学位報告 4

別紙 4

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　LOW REGULARITY WELL-POSEDNESS FOR NONLINEAR DISPERSIVE EQUATIONS
（低い正則性の空間における非線形分散型方程式の適切性について）

氏　　名　木下　真也

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では非線形 Schrödinger 方程式と Klein-Gordon-Zakharov システムの初期値問題を考える．特に，正則性が小さい Sobolev 空間での時間局所および時間大域的な適切性を得ることを目標に設定する．適切性は，微分方程式の初期値問題において重要な概念であり，解の一意存在，初期値に対する解の連続依存性が成り立つことを指す．

まず，以下のように記述される非線形 Schrödinger 方程式 (以下 NLS)　の初期値問題について述べる．

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = N(u), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = \varphi \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{1}$$

(NLS) はレーザービームの伝播やプラズマ波など，流体力学やプラズマ物理に現れる物理現象を記述するモデル方程式である．Schrödinger 方程式は分散性とよばれる，波数が異なる単色波が異なる速度で伝播，特に，特異性をもつ波は無限大の速度で伝播するため時間発展とともに解が滑らかになる性質 (平滑化効果) をもつ．この性質は熱方程式に代表される楕円型方程式程ではないものの初期値問題を考える際に大きく役立っている．本論文では非線形項 $N(u)$ は以下の二種類の場合を考える．

$$F(u) = (\lambda|x|^{-\gamma} * |u|^2)u, \quad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ 0<\gamma<d.$$

$$G(u) = \lambda|u|^{p-1}u, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad 1<p.$$

前者の非線形項は Hartree 型非線形項であり Hartree 型非線形項をもつ (NLS) を Hartree 型非線形 Schrödinger 方程式 (以下 HNLS) と呼ばれる．同様にして後者の非線形項を備えた (NLS) を pure-power 型非線形 Schrödinger 方程式 (以下 PNLS) と呼ぶ．両者とも非常に重要な物理的な背景を持ち，よく研究され多くの結果が得られている．正則性が小さい空間における初期値問題においてスケール臨界指数は非常に重要

な指標である．スケール臨界指数はスケール不変な斉次 Sobolev 空間の正則性を表す指数であり，スケール臨界指数より正則性が小さい Sobolev 空間の枠組みでは適切性が得られないだろうと考えられている．実際 (HNLS), (PNLS) ともにそのような枠組みでは，初期値に対する解の連続依存性が成り立たない初期値が存在し，適切性が得られないことが確かめられている．スケール臨界指数は変数変換によって容易に確かめられ，(HNLS) の場合は $\frac{\gamma-2}{2}$, (PNLS) の場合は $\frac{d}{2}-\frac{2}{p-1}$ である．本論文における主たる成果はスケール臨界指数が負となる場合の時間大域的な適切性を証明したことである．

定理 1. *$d \geq 3$, $4/3 < \gamma < 2$, $s_c = \frac{\gamma-2}{2}$ を仮定する．初期値 $\varphi \in \dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)$ が球対称でありノルム小であるならば (HNLS) は $\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)$ において時間大域的適切である．*

初期値問題を正則性が負の枠組みで考えた場合，つまり $s<0$ の場合，適切性を得るためには非線形項を評価するために正則性を回復する操作が必要になり一般に難しい問題である．そこで上記の定理では，初期値に球対称であるという条件を課し球対称な関数で構成される Sobolev 空間で初期値問題を考える．一般に，球対称な初期値に対する線形解の評価は非球対称の場合よりもよくなることが知られている．定理 1 は非球対称の場合には成立しない線形解の評価式を用いて得られる．また，球対称という仮定は厳しすぎるので非球対称ではあるが角度の正則性を課してある初期値に対する結果も得られた．詳しく述べると，空間を極座標表示して，原点からの距離 r と単位球面 ω とにわけ初期値を r を固定し球面上のみを動く関数とみなしたときどれだけの滑らかさがあれば球対称の場合と同様の結果が得られるかという問題に (HNLS), (PNLS) ともに取り組んでいる．

