

Domain wall 宇宙におけるベクトル場の局
所化

樋口 将文

平成 29 年 2 月

概要

我々の宇宙が余剰次元を持つというアイデアは様々な分野や理論で示唆されてきた。超弦理論を矛盾なく構築するためには10次元が必要であり、我々が認識する4次元時空に加えて6次元空間が存在することになる。超弦理論では開弦の端点を作る膜状の物体、D-braneの存在が発見され注目を集めた。このbraneが我々が認識する4次元宇宙であるとする、brane宇宙模型の代表例としてRandall-Sundrum模型がある。Randall-Sundrum模型では5次元時空に4次元のbraneを埋め込み、素粒子標準模型における階層性問題を解決することができる。通常のbrane宇宙模型では、Lagrangianレベルでbraneを仮定するが、スカラー場のダイナミクスによってbraneを構成することもできる。結果として厚さを持った膜状の物体が構成される。これはdomain wallと呼ばれ、厚さが0になる極限としてbraneを含んでいる。domain wall時空は一般にスカラー場がkink解を持てば構成できることが知られているが、我々はdomain wallを構成するために再構築(reconstruction)と呼ばれる方法を採用した。計量とスカラー場の結合をうまく選ぶことで任意のscale factorおよびwarp factorが運動方程式をみたすように作用を構成できる。warp factorを適切に決めればdomain wall解を作ることができる。またscale factorを任意に選べるため、任意の時間発展をするFriedmann-Robertson-Walker(FRW) domain wall模型を構成することができる。

本論文では、domain wall上でのベクトル場の局所化について述べる。まず、再構築により、domain wallが任意の時間発展を許す一般のFRW時空となる模型を構築する。次にそのようなdomain wall上で、4次元重力子、スピノル場、ベクトル場が局所化される模型を構築する。これは先行研究[1, 2]に基づく。最後に先述のベクトル場の局所化とは異なる2つの方法でベクトル場の局所化について調べる。第一の方法はDvaliとShifmanが提唱したDvali-Shifman機構と呼ばれる方法を応用したもので、5次元の非可換ゲージ理論のゲージ場の一部を自発的対称性の破れによってmasslessの $U(1)$ ゲージ場としてdomain wall上に局所化する。第二の方法はKaluza-Klein reductionを応用したもので、5次元重力子の一部が4次元domain wall上でベクトル場として振る舞うことを示した。

目次

第 1 章 序章	4
第 2 章 brane 模型	6
2.1 Kaluza-Klein 理論	6
2.2 ADD 理論	7
2.3 Randall-Sundrum 模型	8
2.3.1 階層性問題	10
2.3.2 無限大の余剰次元	11
第 3 章 domain wall 模型	14
3.1 domain wall 模型	14
3.2 再構築	16
3.2.1 (Anti-)de Sitter, 平坦な時空	21
3.2.2 Randall-Sundrum 型 domain wall	23
3.2.3 de Sitter domain wall	25
3.3 一般の FRW domain wall 宇宙	33
3.4 ghost が現れない模型の具体例	36
第 4 章 重力の局所化	40
4.1 重力子の運動方程式	40
4.2 平坦な domain wall 上での重力の局所化	42
4.3 (anti-)de Sitter domain wall 上での重力の局所化	43
4.4 一般の FRW domain wall での重力の局所化	43
第 5 章 スピノル場の局所化	47
第 6 章 ベクトル場の局所化	50
6.1 Dvali-Shifman 機構	50
6.1.1 QCD における色荷閉じ込め	50
6.1.2 $SU(2)$ ゲージ理論における Dvali-Shifman 機構	51

6.2	一般の FRW domain wall へのゲージ場の局所化	52
6.3	massive ベクトル場の局所化	56
6.4	Kaluza-Klein reduction	57
6.4.1	平坦な domain wall	58
6.4.2	一般の FRW domain wall でのゲージ場の局所化 . .	59
第 7 章	まとめ	61
	謝辞	63
	付 録 A 幾何学的な量	69

第1章 序章

我々の宇宙が余剰次元を持つという実験的な証拠は無いものの、実際には4次元でなければならない理由はない。一方で、4次元時空は特別な性質を持っている。例えばゲージ結合定数は4次元で無次元となる。これは電磁気力、弱い相互作用、強い相互作用のゲージ理論のくりこみのために鍵となる。しかしながら、高次元時空の理論においてもこのような定式化は可能である。1920年代、我々の経験則に反して、3次元以上の空間（余剰次元）が存在する可能性が考えられた [3, 4]。この考えは Einstein の一般相対性理論と Maxwell の電磁気学を統一するための数学的な方法が発端であった。その後、しばらく余剰次元についての研究は下火となっていたが、1980年代になると超弦理論の出現により再び注目を集めた。超弦理論では特定の次元でのみ量子化が可能であるため、余剰次元の存在は必然的となる。また、1989年の Dai, Leigh, Polchinski による D-brane の発見 [5] をきっかけに、高次元時空の研究はさらに盛んに行われた。D-brane の概念は宇宙論にも応用された。高次元時空に漂う薄膜 (brane) が我々の4次元の宇宙であるとする brane 宇宙モデルである。特に Randall と Sundrum による brane 宇宙モデル [6] は階層性問題を解決するという点で注目を集めた。

超弦理論における D-brane は超重力理論の近似ではソリトンとして現れるように、場の理論では brane は場が局所化している位相欠陥と考えることができる。これは domain wall と呼ばれる。したがって、低エネルギー有効理論として domain wall 宇宙モデルを考えることができる。domain wall 宇宙モデルでは標準モデルの粒子が domain wall 上に拘束されて bulk へ伝播しないことが必要である。これを局所化という。また重力は時空の歪みであるから bulk にも存在しているが、4次元重力子は domain wall 上に局所化される必要がある。今回の我々の興味は domain wall が FRW 宇宙となるモデルにおける局所化可能性である。特に、ベクトル場の局所化の方法はあまり知られていないため中心的に研究を行った。本論文ではこれらの場の FRW domain wall 上への場の局所化について述べる。

本論文の構成は次の通りである。第2章では brane 宇宙模型について簡単なレビューを行う。特に Randall-Sundrum 模型を具体例として扱う。第3章では再構築を用いた domain wall 模型の構成法をレビューする。一般の FRW 時空が domain wall として5次元 bulk に埋め込まれる模型を構成し、具体的な時間発展を仮定して考察する。我々の研究は第4,5,6章に記した。第4章では重力子、第5章ではスピノル場、第6章ではベクトル場について、それぞれ一般の FRW domain wall 上への局所化を調べた。第6章は本論文の主要な部分である。ベクトル場の局所化を3つの方法で検証した。最後に第7章で本研究のまとめを記した。

本論文では計量に関して signature $(-, +, +, \dots)$ を採用する。一つの余剰次元が存在するとき、一般に我々の宇宙の次元を d として全体の次元を $D = d + 1$ と書く。高次元時空の座標添字を大文字のラテン文字 $M, N, \dots \in \{0, 1, \dots, d\}$ で、4次元時空の座標添字をギリシャ文字 $\mu, \nu, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$ で、3次元空間の座標添字を小文字のラテン文字 $i, j, \dots \in \{1, 2, 3\}$ で表す。ただし、 $D = 5$ の場合は余剰次元の座標を $x^5 = w$ と表記する。

第2章 brane 模型

2.1 Kaluza-Klein 理論

余剰次元は 1920 年代に Theodor Kaluza と Oskar Klein が電磁気学と重力の統一のために初めて導入した [11, 4]。本節では Kaluza-Klein 理論の簡単なレビューを行う。

Kaluza-Klein 理論において高次元時空から我々の 4 次元時空を引き抜く方法は Kaluza-Klein 次元還元と呼ばれる。まず、Kaluza-Klein 次元還元がどのように働くかを理解するために 4+1 次元 Einstein 重力を考える。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで、1つの空間次元が半径 L の S^1 にコンパクト化されていると仮定する。このとき 4+1 次元計量を

$$g_{MN}(x^\mu, w) = \sum_n g_{MN}^{(n)}(x^\mu) e^{inw/L} \quad (2.2)$$

と Fourier 級数展開することができる。このとき $n = 0$ で指定される場の質量は 0 であるが、 $n \neq 0$ で指定される場は質量を持つ。これは $M^4 \otimes S^1$ 上の massless スカラー場 $\phi(x^\mu, w)$ を考えれば理解できる。 ϕ は Klein-Gordon 方程式

$$\partial_M \partial^M \phi = (\partial_\mu \partial^\mu + \partial_5^2) \phi = 0 \quad (2.3)$$

に従う。 ϕ の Fourier 級数展開は

$$\phi(x^\mu, w) = \sum_n \phi_n(x^\mu) e^{inw/L} \quad (2.4)$$

となる。これは Fourier n -モード $\phi_n(x^\mu)$ が

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - \frac{n^2}{L^2} \right) \phi_n = 0 \quad (2.5)$$

を満たすことを意味する。これは質量 $m_n = \frac{|n|}{L}$ のスカラー場である。したがって M^4 上での理論では無限個の massive スカラー場が現れることになる。Kaluza-Klein 理論では半径 L は非常に小さいと考える。エネルギーが $1/L$ に比べて小さければ、massive モードは無視できて、massless ゼロモードの 4次元有効理論となる。

現在、TeV スケールの加速器実験では massive モードは観測されていないので、余剰次元の大きさについて

$$L \lesssim 10^{-19} \text{m} \quad (2.6)$$

という制限が課せられる。

4次元有効理論では計量はゼロモード $g_{MN}^{(0)}(x^\mu)$ のみを考えればよい。計量を

$$ds^2 = g_{MN}^{(0)} dx^M dx^N = e^{2\alpha\phi} \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta\phi} (dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2 \quad (2.7)$$

と置き換える。ここで $\hat{g}_{\mu\nu}$ は 4次元計量、 α, β は定数である。 ds^2 は一般座標変換

$$x'^M = x^M + \lambda^M(x^\mu) \quad (2.8)$$

に対して不変である。変換 $x'^5 = x^5 + \lambda^5(x^\mu)$ に対して A_μ は

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda^5 \quad (2.9)$$

と変換する。これはゲージ変換である。(2.7) より (2.1) は表面項を除いて

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = e^{(2\alpha+\beta)\phi} \sqrt{-\hat{g}} \left(\hat{R} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} e^{-6\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (2.10)$$

となる。ここで 4次元の $F_{\mu\nu}$ は場の強さである。 $2\alpha + \beta = 0$ をと選び、 $\phi = 0$ とすると (2.10) は 4次元 Einstein-Maxwell lagrangian となる。これが Kaluza と Klein が提唱した重力と電磁場の統一理論である。

2.2 ADD 理論

Kaluza-Klein 理論では余剰次元の大きさは実験事実により、非常に小さく制限されているため観測することは困難である。1998年、Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali(ADD)らは、3-brane を導入し、標準模型の

