論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　大久保　勇輔

論　文　題　目

Singular Vector of Ding-Iohara-Miki Algebra and Hall-Littlewood Limit of 5D AGT Conjecture

(Ding-Iohara-Miki 代数の特異ベクトルと 5 次元 AGT 予想の Hall-Littlewood 極限)

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅　野　浩　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
粟　田　英　資

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
白　水　徹　也

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
柳　田　伸　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の主結果は Ding-庵原-三木 (DIM) 代数と呼ばれる無限次元量子群（準三角的 Hopf 代数）の自由場表示（Fock 表現）の特異ベクトルの存在に関わる Kac 行列式の明示公式（定理 3.1) と遮蔽作用素を用いて構成される特異ベクトルと一般化 Macdonald 関数の対応関係 (定理 3.4) である．

2009 年に Alday-Gaiotto-立川 は物理的考察に基づいて Virasoro 代数の共形ブロックと 4 次元超対称ゲージ理論の Nekrasov 分配関数が一致することを提唱した．これは AGT 対応（予想）と呼ばれ，数学と物理の双方で活発な研究が進められてきた．粟田-山田 (2009) は，AGT 予想の量子変形版として，変形 Virasoro 代数・変形 $\mathcal{W}$-代数の共形ブロックと Nekrasov 分配関数の 5 次元的拡張の対応を提唱したが，本論文の研究対象は，この AGT 対応の変形版である．ここで Nekrasov 分配関数とは，第 2 Chren 類（インスタントン数）k で分類されるインスタントン（代数幾何学的には $\mathbb{CP}^2$ 上の階数 r の枠付き捩れなし層）のモジュライ空間上 $\mathcal{M}_k$ のある種の同変コホモロジー類の同変積分値 Z_k の母関数である．$\mathcal{M}_k$ 上のトーラス作用の固定点が Young 図の r-対でラベルされることから，局所化公式により Z_k は組み合わせ論的な明示公式をもつ．量子変形版 AGT 予想では同変コホモロジーの代わりに対応する同変 K 群を考える．

AGT 予想を証明する試みを通して，共形場理論の自由場表示（Fock 表現）の空間に（提唱者の名前をとって）AFLT 基底とよばれる良い基底が存在することが明らかになった．この基底は共形ブロックを組み合わせ論的に計算することを可能にし，これから AGT 予想の証明が得られる．ここで Fock 空間と対称関数の同型対応を用いて AFLT 基底を対称関数として表示したものが一般化 Jack 多項式であり，量子変形版では対応する関数は一般化 Macdonald 関数と呼ばれている．一方，Maulik-Okounkov (2012), Schffmann-Vasserot (2012), Bravermann-Finkelberg-中島 (2014) らによる幾何学的表現論を用いた AGT 予想へのアプローチでは $\mathcal{M}_k$ に対する Virasoro 代数や $\mathcal{W}$-代数の作用が本質的な役割を果たしている．したがって AGT 予想の量子変形版では Feigin-Frenkel (1996), 粟田-小竹-白石 (1996) によって導入された変形 Virasoro 代数や変形 $\mathcal{W}$-代数の表現論が重要となるが，これらの代数には余積が自然に定義されていない（表現のテンソル積を考えることができない）という難点があった．この難点は量子群の構造をもつ DIM 代数を考えることで解決される．とくに変形 Virasoro 代数や変形 $\mathcal{W}_N$-代数の表現は N 種の（変形）自由ボゾン場を用いた DIM 代数のレベル $(N, 0)$ 表現として得られることが知られている．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文では DIM 代数のレベル $(N,0)$ 表現空間の内積行列 (Shapovalov 形式) の行列式 (Kac 行列式) の組み合わせ論的明示公式が証明されている．証明はレベル $(N,0)$ 表現を変形 $\mathcal{W}_N$-代数部分と $U(1)$ 因子部分（Heisenberg 代数部分）に分解し，変形 $\mathcal{W}_N$-代数から定義される遮蔽作用素を用いて表現の特異ベクトルの積分表示を得ることによって行われる．これによって DIM 代数のレベル $(N,0)$ 表現における PBW 型の基底の存在に関する予想（粟田-Feigin-星野-金井-白石-柳田, 2011) が肯定的に解決された．さらに本論文では遮蔽作用素を用いて構成した特異ベクトルと一般化 Macdonald 関数の対応関係が与えられている．これは Virasro 代数の特異ベクトルに関する三町-山田 (1995), (変形) $\mathcal{W}$-代数の特異ベクトルに対する粟田-松尾-小竹-白石 (1995) の結果を一般化したものとなっている．それ以外にも関連する結果として，本論文第 4 章〜第 6 章では量子群の表現論におけるクリスタル極限 $q \to 0$ に対応する極限での AGT 予想の証明，レベル $(N,0)$ 表現における DIM 代数の普遍 R 行列の表現行列と一般化 Macdonald 関数の関係などが示されている．

本論文の第 3 章は未発表の結果であり，単著論文として公表予定である．また第 4 〜 6 章は単著論文 (副論文 [3]) および共著論文における申請者の寄与を中心としてまとめられている．特に第 4 章の結果に関する副論文 [1] の主要部分は，申請者によるものであることを確認している．本論文の主結果はやや技術的であるが，精密な計算と議論に基づくものとなっている．また本論文における研究は AGT 対応の量子変形版に動機付けられたものであるが，DIM 代数は，幾何学的表現論，組み合わせ論的表現論，量子可積分系理論といった多くの分野に関わっており，本論文の新たな知見は様々な分野で今後の研究を発展させることが期待される．本論文に関する公開審査会を 2017 年 2 月 9 日に行った．公開審査会では DIM 代数の定義とそのレベル $(N,0)$ 表現の紹介の後，申請論文の 2 つの主結果が，証明のアイデアとともに分かりやすく説明された．質問に対する受け答えも特に問題はなく，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．

学位審査委員会

粟田 英資 (指導教員)
菅野 浩明（主査）
白水 徹也
柳田 伸太郎