次に，以下で表される Klein-Gordon-Zakharov システム (以下 KGZ) の初期値問題について述べる．

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + 1)u = -nu, & (t,x) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^d, \\ (\partial_t^2 - c^2\Delta)n = \Delta|u|^2, & (t,x) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^d, \\ (u, \partial_t u, n, \partial_t n)|_{t=0} = (u_0, u_1, n_0, n_1) & \\ \qquad \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d). & \end{cases} \tag{2}$$

ただし，u, n は実数値関数，c は $0<c<1$ を満たすとする．物理的な背景として，(KGZ) はプラズマにおけるラングミュア波とイオン音波の相互作用を記述している．$0<c<1$ という条件は物理モデルとしての (2) の二本の等式の線形部分の波の伝播速度が異なることから設定される．この，波の伝播速度が異なるということが (KGZ) を非常に興味深いものにしている．もし伝播速度が等しい，つまり $c=1$ が成り立っているとする．このとき一本目の等式の低周波部分を無視すると，(2) はおおよそ次の初期値問題と同じものになる．

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = uDu, & (t,x) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^d, \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d). & \end{cases} \tag{3}$$

(3) は非線形項に一階の微分を含んだ非線形波動方程式の初期値問題であり, 例えば 3 次元では, Lindblad らによって $s > 0$ で局所適切性が得られ $s \leq 0$ では, 初期値に対する解の連続依存性が成立しないことから非適切であることが示されている．つまり $c = 1$ の場合は適切性の成否は正則性が正であるかそうでないかに依存するということがわかる．興味深いことに Ozawa-Tsutaya-Tsutsumi は $0 < c < 1$ の状況下では (2) の $s = 0$ での適切性が得られることを示した．彼等の用いた手法は Fourier 制限ノルム法と呼ばれるものである．大まかに言うと Fourier 制限ノルム法は非線形項評価において可微分性の回復を達成するものである．彼等は $0 < c < 1$ の状況下であれば Fourier 制限ノルム法が効果的にはたらくことを用いて上記の結果を得た．本論文の (KGZ) の結果は彼等と同じ精神のもと．さらに一歩進んだ手法を用いることで得られたものである．

定理 2. $d = 2$, $-\frac{13}{18} < s < 0$ とすると (2) は $H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ において時間局所的適切性が得られる．

定理 3. $d \geq 5, s = s_c = d/2 - 2$ とし, 初期値 $(u_0, u_1, n_0, n_1) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ はノルム小であるとする．このとき (2) は $H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ において時間大域的適切性が得られる．また, 得られた時間大域解は散乱する．

上記の二定理はそれぞれ次の新しい試みによって得られたものである．

前者の 2 次元における結果は Bejenaru-Herr-Tataru によって証明された曲面上での合成積評価を適用し得られたものである．この評価式はすでに Zakharov システムに適用され結果の改良に成功している．Zakharov システムは, 非線形 Schrödinger 方程式と非線形波動方程式の二本の等式からなるシステムでありそれぞれの等式の波の伝播速度が異なるという点においては (KGZ) と似ているといえる．ただし二本の等式の線形部が分散性の観点から見ても異なる Zakharov システムとは違い, (KGZ) での適用は, より精密で複雑な評価が必要とされる．

後者の 5 次元以上に関する定理は U^2, V^2 型の関数空間を用いて得られるという点が重要である．U^2, V^2 型空間を用いることでスケール臨界指数を正則性に持つ空間での適切性を得ることが期待できる．この定理は名古屋大学の加藤勲氏との共同研究により得られたものである．すでに氏によって球対称性を初期値に仮定すれば U^2, V^2 型空間を用いて定理 3 と同様の結果が得られることが示されていたが, 今回の研究によって球対称性の仮定を取り去ることができた．これは $0 < c < 1$ 状況下での双線型評価を改良したことにより得られたものである．

本論文は次のように構成される．第一章は (NLS), (KGZ) の結果の紹介をする．第二章では, 定理 1 を含む (NLS) の証明をする．(KGZ) の定理の証明は 2 次元の場合と 5 次元以上で大幅に異なるため第三章で 2 次元の定理を示し, 第四章に 5 次元以上の場合の結果を証明する．