粒子は brane 上に拘束されており，重力のみが余剰次元へ伝播することができることを仮定して，新たに余剰次元の存在を示唆した [15]。彼らは weak スケール ($\sim 1\text{TeV}$) が基本的なエネルギースケールであって，重力，Higgs 機構，ゲージ相互作用はこのスケールで統合すると考えた。重力が他の力に比べて小さいことは，2次元以上のコンパクトな余剰次元の存在により，重力が余剰次元へ染み出して薄まっていることによって説明される。ADD 模型では，Planck スケールと 4次元の見かけ上の Planck スケールの関係は

$$M_{\text{Pl}}^2 \sim M^{2+n} L^n \quad (2.11)$$

で与えられる。ここで n は余剰次元の数で， L はコンパクト化した半径である。 $n = 2$ の場合， $L \sim 1\text{mm}$ となる。これは TeV スケール ($\sim 10^{-16}\text{mm}$) に比べて非常に大きい。これによって観測される Planck スケールが $M \sim \text{TeV}$ より非常に大きいことが説明される。この理論は素粒子理論における階層性問題に対する解決を与えるものであったが，ADD 理論による階層性問題の解決はコンパクト化のスケールと weak スケールの階層性問題に焼き直したに過ぎなかった。

2.3 Randall-Sundrum 模型

Lisa Randall と Raman Sundrum は 1999 年，階層性問題に関して新たな説明を提唱した (Randall-Sundrum 模型) [6]。Randall-Sundrum 模型では計量を次のように仮定する。

$$ds^2 = e^{u(w)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dw^2 \quad (2.12)$$

$e^{u(w)}$ は warp factor と呼ばれる。warp factor の w 依存性によって Kaluza-Klein 理論のように $M^4 \otimes$ (余剰次元) と分解することができない。

余剰次元は $S^1(-\pi L \leq w \leq \pi L)$ において (x^μ, w) と $(-x^\mu, -w)$ を同一視した $S^1/\mathbf{Z}_2(0 \leq w \leq \pi L)$ とする。このような商空間を orbifold という。3-brane は $w = 0$ と $w = \pi L$ の二箇所に置く。

$u(w)$ を求めるために作用

$$S = S_{\text{grav}} + S_{\text{vis}} + S_{\text{hid}} \quad (2.13)$$

$$S_{\text{grav}} = \int d^4x \int_{-\pi L}^{\pi L} dw \sqrt{-g} (2M^3 R - \Lambda) \quad (2.14)$$

$$S_{\text{vis}} = \int d^4x \sqrt{-g_{\text{vis}}} (\mathcal{L}_{\text{vis}} - V_{\text{vis}}) \quad (2.15)$$

$$S_{\text{hid}} = \int d^4x \sqrt{-g_{\text{hid}}} (\mathcal{L}_{\text{hid}} - V_{\text{hid}}) \quad (2.16)$$

$$g_{\mu\nu}^{\text{vis}}(x^\mu) = g_{\mu\nu}(x^\mu, w = \pi L) \quad (2.17)$$

$$g_{\mu\nu}^{\text{hid}}(x^\mu) = g_{\mu\nu}(x^\mu, w = 0) \quad (2.18)$$

のもとで, 5次元 Einstein 方程式

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \kappa^2 T_{MN} \quad (2.19)$$

を解く。ここで $M = (4\kappa^2)^{-1/3}$ は 5次元 Planck 質量で Λ は 5次元宇宙定数である。Einstein 方程式は

$$\frac{3u'^2}{2} = -\kappa^2 \Lambda \quad (2.20)$$

$$\frac{3u''}{2} + \frac{3u'^2}{2} = \kappa^2 (V_{\text{vis}}\delta(w - \pi L) + V_{\text{hid}}\delta(w) - \Lambda) \quad (2.21)$$

となる。orbifold の対称性をみたく (2.20) の解として

$$u(w) = -|w| \sqrt{\frac{-2\kappa^2 \Lambda}{3}}, \quad (-\pi L \leq w \leq \pi L) \quad (2.22)$$

と選ぶ。これより $\Lambda < 0$ が要求される。これは brane 間の時空が AdS_5 であることを意味する。(2.22) と $u(w)$ が $-\pi L \leq w \leq \pi L$ の周期関数であることから

$$u''(w) = 2\sqrt{\frac{-2\kappa^2 \Lambda}{3}} (\delta(w) - \delta(w - \pi L)) \quad (2.23)$$

となる。したがって (2.21) は

$$\left(\kappa^2 V_{\text{vis}} + \sqrt{-6\kappa^2 \Lambda} \right) \delta(w - \pi L) + \left(\kappa^2 V_{\text{hid}} - \sqrt{-6\kappa^2 \Lambda} \right) \delta(w) = 0 \quad (2.24)$$

となり、これをみたすためには、

$$V_{\text{vis}} = -V_{\text{hid}} = -\frac{\sqrt{-3\Lambda}}{\kappa} \quad (2.25)$$

が必要である。したがって計量は

$$ds^2 = e^{-2k|w|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dw^2 \quad (2.26)$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{-\kappa^2 \Lambda}{6}} \quad (2.27)$$

となる。

2.3.1 階層性問題

余剰次元の効果で重力の有効スケールがどのように振る舞うかを計算することができる。

$$ds^2 = e^u \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dw^2 \quad (2.28)$$

を作用に代入すると

$$S = 2M^3 \int d^4x \int_{-\pi L}^{\pi L} dw e^{-2k|w|} \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} + \dots \quad (2.29)$$

を得る。これより 4次元 Planck 質量を

$$M_{\text{Pl}}^2 = M^3 \int_{-\pi L}^{\pi L} dw e^{-2k|w|} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2k\pi L}) \quad (2.30)$$

と決めることができる。

次に物質場が $w = \pi L$ の brane 上に局所化しているとする、物理的なスケールがどのようになるかを考える。 $w = \pi L$ 上での Higgs 場の作用は

$$\begin{aligned} S_{\text{H}} &= \int d^4x \sqrt{-g_{\text{vis}}} (g_{\text{vis}}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(H^\dagger H - v^2)) \\ &= \int d^4x e^{-4k\pi L} (e^{2k\pi L} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(H^\dagger H - v^2)^2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

と書ける。 $H = e^{k\pi L} \tilde{H}$ と規格化すると

$$S_{\text{H}} = \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} D_\mu \tilde{H}^\dagger D_\nu \tilde{H} - \lambda \left(\tilde{H}^\dagger \tilde{H} - e^{-2k\pi L} v^2 \right)^2 \right) \quad (2.32)$$

となる。(2.32)において、Higgs場の真空期待値は

$$v_{\text{eff}} = e^{-k\pi L} v \quad (2.33)$$

と、指数関数で抑えられている。これは標準模型において質量パラメータである。したがってHiggsの質量がPlanckスケールであったとしても $w = \pi L$ にあるbrane上ではweakスケールに抑えられている。標準模型の場の質量はHiggsの真空期待値で決まるから、標準模型の全ての質量が指数関数で抑えられることになる。weakスケールとPlanckスケールの大きさは $M_W \sim 10^{-16} M_{\text{Pl}}$ であるから余剰次元の大きさは

$$k\pi L \sim 35 \quad (2.34)$$

となる。

2.3.2 無限大の余剰次元

Randall-Sundrumによるbrane模型にはもう一つのシナリオがある。それは余剰次元の大きさを無限大にすることである[19](RS2)。RS2シナリオでは、我々の宇宙は $w = 0$ のbraneであると、 $L \rightarrow \infty$ とすることで他方のbraneを取り除く。このときwarp factor(2.22)やbraneのtension(2.25)は L に依らないので変わらない。変わるのは M_{Pl} のみで、 $L \rightarrow \infty$ で $M_{\text{Pl}}^2 \rightarrow M^3/k$ となる。

我々の宇宙が $w = 0$ のbraneであるとしたときに4次元重力はどのようになるかを考える。brane上での計量の摂動 $h_{\mu\nu}$ は次のように書ける。

$$ds^2 = e^u (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\rho, w)) dx^\mu dx^\nu + dw^2 \quad (2.35)$$

これをEinstein方程式に代入すると線形化されたEinstein方程式

$$e^{-u} \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} - h''_{\mu\nu} - 2u' h'_{\mu\nu} = 0 \quad (2.36)$$

が得られる。gauge固定条件 (transverse, traceless gauge)

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.37)$$

を課し、Fourier展開する。

$$h_{\mu\nu}(x^\rho, w) = \sum_n E_n(w) \hat{h}_{\mu\nu}^n(x^\rho) \quad (2.38)$$

これを (2.36) に代入すると

$$(e^{-u} E_n \partial_\rho \partial^\rho - E_n'' - 2u' E_n') h_{\mu\nu}^n = 0 \quad (2.39)$$

となる。4次元では $\partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu}^n = -m_n^2 h_{\mu\nu}^n$ が成り立っていると仮定すると (2.39) は

$$e^{-u} m_n^2 E_n + E_n'' + 2u' E_n' = 0 \quad (2.40)$$

となる。変数変換 $dw = e^{-k|w|} ds$, $E(w) = e^{\frac{3}{2}k|w|} \tilde{E}(s)$ により (2.40) は

$$\left(-\frac{d^2}{ds^2} + V(s) \right) \tilde{E}(s) = m_n^2 \tilde{E}(s) \quad (2.41)$$

$$V(s) = \frac{15k^2}{4(1+k|s|)^2} - 3k\delta(s) \quad (2.42)$$

と書き換えられる。これは一次元 Schrödinger 方程式でありポテンシャル $V(s)$ は図 2.1 のように $w = s = 0$ で狭くて深い谷を持つ。また、基底状態は massless モード $m_0 = 0$ であり、これにより 4次元重力が brane に拘束されることがわかる。massive モードは連続スペクトルを持ち、その効果は brane 上で Newton 重力を次のように修正する。

$$U(r) = \frac{k}{8\pi M^3} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \quad (2.43)$$

ここで $\frac{k}{8\pi M^3}$ は Newton の万有引力定数で第一項が massless モードの寄与、第二項が massive モードの寄与である。これより、 k が十分大きければ 4次元重力は Newton 重力に近づくことがわかる。

