論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　　木下　真也

論　文　題　目

LOW REGULARITY WELL-POSEDNESS FOR NONLINEAR DISPERSIVE EQUATIONS

（低い正則性の空間における非線形分散型方程式の適切性について）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
菱　田　俊　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
杉　本　　充

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科准教授　博士（数理科学）
津　川　光　太　郎

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科准教授　博士（理学）
加　藤　　淳

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本学位申請論文では, 非線型Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &i\partial_t u + \Delta u = N(u), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ &u|_{t=0} = \varphi \in \dot{H}^s, \end{aligned} \tag{1}$$

および Klein-Gordon-Zakharov (以下, KGZ) 方程式系の初期値問題

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u - \Delta u + u = -nu, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ &\partial_t^2 n - c^2\Delta n = \Delta|u|^2, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ &(u, \partial_t u, n, \partial_t n)|_{t=0} = (u_0, u_1, n_0, n_1) \in H^{s+1} \times H^s \times \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

の適切性が論じられている. ここで, 初期値問題が適切であるとは, ただ一つの解が存在して, その解が初期値に連続的に依存することである. 適切性の成立のために初期値の滑らかさを表す上記の Sobolev 空間の指数 s をどこまで許すことができるのか, その限界を追求することを通して, 申請者はそれぞれの方程式の特性を明らかにしようとしている. 以下で, 本論文で得られた主な成果とその価値を述べる.

まず, 空間次元 $d \geq 3$ であるときの Schrödinger 方程式 (1) を, その非線型性が Hartree 型 $N(u) = \left(|x|^{-\gamma} * |u|^2\right)u$ の場合と冪乗型 $N(u) = |u|^{p-1}u$ の場合に考察し, 適当な範囲の γ あるいは p に対して, 方程式のスケール不変性から定まる臨界指数 s_c が負であっても, 初期値 $\varphi \in \dot{H}^{s_c}$ が適当な角度正則性 (極座標 $x = r\omega$ の変数 $\omega \in S^{d-1}$ についての正則性) を有し, かつ十分小さいならば, 時間大域的に適切であることを示した. 例えば, Hartree 型 (臨界指数 $s_c = \frac{\gamma-2}{2}$) に対する申請者の条件 $\gamma \in (\frac{4}{3}, 2)$ は, 先行する Cho-Hwang-Ozawa (2013) よりも小さい γ を許しており, 注目すべき結果である. 負の階数の Sobolev 空間から初期値をとるとき, 正則性の損失を Schrödinger 発展作用素の平滑化作用によって回復することが論点となるが, 申請者は, 角度正則性を反映させた Strichartz 評価と標準的な Strichartz 評価を補間することによって, 変数 t, r, ω についての可積分性の指数が異なる形の評価を導き, それらの指数の最適な選択によって, 先行研究を超える成果を得た.

次に, 空間次元 $d = 2$ であるときの KGZ 方程式系 (2) に対して, 条件 $c \in (0,1)$ を課すとき, 初期値の正則性 $s \in (\frac{-3}{4}, 0)$ のもとで, 時間局所適切性を示した. $c = 1$, すなわち波の伝播速度が等しい場合と比べて, 伝播速度の違いが良い結果を引き起こしうることは既に知られていた. 指数 s を下げて適切性を示すことを指向した研究の先駆けとなったのは, Bourgain (1993) による Fourier 制限ノルム法であるが, $d = 3$, $s = 0$ であるとき, この方法によって, Ozawa-Tsutaya-Tsutsumi (1999) が異なる伝播速度 $c \in (0,1)$ の効果を活かした解析を行っている. しかし, 2 次元の場合に s を上記の $\frac{-3}{4}$ まで下げるためには, 従来の議論だけでは, 正則性の損失の回復の不明な部分が残る. 申請者は, この困難を克服するために, Bejenaru-Herr-Tataru (2010) による曲面上の合成積評価が有効であることを見抜き, この評価を援用するため

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

の詳細な計算を行って, 新しい双線型評価式を証明した. その方法は, $d \geq 3$ の場合への展望も与えており, 高く評価される.

最後に, 空間次元 $d \geq 5$ であるときの KGZ 方程式系 (2) に対して, 上と同様に条件 $c \in (0,1)$ のもとで, 初期値の正則性を臨界指数 $s = s_c = \frac{d}{2} - 2$ として, 初期値が十分小さい場合の時間大域的な適切性を示した (加藤勲氏との共同研究). 最近の加藤勲氏の単著 (2016) では初期値の球対称性が課されていたが, 本論文でこれを取り除いたことは意義深い. 臨界指数の場合を取り扱うために, 申請者は, Bourgain 空間からさらに一歩進んだ Koch-Tataru (2005) による関数空間を使用し, 球対称でない場合の双線型評価式を確立することによって, 一般な初期値を扱うことに成功した.

以上のように, 申請者は, 非線型 Schrödinger 方程式 (1) および KGZ 方程式系 (2) に対して, 初期値の正則性の指数 s が小さい場合に, 最新の技法によって従来よりも深い解析を行っており, 得られた知見は当分野の発展に寄与している. また, 本論文に関する公開審査会を 2017 年 2 月 9 日に行い, 申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した.

以上により, 学位審査委員会は, 申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する.

学位審査委員会

菱田 俊明 (委員長)

杉本 充 (指導教員)

津川 光太郎

加藤 淳