において証明した．またこの極限における代数の表現はHall-Littlewood多項式と非常に相性が良く，DIM代数のレベルN表現のPBW型の基底が２つのHall-Littlewood多項式の積で表せることを発見した．その性質を用いて５次元 AGT 予想で用いられる４点相関関数の厳密な公式を$q \to 0$において与えた．

③ Hopf代数の代表的な例としてKac-Moody Lie代数に付随する量子群がある．その特徴的な性質として，これらの代数が普遍R行列を持つということは有名な事実であり，可解格子模型や絡み目不変量と深い関係にある．DIM代数も準三角なHopf代数であることが知られている．本論文では,DIM代数の普遍R行列の表現を具体的に計算した.D DIM 代数の普遍 R 行列はレベル１表現のテンソル表現において，ボゾンの次数によってブロック対角化され，低次の部分を具体的に求めることができる．さらに，integral form という規格化された一般化 Macdonald 多項式を用いて，その表現行列の一般形を予想した.

④ DIM 代数にはランク N 表現と呼ばれる表現（レベル$(0, N)$表現とも呼ばれる）が存在し，これはレベル N 表現と DIM 代数の自己同型写像によって結びつくことが経験的に知られている．そしてこの関係を spectral duality と呼ぶ．本論文ではこの spectral duality の確認として，一般化Macdonald多項式へのDIM代数のある生成元$x^{+}_{\pm 1}$の作用を調べ，その一般形を予想した．また一般化 Macdonald 多項式を与える高階のハミルトニアンを与え，その固有値を予想した．これらの結果はランク N 表現における抽象的な基底である AFLT 基底を一般化 Macdonald 多項式によって具体的に再現していることを意味している.

⑤ また本論文では一般化 Macdonald 多項式が極限$q \to 1$において，Morozov-Smirnovによって独立に与えられた一般化Jack多項式に一致することを証明した．一般化Jack多項式はあるハミルトニアンの固有関数として定義されるが，その固有値には縮退する場合があるため，一般化 Jack 多項式の直交性は非自明である．Morozov-Smirnov は一般化 Jack 多項式による AGT 予想の証明のアプローチを与えているが，実はその時に用いられる一般化Jack多項式のCauchyの公式は直交性なしでは証明することができない．しかし一般化 Macdonald 多項式には縮退する固有値は存在しない為，本論文の結果によりこの問題を解決し，一般化Jack多項式のCauchyの公式を正当化することができる.