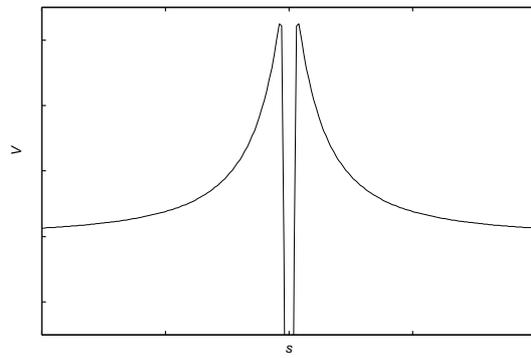


図 2.1: 式 (2.42) で与えられるポテンシャル $V(s)$ 。

第3章 domain wall 模型

本章では, Toyozato, Bamba, & Nojiri(2013)[23] にもとづいて, domain wall 宇宙模型の構成法についてレビューする。特に, domain wall 上で4次元FRW宇宙を実現させるために, 任意の warp factor や scale factor が解となる模型の構成する手法, 「再構築 (reconstruction)」について説明する。warp factor を domain wall 解となるように選べば, domain wall 上で任意の時間発展をする FRW 宇宙を実現することができる。再構築とは, スカラー場の結合を調整することで任意の warp factor や scale factor が解となるような作用を構成する方法である。まず, 第3.1節で Rubakov らによる最も簡単な domain wall 模型をレビューし, 第3.2節では1つのスカラー場を導入し再構築により実際に模型を作り, warp factor を適切に選んで domain wall 解を構成する。同様に第3.2.1節では (anti-)de Sitter 時空となる解を, 第3.2.2節では Randall-Sundrum 模型を domain wall に拡張した解を, 第3.2.3節で anti-de Sitter 時空に de Sitter domain wall が埋め込まれた解を構成する。

3.1 domain wall 模型

再構築による構成の前に, 最も簡単な domain wall 模型を紹介する。Valery Rubakov と Mikhail Shaposhnikov は古典場を用いて高次元時空に埋め込まれた部分空間を dynamical に生成し, 通常の粒子を閉じ込める模型を提唱した。このような部分空間は domain wall と呼ばれる [24]。5次元の作用

$$S = \int d^5x \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right) \quad (3.1)$$

を考える。 ϕ は実スカラー場である。ポテンシャル $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2$ は $\phi = \pm v$ で最小値をとる。 ϕ の運動方程式は

$$\partial_M \partial^M \phi + \lambda \phi^3 - \lambda v^2 \phi = 0 \quad (3.2)$$

であるから、解

$$\phi_0(w) = v \tanh(v \sqrt{\lambda/2} w) \quad (3.3)$$

を持つ。 $\phi_0(w)$ を図 3.1 に示す。

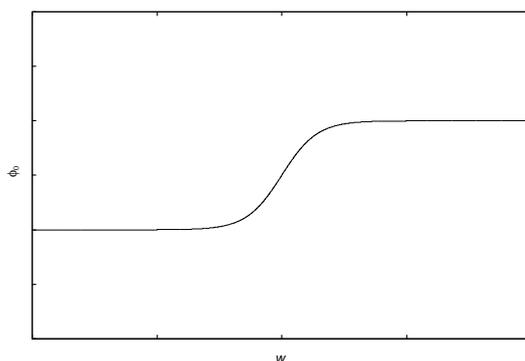


図 3.1: 式 (3.3) で表される domain wall 解。

フェルミオンの局所化をみるために 5 次元でのフェルミオンの作用

$$S_f = \int d^5 x \bar{\Psi} (i\Gamma^M \partial_M - h\phi) \Psi \quad (3.4)$$

で与えられる系を考える。ここで Ψ は 4 成分 Dirac スピノルで $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, $\Gamma^5 = -i\gamma^5$ とする。運動方程式は

$$(i\Gamma^M \partial_M - h\phi_0) \Psi = 0 \quad (3.5)$$

となる。ここで解 $\Psi(x^M)$ を

$$\Psi(x^\mu, w) = f(w)\psi(x^\mu) \quad (3.6)$$

の形に分離できると仮定する。 ψ が標準模型に現れるフェルミオンであるとする、massless で左巻きカイラルであるから、

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad (3.7)$$

$$\gamma^5 \psi = -\psi \quad (3.8)$$

が仮定される。したがって、(3.5) は

$$(f' + hf\phi_0)\psi = 0 \quad (3.9)$$

となるから

$$\begin{aligned} f(w) &= \exp\left(-h \int^w dw' \phi_0(w')\right) \\ &= \left[\cosh\left(v\sqrt{\lambda/2w}\right)\right]^{-h\sqrt{2/\lambda}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

を得る (図 3.2)。 f の幅は h によって決まる。 h を大きくとれば f は鋭く

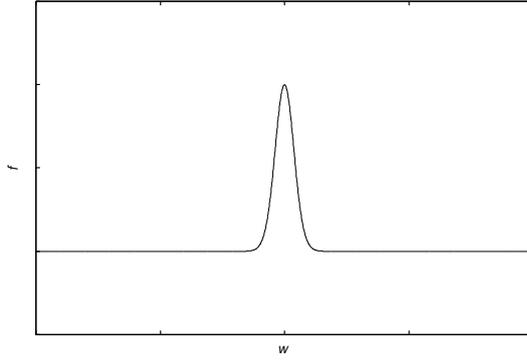


図 3.2: 式 (3.10) で与えられる関数 $f(w)$ 。

なり, 4次元 massless 左巻きカイラルフェルミオン, ψ は domain wall 上に局所化される。

3.2 再構築

Bamba, Nojiri, & Odintsov(2012)[9] にもとづいて, 厳密な Domain wall 解をもつ模型を構成する方法を示す。この定式化は再構築と呼ばれる [25]。本節では時空の次元を $D = d + 1$ として扱う。

作用は

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{\omega(\varphi)}{2} \partial_A \varphi \partial^A \varphi - \mathcal{V}(\varphi) \right) \quad (3.11)$$

と仮定する。ここで $D = d + 1$ と仮定し, 計量を

$$ds^2 = dw^2 + L^2 e^{u(w)} \sum_{\mu, \nu=0}^{d-1} \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.12)$$

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & L^2 e^u \hat{g}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad g^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & L^{-2} e^{-u} \hat{g}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

とする。(3.13)では $\hat{g}^{\mu\nu}$ を $\hat{g}_{\mu\nu}$ の逆行列として定義した。 L は無次元の定数である。スカラー場は w のみに依存することを仮定する。さらに $\hat{g}_{\mu\nu}$ は d 次元 Einstein 多様体の上の計量であるとする。

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \frac{d-1}{l^2} \hat{g}_{\mu\nu} \quad (3.14)$$

d 次元時空が de Sitter のとき $1/l^2 > 0$, anti-de Sitter のとき $1/l^2 < 0$, flat のとき $1/l^2 = 0$ を仮定する。anti-de Sitter の場合は l が虚数となる。

さらに $\varphi = \varphi(w)$ を仮定するとエネルギー運動量テンソルは

$$T_{tt} = \frac{\omega(\varphi)}{2} (\varphi')^2 - \mathcal{V}(\varphi) \quad (3.15)$$

$$T_{\mu\nu} = \left(-\frac{\omega(\varphi)}{2} (\varphi')^2 - \mathcal{V}(\varphi) \right) g_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

となる。よって Einstein 方程式の (5, 5) 成分, (μ, ν) 成分はそれぞれ

$$\frac{1}{2} \omega(\varphi) (\varphi')^2 - \mathcal{V}(\varphi) = \frac{d(d-1)}{8} (u')^2 - L^{-2} e^{-u} \frac{d(d-1)}{2l^2} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \omega(\varphi')^2 - \mathcal{V}(\varphi) &= \frac{d-1}{2} u'' + \frac{d(d-1)}{8} (u')^2 \\ &\quad - L^{-2} e^{-u} \frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで $\varphi(w) = w$ と仮定する。この仮定は少なくとも局所的には一般性を失わない。もし $\varphi \neq w$ とした場合, $\varphi = \varphi(w)$ を逆に解いて $w = w(\varphi) \equiv \tilde{\varphi}$ と場を再定義すれば $\tilde{\varphi}$ は上で仮定した場になる。

Einstein 方程式の (5, 5) 成分と (μ, ν) 成分は

$$\frac{d(d-1)}{8} (u')^2 - L^{-2} e^{-u} \frac{d(d-1)}{2l^2} = \frac{1}{2} \omega(\varphi) - \mathcal{V}(\varphi) \quad (3.19)$$

$$\frac{d-1}{2} u'' + \frac{d(d-1)}{8} (u')^2 - L^{-2} e^{-u} \frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} = -\frac{1}{2} \omega(\varphi) - \mathcal{V}(\varphi) \quad (3.20)$$

となり, したがって $\omega(\varphi)$, $\mathcal{V}(\varphi)$ は

$$\omega(\varphi) = -\frac{d-1}{2} u'' - L^{-2} e^{-u} \frac{d-1}{l^2} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\frac{d-1}{4} u'' - \frac{d(d-1)}{8} (u')^2 + L^{-2} e^{-u} \frac{(d-1)^2}{2l^2} \quad (3.22)$$

となる。このときスカラー場の方程式

$$\omega\varphi'' - \mathcal{V}' + \frac{1}{2}\omega'\varphi'^2 + \frac{d}{2}\omega u'\varphi' = 0 \quad (3.23)$$

は自動的にみたされている。したがって (3.21), (3.22) と選ぶ限り, 任意の $u(w)$ に対して (3.12) および $\varphi(w) = w$ は Einstein 方程式とスカラー場の方程式をともにみたす解になっている。

エネルギー密度は (3.21), (3.22) より

$$\begin{aligned} \rho = T_{00} &= \frac{\omega(\varphi)}{2}(\varphi')^2 + \mathcal{V}(\varphi) \\ &= -\frac{d-1}{2}u'' - \frac{d(d-1)}{8}(u')^2 + L^{-2}e^{-u}\frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

と計算できる。圧力は w 方向以外に一様等方であり

$$\begin{aligned} p_y = T_{yy} &= \frac{\omega(\varphi)}{2}(\varphi') - \mathcal{V}(\varphi) \\ &= \frac{d(d-1)}{8}(u')^2 - L^{-2}e^{-u}\frac{d(d-1)}{2l^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} p = T_{ii}/g_{ii} &= \frac{\omega(\varphi)}{2}(\varphi')^2 + \mathcal{V}(\varphi) \\ &= -\frac{d-1}{2}u'' - \frac{d(d-1)}{8}(u')^2 + L^{-2}e^{-u}\frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。

bulk が漸近的平坦であると仮定して $|w| \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ とする。よって $1/l^2 \neq 0$ のとき

$$\omega(\varphi) \sim -L^{-2}\frac{d-1}{l^2} \quad (3.27)$$

anti-de Sitter 時空 ($1/l^2 < 0$) の場合 $\omega > 0$ であるが, de Sitter 時空 ($1/l^2 > 0$) の場合 $\omega(\varphi) < 0$ なのでスカラー場は ghost となる。flat ($1/l^2 = 0$) の場合

$$\omega(\varphi) = -\frac{d-1}{2}u'' \quad (3.28)$$

より $u'' > 0$ なら ghost が現れる。ここで $u(w)$ に Z_2 対称性 ($w \rightarrow -w$) を課すと, e^u は w の偶関数, すなわち $u(w)$ は偶関数, $u'(w)$ は奇関数, $u''(w)$ は偶関数, したがって $\omega(\varphi)$ も Z_2 対称となる。このとき w 方向の

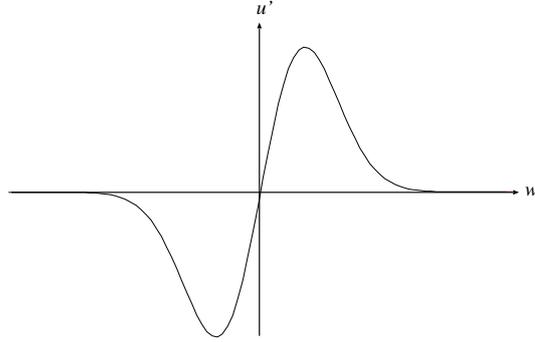


図 3.3: warp factor が $w \rightarrow -w$ に対して対称で時空が w 方向に対して漸近的平坦であるとき $u'(w)$ は負の領域と正の領域の両方が存在する。

漸近的平坦性から u' は典型的に図 3.3 のようになる。よって $u'' < 0$ となる領域が必ず存在し、ghost が現れる。このように漸近的平坦性と我々の時空が de Sitter または平坦であることを仮定すると、しばしば ghost が現れる。ghost の存在はエネルギー密度が負になることを許すため、物理的に問題であるが、一旦これを許せば任意の u に対して Einstein 方程式の解となりうる現実的なモデルを作ることができることになる。ghost の問題は w 方向をコンパクト化することで回避できる場合がある。次に、具体的に u の形を与えて詳細にモデルを構成する。一つ目の例として u を

$$u = u_0 e^{-w^2/w_0^2} \quad (3.29)$$

と与える。このとき

$$\omega(\varphi) = - (d-1) \left(\frac{2\varphi^2}{w_0^4} - \frac{1}{w_0^2} \right) u_0 e^{-\varphi^2/w_0^2} - L^{-2} \frac{d-1}{l^2} e^{-u_0 e^{-\varphi^2/w_0^2}} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\varphi) = & - \frac{d-1}{2} \left(\frac{2\varphi^2}{w_0^4} - \frac{1}{w_0^2} \right) u_0 e^{-\varphi^2/w_0^2} - \frac{d(d-1)}{2} \frac{\varphi^2}{w_0^4} u_0^2 e^{-2\varphi^2/w_0^2} \\ & + L^{-2} \frac{(d-1)^2}{2l^2} e^{-u_0 e^{-\varphi^2/w_0^2}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \rho(w) = & - (d-1) \left(\frac{2w^2}{w_0^4} - \frac{1}{w_0^2} \right) u_0 e^{-w^2/w_0^2} - \frac{d(d-1)}{2} \frac{w^2}{w_0^4} u_0^2 e^{-2w^2/w_0^2} \\ & + L^{-2} \frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} e^{-u_0 e^{-w^2/w_0^2}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。(3.30) 及び (3.31) と選ぶことにより, (3.29) が解となっている。 w_0 を十分小さくとればエネルギー密度を $w \sim 0$ に局所化することができる (図 3.4(c))。こうして domain wall 解を構成できた。また, 上の一般論から $1/l^2 > 0$ の場合は domain wall が de Sitter となって加速膨張を実現できる。ただし (3.30) から明らかにこの模型におけるスカラー場は ghost になっており, (3.32) からわかるようにエネルギー密度は負に局所化されている。したがってこの模型は物理的には問題がある (図 3.4(a)-3.4(c))。しかしながらエネルギー密度が局所化できて domain wall 解を構成できるかどうかを調べるという意味でこの具体例は価値がある。

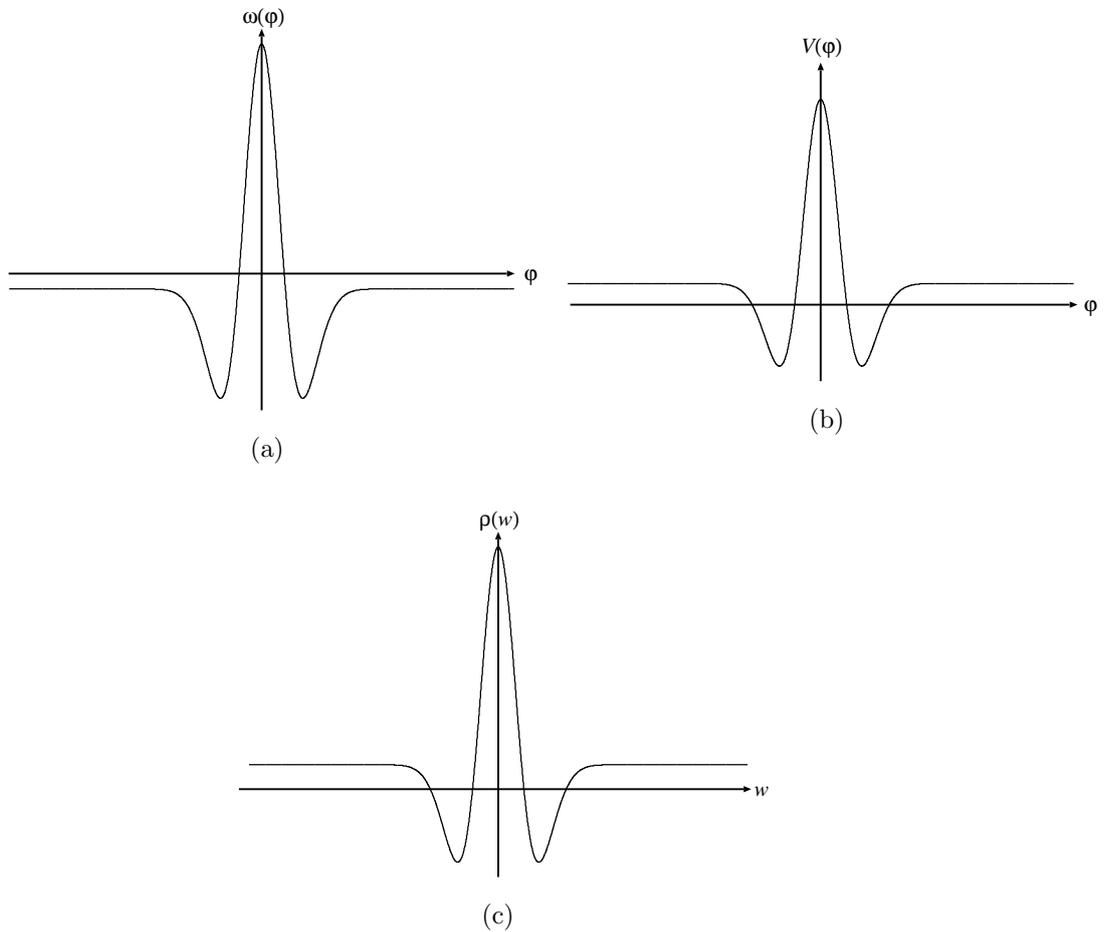


図 3.4: (a)warp factor を (3.29) とした場合の $\omega(\varphi)$ の概形。(b)warp factor を (3.29) とした場合の $V(\varphi)$ の概形。(c)warp factor を (3.29) とした場合の $\rho(w)$ の概形。

このようにして定常的な1次元 domain wall と d 次元 Einstein 多様体の構造をした解をもつモデルを、重力と結合したスカラー場の理論として構成することができた。この定常的な domain wall の時間発展に対する安定性を調べることは今後の課題である。

3.2.1 (Anti-)de Sitter, 平坦な時空

ここからは bulk が anti-de Sitter, de Sitter, 平坦になるようなモデルをそれぞれ構築する。ここで示すいくつかの例は domain wall 解になっていないが、第3.2.3節で扱う de Sitter domain wall モデルを構成するときに用いるために準備する。また、ここでは $L = 1$ とする。

de Sitter

まず、 u を

$$u = 2 \ln \cos \frac{w}{l}, \quad \frac{1}{l^2} > 0 \quad (3.33)$$

とすると

$$\omega(\varphi) = 0 \quad (3.34)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{d-1}{2l^2} \quad (3.35)$$

と計算できる。 $1/l^2 > 0$ より \mathcal{V} は正の定数となる。したがって bulk は de Sitter 時空となる。また、 $1/l^2 > 0$ より d 次元部分多様体も de Sitter 時空となる場合に相当する。

anti-de Sitter

次に

$$u = 2 \ln \sinh \frac{w}{l}, \quad \frac{1}{l^2} > 0 \quad (3.36)$$

とすると

$$\omega(\varphi) = 0 \quad (3.37)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\frac{d-1}{2l^2} \quad (3.38)$$

と計算できる。 $1/l^2 > 0$ より \mathcal{V} は負の定数となる。したがって bulk は anti-de Sitter 時空となる。 $1/l^2 > 0$ より d 次元部分多様体は de Sitter 時空となる場合に相当する。

$1/l^2 < 0$ の場合を考える。

$$u = 2 \ln \cosh \frac{w}{\tilde{l}}, \quad \frac{1}{l^2} = \frac{1}{-\tilde{l}^2} < 0 \quad (3.39)$$

とすると

$$\omega(\varphi) = 0 \quad (3.40)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\frac{d(d-1)}{2\tilde{l}^2} \quad (3.41)$$

と計算できる。 $1/\tilde{l}^2 > 0$ より \mathcal{V} は負の定数となる。したがってこれは bulk は anti-de Sitter 時空となる。 $1/l^2 < 0$ より d 次元部分多様体は anti-de Sitter 時空となる場合に相当する。

また, A を定数として u を

$$u = \frac{2w}{A}, \quad \frac{1}{l^2} = 0 \quad (3.42)$$

とすれば

$$\omega = 0 \quad (3.43)$$

$$\mathcal{V} = -\frac{d(d-1)}{2A^2} \quad (3.44)$$

と計算できる。 \mathcal{V} が負の定数となるので bulk は anti-de Sitter 時空となる。 $1/l^2 = 0$ より d 次元部分多様体は平坦となる場合に相当する。

平坦

最後に bulk が平坦となるモデルを与える。

$$u = 2 \ln \frac{w}{l}, \quad \frac{1}{l^2} > 0 \quad (3.45)$$

とすると

$$\omega(\varphi) = 0 \quad (3.46)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = 0 \quad (3.47)$$

と計算できる。 $\mathcal{V} = 0$ より bulk は平坦となる。 $1/l^2 > 0$ より d 次元部分多様体は de Sitter 時空となる場合に相当する。

3.2.2 Randall-Sundrum 型 domain wall

u を

$$\frac{1}{l^2} = 0, \quad u = -\frac{2|w|}{A} \quad (3.48)$$

にとつたものが Randall-Sundrum 模型 [19] に対応する。このとき

$$\omega(\varphi) = \frac{2(d-1)}{A} \delta(\varphi) \quad (3.49)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{d-1}{A} \delta(\varphi) - \frac{d(d-1)}{4A^2} \quad (3.50)$$

となる。エネルギー密度を計算すると

$$\rho(w) = \frac{d-1}{2A} \delta(w) - \frac{d(d-1)}{2A^2} \quad (3.51)$$

となる。これより brane が構成されており, bulk は anti-de Sitter になっていることがわかる。 $1/l^2 = 0$ より brane は平坦である。

この模型を domain wall 解に拡張することができる。

$$\frac{1}{l^2} = 0, \quad u = -\frac{2\sqrt{w^2 + w_0^2}}{A} \quad (3.52)$$

とすると

$$\omega(\varphi) = \frac{d-1}{A} \frac{w_0^2}{(\varphi^2 + w_0^2)^{3/2}} \quad (3.53)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{d-1}{2A} \frac{w_0^2}{(\varphi^2 + w_0^2)^{3/2}} - \frac{d(d-1)}{2A^2} \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + w_0^2} \quad (3.54)$$

となる。この模型は $w_0 \rightarrow 0$ の極限として (3.48) で与えられる模型を含んでいる。エネルギー密度と曲率は

$$\rho(w) = \frac{d-1}{A} \frac{w_0^2}{(w^2 + w_0^2)^{3/2}} - \frac{d(d-1)}{2A^2} \frac{w^2}{w^2 + w_0^2} \quad (3.55)$$

$$R(w) = \frac{2dw_0^2}{A(w^2 + w_0^2)^{3/2}} - \frac{d(d+1)}{A^2} \quad (3.56)$$

となる。 $w_0 \rightarrow 0$ の極限で

$$\frac{w_0^2}{(w^2 + w_0^2)^{3/2}} \rightarrow 2\delta(w) \quad (3.57)$$

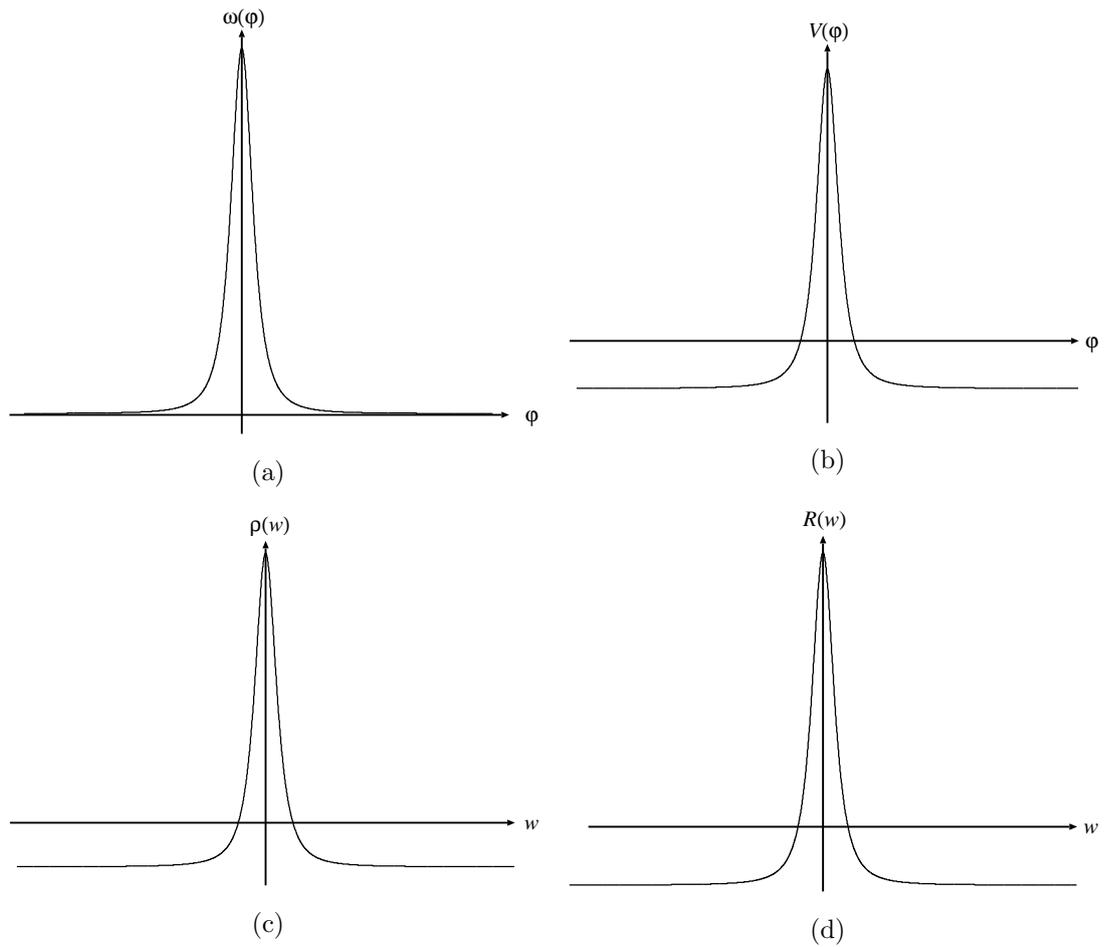


図 3.5: (a)warp factor を (3.52) とした場合の $\omega(\varphi)$ の概形。(b)warp factor を (3.52) とした場合の $V(\varphi)$ の概形。(c)warp factor を (3.52) とした場合の $\rho(w)$ の概形。(d)warp factor を (3.52) とした場合の $R(w)$ の概形。

となるから (3.53)-(3.59) において ω と ρ , \mathcal{V} , R の第一項は δ -関数的に局所化されるため domain wall を構成できる (図 3.5(a)-3.5(d))。 \mathcal{V} , R の第二項は負の定数であるから bulk は anti-de Sitter である。 $1/l^2 = 0$ より domain wall は平坦である。したがって anti-de Sitter に平坦な domain wall が埋め込まれていることがわかる。これは Randall-Sundrum 模型の brane に厚みを持たせたものである。実際に $w_0 \rightarrow 0$ では

$$\omega(\varphi) = \frac{2(d-1)}{A} \delta(w) \quad (3.58)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{d-1}{A} \delta(\varphi) - \frac{d(d-1)}{2A^2} \quad (3.59)$$

$$\rho(w) = \frac{2(d-1)}{A} \delta(w) - \frac{d(d-1)}{2A^2} \quad (3.60)$$

$$R(w) = \frac{4d}{A} \delta(w) - \frac{d(d+1)}{A^2} \quad (3.61)$$

となり (3.48) に対応する結果を再現する。圧力の w 成分は

$$p_y = \frac{d(d-1)w^2}{2A^2(w^2 + w_0^2)} \quad (3.62)$$

で、 $w_0 \rightarrow 0$ では正の定数である。

3.2.3 de Sitter domain wall

この節では 5 次元 anti-de Sitter 時空中の 4 次元 de Sitter domain wall 解をもつ模型を構成する。この解は domain wall が de Sitter 時空になるので我々の宇宙の加速膨張を再現できる模型である。(3.36) を拡張して次のような warp factor を考える。

$$u = 2 \ln \sinh \left(\frac{\sqrt{w_0^2 + z_0^2} - \sqrt{w_0^2 + z^2}}{l'} \right), \quad (3.63)$$

$$l' \equiv \frac{l z_0}{\sqrt{w_0^2 + z_0^2}}, \quad \frac{1}{l'^2} > 0 \quad (3.64)$$

ここで w_0, z_0 は正の定数で D 軸座標 z は $-z_0 \leq z \leq z_0$ とする。 $w_0 \rightarrow 0$ 極限で

$$\sqrt{w_0^2 + z_0^2} - \sqrt{w_0^2 + z^2} \rightarrow z_0 - |z|, \quad l' \rightarrow l \quad (3.65)$$

より, この極限は (3.36) により得られた時空を $0 \leq w \leq z_0$ で切り取ったものを2つ用意して $w = z_0$ 同士を張り合わせたものになっている (図 3.6)。実際に (3.36) の $w \geq 0$ について座標変換 $w = -z + z_0 (z \geq 0)$ をす

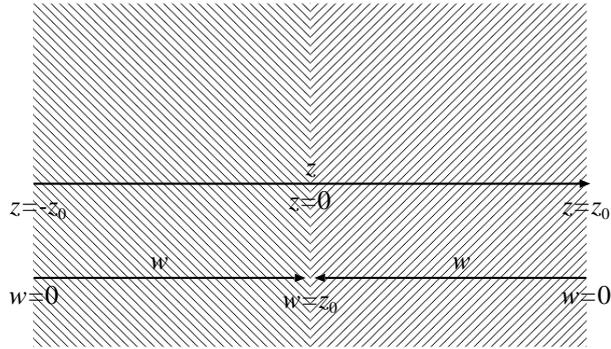


図 3.6: 時空を $0 \leq w \leq z_0$ の範囲で切り取ったものを2つ用意して $w = z_0$ 面同士を貼り合わせる。張り合わせた時空に対して新たな座標 z を貼る。

ると

$$u = 2 \ln \sinh \frac{z_0 - z}{l}, \quad (3.66)$$

$w = z + z_0 (z \leq 0)$ をすると

$$u = 2 \ln \sinh \frac{z_0 + z}{l} \quad (3.67)$$

となる。

$\omega, \mathcal{V}, \rho$ を計算する。

$$\omega(\varphi) = (d-1) \left(\frac{\frac{\varphi^2}{l'(\varphi^2+w_0^2)}}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} - \frac{w_0^2}{l'(\varphi^2+w_0^2)^{3/2}} \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} \right) - \frac{d-1}{l^2} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} \quad (3.68)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{d-1}{2} \left(\frac{\frac{\varphi^2}{l'(\varphi^2+w_0^2)}}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} - \frac{w_0^2}{l'(\varphi^2+w_0^2)^{3/2}} \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} \right) - \frac{d(d-1)}{2} \frac{\varphi^2}{\varphi^2+w_0^2} \frac{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)}{l'^2 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} + \frac{(d-1)^2}{2l^2} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{\varphi^2+w_0^2}}{l'}\right)} \quad (3.69)$$

$$\rho(w) = (d-1) \left(\frac{\frac{w^2}{l'(w^2+w_0^2)}}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{w^2+w_0^2}}{l'}\right)} - \frac{w_0^2}{l'(w^2+w_0^2)^{3/2}} \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{w^2+w_0^2}}{l'}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{w^2+w_0^2}}{l'}\right)} \right) - \frac{d(d-1)}{2} \frac{w^2}{w^2+w_0^2} \frac{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{w^2+w_0^2}}{l'}\right)}{l'^2 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{w_0^2+z_0^2}-\sqrt{w^2+w_0^2}}{l'}\right)} \quad (3.70)$$

$\omega(\varphi)$ が負になる領域があるのでスカラー場は ghost である (図 3.7(a))。また, $w_0 \rightarrow 0$ とすれば ρ の一行目第二項が δ -関数になり残りの項は負の定数になるので domain wall 解を構成できる (図 3.7(c))。このとき第 3.2.1 節の議論より bulk は anti-de Sitter, domain wall は de Sitter であることが保証されている。ここで現れた ghost はコンパクト化により除去できる。これについて次の簡単な模型で説明する。

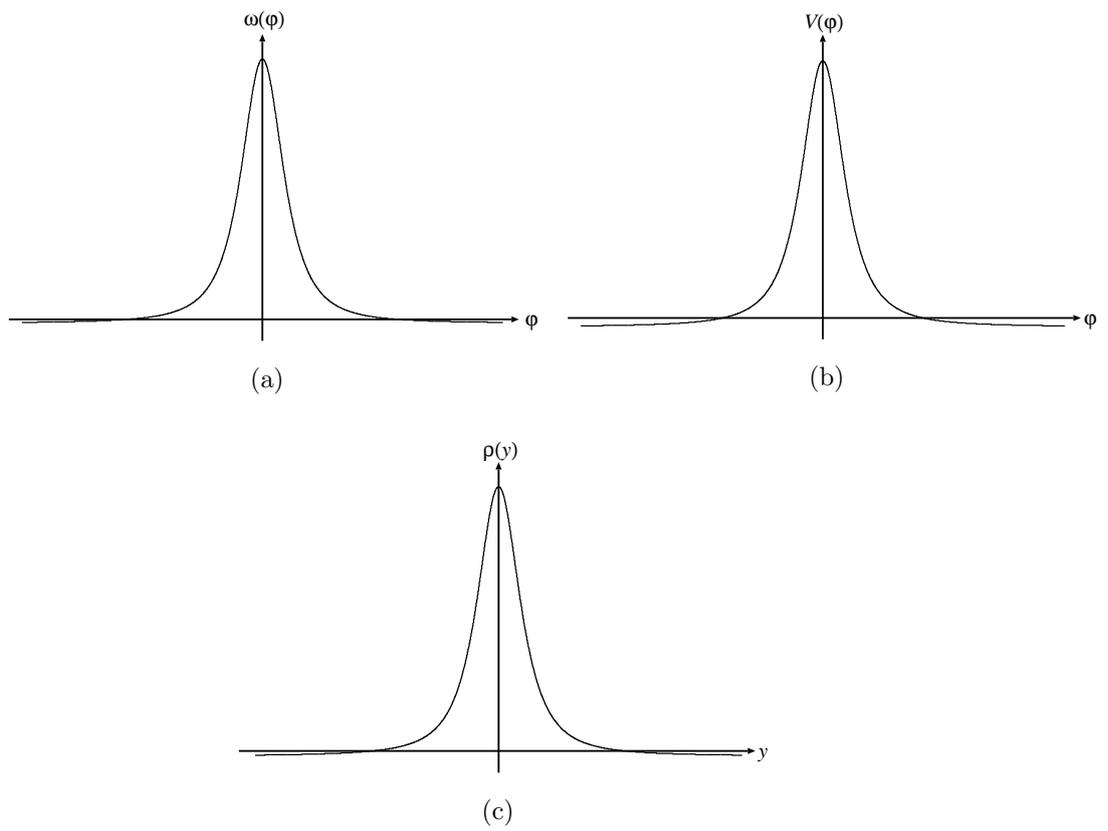


図 3.7: (a)warp factor を (3.63) とした場合の $\omega(\varphi)$ の概形。 (b)warp factor を (3.63) とした場合の $V(\varphi)$ の概形。 (c)warp factor を (3.63) とした場合の $\rho(w)$ の概形。

簡単のために $D = d + 1 = 5$ とし warp factor は

$$u = \ln \left[\frac{w^2}{l^2} \left(1 + \frac{w^4}{w_0^4} \right)^{-1} \right] \quad (3.71)$$

とする。

$\omega, \mathcal{V}, \rho$ を計算する。

$$\omega(\varphi) = 3 \left(1 + \frac{\varphi^4}{w_0^4} \right)^{-2} \frac{\varphi^2}{w_0^4} \left(5 + \frac{\varphi^4}{w_0^4} \right) \left(1 - \frac{\varphi^4}{w_0^4} \right) \quad (3.72)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \left(1 + \frac{\varphi^4}{w_0^4} \right)^{-2} \left(\frac{75\varphi^2}{2w_0^4} + \frac{6\varphi^6}{w_0^8} + \frac{9\varphi^{10}}{2w_0^{12}} \right) \quad (3.73)$$

$$\rho(w) = \left(1 + \frac{w^4}{w_0^4} \right)^{-2} \left(\frac{45w^2}{w_0^4} + \frac{3w^{10}}{w_0^{12}} \right) \quad (3.74)$$

$w^2 = \varphi^2 \leq w_0^2$ では $\omega(\varphi) \geq 0$ である。そこで次のような操作を行う。
 $w \sim 0$ で $e^u \sim \frac{w^2}{l^2}$ となるから w は D 次元時空に埋め込まれた S^d の動径方向の座標とみなすことができる。 $w = 0$ は球の中心に対応する。 $w^2 = w_0^2$ で切り取り、 $0 \leq w^2 \leq w_0^2$ の D 次元球を 2 つ用意し、球面同士を貼り合わせる (図 3.8)。 $w = w_0$ では

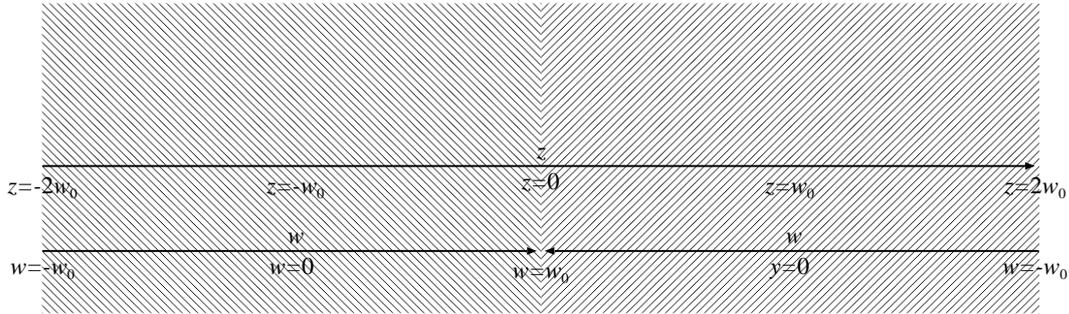


図 3.8: 時空を $w^2 \leq w_0^2$ の範囲で切り取ったものを 2 つ用意して $w = w_0$ 面同士を貼り合わせる。張り合わせた時空に対して新たな座標 z を貼る。

$$d(e^u)|_{w_0} = 0 \quad (3.75)$$

となるため、 $w = w_0$ では滑らかに接続できる。そうすると定義された任意の領域で $\omega > 0$ となり ghost は現れない (図 3.9)。このとき ρ は $w \sim w_0$

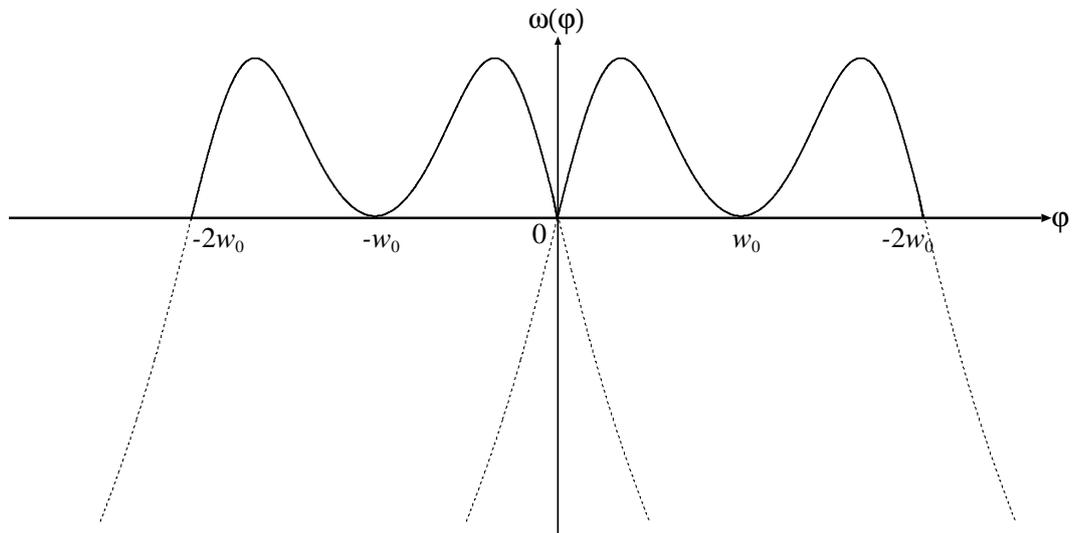


図 3.9: 時空を $w^2 \leq w_0^2$ で切り取ったものを2つ用意して図3.8のように接続したときの warp factor (3.71) に対する $\omega(\varphi)$ の概形。

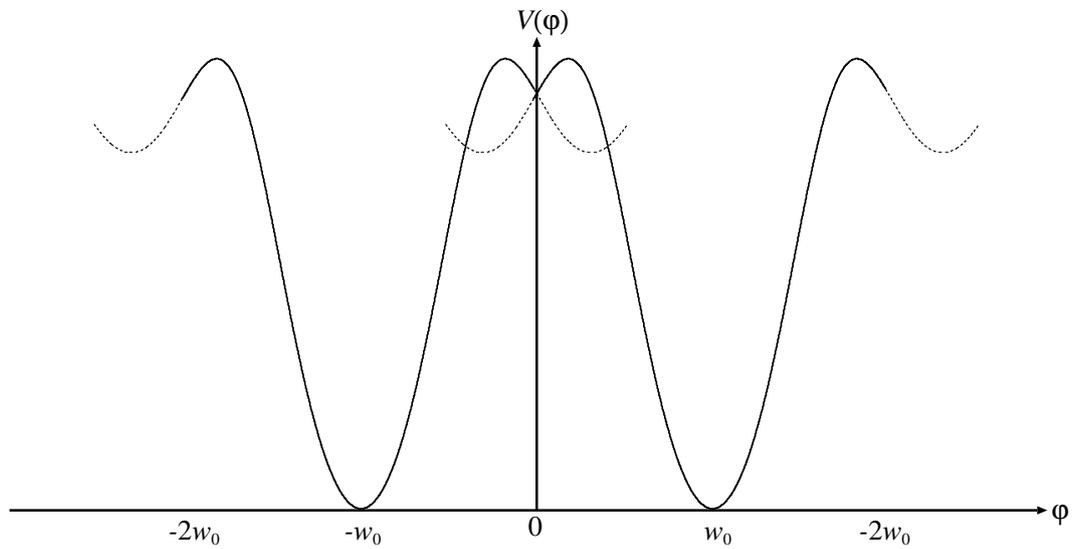


図 3.10: 時空を $w^2 \leq w_0^2$ で切り取ったものを2つ用意して図3.8のように接続したときの warp factor (3.71) に対する $\nu(\varphi)$ の概形。

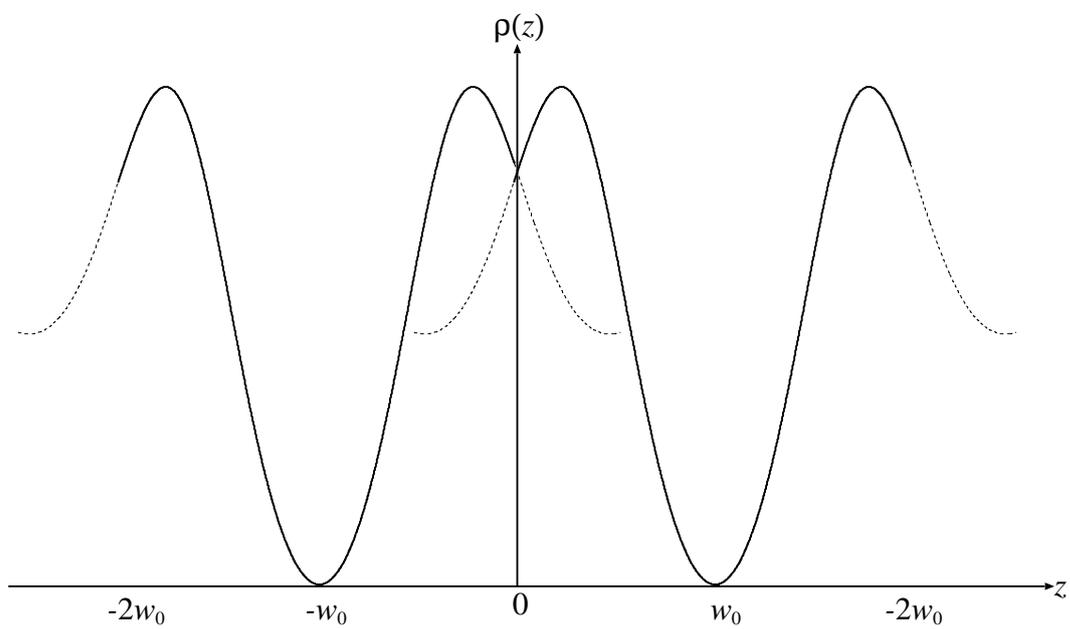


図 3.11: 時空を $w^2 \leq w_0^2$ で切り取ったものを2つ用意して図 3.8 のように接続したときの warp factor (3.71) に対する $\rho(w)$ の概形。

に局所化される (図 3.11)。こうして ghost が現れない de Sitter domain wall 解が得られた。

ここで u', u'', u''' の $w = w_0$ での連続性を調べる。上の操作で座標変換は

$$w = \begin{cases} -z + w_0 & (z \geq 0) \\ z + w_0 & (z < 0) \end{cases} \quad (3.76)$$

で与えられるから $u(z), u'(z), u''(z), u'''(z)$ は

$$u(z) = \begin{cases} \ln \left[\frac{(-z+w_0)^2}{l^2} \left(1 + \frac{(-z+w_0)^4}{w_0^4} \right)^{-1} \right] \\ \ln \left[\frac{(z+w_0)^2}{l^2} \left(1 + \frac{(z+w_0)^4}{w_0^4} \right)^{-1} \right] \end{cases} \quad (3.77)$$

$$u'(z) = \begin{cases} \frac{2}{z-w_0} + \frac{4(-z+w_0)^3}{w_0^4+(-z+w_0)^4} \\ \frac{2}{z+w_0} - \frac{4(z+w_0)^3}{w_0^4+(z+w_0)^4} \end{cases} \quad (3.78)$$

$$u''(z) = \begin{cases} -\frac{2}{(z-w_0)^2} - \frac{12(-z+w_0)^2}{w_0^4+(-z+w_0)^4} + \frac{16(-z+w_0)^6}{[w_0^4+(-z+w_0)^4]^2} \\ -\frac{2}{(z+w_0)^2} - \frac{12(z+w_0)^2}{w_0^4+(z+w_0)^4} + \frac{16(z+w_0)^6}{[w_0^4+(z+w_0)^4]^2} \end{cases} \quad (3.79)$$

$$u'''(z) = \begin{cases} -\frac{4}{(z-w_0)^3} + \frac{24(-z+w_0)}{[w_0+(-z+w_0)^4]} - \frac{48(-z+w_0)^5}{[w_0+(-z+w_0)^4]^2} \\ \quad - \frac{96(-z+w_0)^5}{[w_0+(-z+w_0)^4]^2} + \frac{128(-z+w_0)^9}{[w_0+(-z+w_0)^4]^3} \\ \frac{4}{(z+w_0)^3} - \frac{24(z+w_0)}{[w_0^4+(z+w_0)^4]} + \frac{48(z+w_0)^5}{[w_0^4+(z+w_0)^4]^2} \\ \quad + \frac{96(z+w_0)^5}{[w_0^4+(z+w_0)^4]^2} - \frac{128(z+w_0)^9}{[w_0^4+(z+w_0)^4]^4} \end{cases} \quad (3.80)$$

となるから $z \rightarrow \pm 0$ で

$$u'|_{z=+0} = u'|_{z=-0} \quad (3.81)$$

$$u''|_{z=+0} = u''|_{z=-0} \quad (3.82)$$

$$u'''|_{z=+0} \neq u'''|_{z=-0} \quad (3.83)$$

となって u', u'' は接続面で連続であるが u''' は不連続になっている。したがって、 $\rho(z)$ や $R(z)$ の z 微分も $z = 0$ で不連続になる。しかし、Einstein 方程式やスカラー場の方程式は z の 2 階微分までしか現れないのでこの不連続性は問題ではなく、(3.77) は Einstein 方程式とスカラー場の方程式を満たしている。

3.3 一般のFRW domain wall宇宙

この節では、より一般的な domain wall 解、すなわち一般の FRW domain wall 解をもつ模型を再構築により構成する。計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dw^2 + f(w, t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] - \frac{e(w, t)^2}{f(w, t)} dt^2 \\ &= e^{\ln f(w, t)} \gamma_{ij}(x) dx^i dx^j + h_{\alpha\beta}(w) dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (3.84)$$

を仮定する。ここで $\alpha, \beta = 0, 5$, $x^0 = t$, $x^5 = w$, $h_{\alpha\beta} \equiv \text{diag} \left(-\frac{e(w, t)^2}{f(w, t)}, 1 \right) = \text{diag}(-L^2 e^u, 1)$ とする。特に

$$f(w, t) = L^2 e^{u(w, t)} a(t)^2, \quad e(w, t) = L^2 e^{u(w, t)} a(t) \quad (3.85)$$

とすると FRW 宇宙

$$ds_{\text{FRW}}^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.86)$$

が5次元時空に warp factor $L^2 e^{u(w, t)}$ で埋め込まれていると理解できる。

$$ds^2 = dw^2 + L^2 e^{u(w, t)} \left\{ a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] - dt^2 \right\} \quad (3.87)$$

$$(\text{=} dw^2 + L^2 e^u \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$$

この模型では計量が t と w に依るため、2つのスカラー場を導入して物質場の作用を

$$\begin{aligned} S_{\varphi\chi} &= \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} A(\varphi, \chi) \partial_A \varphi \partial^A \varphi - B(\varphi, \chi) \partial_A \varphi \partial^A \chi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} C(\varphi, \chi) \partial_A \chi \partial^A \chi - V(\varphi, \chi) \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

と仮定する。スカラー場のエネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned} T_{AB}^{\varphi\chi} &= g_{AB} \left[-\frac{1}{2} A(\varphi, \chi) \partial_C \varphi \partial^C \varphi - B(\varphi, \chi) \partial_C \varphi \partial^C \chi - \frac{1}{2} C(\varphi, \chi) \partial_C \chi \partial^C \chi - V(\varphi, \chi) \right] \\ &\quad + A(\varphi, \chi) \partial_A \varphi \partial_B \varphi + B(\varphi, \chi) (\partial_A \varphi \partial_B \chi + \partial_B \varphi \partial_A \chi) + C(\varphi, \chi) \partial_A \chi \partial_B \chi \end{aligned} \quad (3.89)$$

スカラー場の運動方程式は φ, χ についてそれぞれ

$$0 = \frac{1}{2}A_\varphi \partial_A \varphi \partial^A \varphi + A \nabla^A \partial_A \varphi + A_\chi \partial_A \varphi \partial^A \varphi + \left(B_\chi - \frac{1}{2}C_\varphi \right) \partial_A \chi \partial^A \chi + B \nabla^A \partial_A \chi - V_\varphi \quad (3.90)$$

$$0 = \left(-\frac{1}{2}A_\chi + B_\varphi \right) \partial_A \varphi \partial^A \varphi + B \nabla^A \partial_A \varphi + \frac{1}{2}C_\varphi \partial_A \chi \partial^A \chi + C \nabla^A \partial_A \chi + C_\varphi \partial_A \chi \partial^A \varphi - V_\chi \quad (3.91)$$

となる。ここで添字の φ と χ はそれぞれの場に関する微分を表す。さらに $\varphi = \varphi(t) = t, \chi = \chi(w) = w$ と仮定する。エネルギー-運動量テンソルの各成分は

$$T_0^0 = -\frac{1}{2} \frac{f}{e^2} A - \frac{1}{2} C - V \quad (3.92)$$

$$T_i^j = \delta_i^j \left[\frac{1}{2} \frac{f}{e^2} A - \frac{1}{2} C - V \right] \quad (3.93)$$

$$T_5^5 = \frac{1}{2} \frac{f}{e^2} A + \frac{1}{2} C - V \quad (3.94)$$

$$T_0^5 = B, \quad (3.95)$$

(A.6) を用いるとスカラー場の運動方程式は

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{f}{e^2} A_\varphi + \frac{f}{e^2} \left(\frac{\dot{e}}{e} - \frac{2\dot{f}}{f} \right) A + B_\chi - \frac{1}{2} C_\chi + \left(\frac{e'}{e} + \frac{f'}{f} \right) B - V_\varphi \quad (3.96)$$

$$0 = -\frac{f}{e^2} \left(-\frac{1}{2} A_\chi + B_\varphi \right) + \frac{f}{e^2} \left(\frac{\dot{e}}{e} - \frac{2\dot{f}}{f} \right) B + \frac{1}{2} C_\varphi + \left(\frac{e'}{e} + \frac{f'}{f} \right) C - V_\chi \quad (3.97)$$

と求めることができる。Einstein テンソルは (A.11)-(A.14) で与えられる

から Einstein 方程式は

$$\frac{3f''}{2f} - \frac{3k}{f} - \frac{3\dot{f}^2}{4e^2f} = \kappa^2 \left(-\frac{f}{2e^2}A - \frac{1}{2}C - V \right) \quad (3.98)$$

$$\frac{f''}{2f} + \frac{e''}{e} - \frac{k}{f} - \frac{\ddot{f}}{e^2} - \frac{\dot{f}^2}{4e^2f} + \frac{\dot{e}\dot{f}}{e^3} = \kappa^2 \left(\frac{f}{2e^2}A - \frac{1}{2}C - V \right) \quad (3.99)$$

$$\frac{3f'e'}{2ef} - \frac{3k}{f} - \frac{3\ddot{f}}{2e^2} - \frac{3\dot{f}^2}{4e^2f} + \frac{3\dot{e}\dot{f}}{2e^3} = \kappa^2 \left(\frac{f}{2e^2}A + \frac{1}{2}C - V \right) \quad (3.100)$$

$$\frac{3e'\dot{f}}{2e^3} - \frac{3\dot{f}'}{2e^2} = \kappa^2 B \quad (3.101)$$

となって, これを解くと係数 A, B, C とポテンシャル V が決まる。

$$A = \frac{1}{\kappa^2} \left(-\frac{e^2 f''}{f^2} + \frac{ee''}{f} + \frac{2ke^2}{f^2} - \frac{\ddot{f}}{f} + \frac{\dot{f}^2}{2f^2} + \frac{\dot{e}\dot{f}}{ef} \right) \quad (3.102)$$

$$B = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{3e'\dot{f}}{2e^3} - \frac{3\dot{f}'}{2e^2} \right) \quad (3.103)$$

$$C = \frac{1}{\kappa^2} \left(-\frac{f''}{2f} - \frac{e''}{e} - \frac{2k}{f} - \frac{\ddot{f}}{2e^2} - \frac{\dot{f}^2}{2e^2f} + \frac{\dot{e}\dot{f}}{2e^3} + \frac{3f'e'}{2fe} \right) \quad (3.104)$$

$$V = \frac{1}{\kappa^2} \left(-\frac{3f''}{4f} + \frac{3k}{f} + \frac{3\dot{f}^2}{4e^2f} - \frac{3f'e'}{4ef} + \frac{3\ddot{f}}{4e^2} - \frac{3\dot{e}\dot{f}}{4e^3} \right) \quad (3.105)$$

このように A, B, C, V を選ぶとスカラー場の方程式 (3.96), (3.97) は第3章で扱った 1 スカラー模型の場合と同様に Bianchi 恒等式になっていることがわかる。

$$\begin{aligned} -\frac{e^2}{2f} \nabla^A G_A^0 &= -\frac{f}{2e^2} A_\varphi + \frac{f}{e^2} \left(\frac{\dot{e}}{e} - \frac{2\dot{f}}{f} \right) A + B_\chi + B \left(\frac{e'}{e} + \frac{f'}{f} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} C_\varphi - V_\varphi \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \nabla^A G_A^5 &= \frac{f}{2e^2} A_\chi - \frac{f}{3^2} B_\varphi + \frac{f}{e^2} \left(\frac{\dot{e}}{e} - \frac{2\dot{f}}{f} \right) B + \frac{1}{2} C_\chi \\ &\quad + C \left(\frac{e'}{e} + \frac{f'}{f} \right) - V_\chi \end{aligned} \quad (3.107)$$

したがって A, B, C, V を (3.102)-(3.105) と選ぶとスカラー場の方程式は自動的にみたされている。よって一般の FRW 宇宙を任意の warp factor に

対して5次元に埋め込むことができた。さらに u を適切に選べば domain wall を構成することができる。domain wall 上ではスカラー場 φ が一様等方な物質や輻射などを記述しており、 w 依存性をもったスカラー場 χ が domain wall を構成する役割を担っている。

3.4 ghost が現れない模型の具体例

第 3.2.1 節で述べたようにスカラー場は一般に ghost になる。この節では前節の結果に対して具体的に $u(w, t)$ を選んで ghost が現れない模型の例を挙げる。簡単のために $k = 0$ とする。

まず、 $a(t) = a_0 t^{h_0}$ と仮定し、 $e^{u(w,t)} = U(w, t)$ とおく。(3.102)-(3.104) は

$$\kappa^2 A = -\frac{\ddot{U}}{U} + \frac{3\dot{U}^2}{2U^2} + \frac{h_0\dot{U}}{tU} + \frac{2h_0}{t^2} \quad (3.108)$$

$$\kappa^2 B = \frac{1}{L^2} \left(-\frac{3U'\dot{U}}{2U^3} + \frac{3\dot{U}'}{U^2} - \frac{3h_0U'}{tU^2} \right) \quad (3.109)$$

$$\kappa^2 C = -\frac{3U''}{2U} + \frac{3U'^2}{2U^2} + \frac{1}{L^2} \left(-\frac{\ddot{U}}{2U^2} - \frac{5h_0\dot{U}}{2tU^2} - \frac{3h_0^2 - h_0}{t^2U} \right) \quad (3.110)$$

となる。さらに $U(w, t) = W(w)T(t)$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \kappa^2 A &= -\frac{\ddot{T}}{T} + \frac{3\dot{T}^2}{2T^2} + \frac{h_0\dot{T}}{tT} + \frac{h_0}{t^2} \\ \kappa^2 B &= 0 \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\kappa^2 C = -\frac{3W''}{2W} + \frac{3W'^2}{2W^2} + \frac{1}{L^2WT^2} \left(-\frac{\ddot{T}}{2} - \frac{5h_0\dot{T}}{2t} - \frac{(3h_0^2 - h_0)T}{t^2} \right) \quad (3.112)$$

$T \propto t^\beta$ と仮定すると

$$\begin{aligned} -\frac{\ddot{T}}{2} - \frac{5h_0\dot{T}}{2t} - \frac{(3h_0^2 - h_0)T}{t^2} &\propto -\frac{1}{2}(\beta^2 - (1 - 5h_0)\beta + 6h_0^2 - 2h_0) \\ &= -\frac{1}{2}[\beta + (3h_0 - 1)](\beta + 2h_0) \end{aligned} \quad (3.113)$$

となる。したがって

$$T(t) = T_1 t^{1-3h_0} + T_2 t^{-2h_0} \quad (3.114)$$

と与えると

$$A = \frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + \frac{2h_0}{t} \right)^2 \right] > 0 \quad (3.115)$$

$$C = \frac{1}{\kappa^2} \left(-\frac{3W''}{2W} + \frac{3W'^2}{2W^2} \right) \quad (3.116)$$

より φ は ghost ではない。さらに

$$W(w) = e^{-\frac{w^2}{w_0^2}} \quad (3.117)$$

とすると

$$C = \frac{3}{\kappa^2 w_0^2} > 0 \quad (3.118)$$

となり, χ も ghost にはなっていない。 $a(t) \propto t^{h_0}$ より, これは状態方程式パラメータ

$$w = -1 + \frac{2}{3h_0} \quad (3.119)$$

である完全流体で充たされた宇宙に対応する。(3.105) よりポテンシャルは

$$V(w, t) = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{w_0^2} - \frac{8w^2}{w_0^4} - \frac{e^{w^2/w_0^2} 4h_0 \dot{T}}{L^2 t T^2} \right] \quad (3.120)$$

となる。 t と w を φ と χ で置き換えれば φ と χ を用いてポテンシャル $V(\varphi, \chi)$ を書くことができる。エネルギー密度は

$$\rho(t, w) = \frac{3}{4} \left[\frac{\dot{T}^2}{T^2} + \frac{4h_0^2}{t^2} + \frac{4L^2 T e^{-w^2/w_0^2}}{w_0^2} \left(1 - \frac{2w^2}{w_0^2} \right) \right] \quad (3.121)$$

となる。

他の例として指数関数的膨張解 $a(t) = a_0 e^{H_0 t}$ をもつ, domain wall が de Sitter 時空に対応するような場合を考える。しかし第3.2.1節で議論したように1スカラー模型でも de Sitter domain wall を構成できた。ここでは2つのスカラーを導入した再構築模型で domain wall 上で de Sitter

宇宙が実現する例をみる。(3.102)-(3.105)にしたがって A, B, C, V を計算する。

$$\kappa^2 A = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + H_0 \dot{u} + H_0^2 - \ddot{u} \quad (3.122)$$

$$\kappa^2 B = \frac{3}{2} L^{-2} e^{-u} \dot{u}' \quad (3.123)$$

$$\kappa^2 C = -\frac{3}{2} u'' - \frac{e^{-u}}{2L^2} (\dot{u}^2 + 5H_0 \dot{u} + 6H_0^2 + \ddot{u}) \quad (3.124)$$

$$\kappa^2 V = -\frac{3}{4} \left[u'' + 2u'^2 - \frac{e^{-u}}{L^2} (\dot{u} + \dot{u}^2 + 5H_0 \dot{u} + 6H_0^2) \right] \quad (3.125)$$

(3.124), (3.125) の L^{-2} に比例する項は

$$u(w, t) = -3H_0 t + \log(-\alpha(w) + e^{H_0 t}) + \beta(w) \quad (3.126)$$

とすると消える。ここで $\alpha(w)$ と $\beta(w)$ は t に依存しない任意の関数である。このとき

$$\kappa^2 A = \frac{H_0^2}{(e^{H_0 t} - \alpha)^2} \left(e^{2H_0 t} - \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (3.127)$$

$$\kappa^2 B = \frac{3}{2} L^{-2} e^{-u} \frac{H_0 \alpha' e^{H_0 t}}{(e^{H_0 t} - \alpha)^2} \quad (3.128)$$

$$\kappa^2 C = -\frac{3}{2} \frac{\alpha'' e^{H_0 t} - \alpha \alpha'' + \alpha'^2}{(e^{H_0 t} - \alpha)^2} - \frac{3}{2} \beta'' \quad (3.129)$$

$$\kappa^2 V = -\frac{3}{4} \left[\frac{\alpha'^2 - 4\alpha' \beta'}{-\alpha + e^{H_0 t}} - \alpha'' + \beta'' + \beta'^2 \right] \quad (3.130)$$

となる。さらに $\alpha = 0$, β を $\beta'' < 0$ をみたす関数とすると

$$\kappa^2 A = H_0^2 \quad (3.131)$$

$$\kappa^2 B = 0 \quad (3.132)$$

$$\kappa^2 C = -\frac{3}{2} \beta'' \quad (3.133)$$

$$\kappa^2 V = -\frac{3}{4} (\beta'' + \beta'^2) \quad (3.134)$$

となり A も C も正なので ghost は現れない。エネルギー密度は

$$\rho(w, t) = \frac{1}{2} H_0^2 - \frac{3}{2} L^2 e^u \left(\beta'' + \frac{1}{2} \beta'^2 \right) \quad (3.135)$$

となる。 $e^u \propto e^\beta$ より $|w| \rightarrow \infty$ で十分速く $\beta \rightarrow -\infty$ となれば domain wall となる。以上の2つのモデルは冪関数的膨張宇宙と指数関数的膨張宇宙に対応している。後者について、de Sitter 宇宙は1スカラーモデルでも構成したが1スカラーモデルでは ghost が現れないモデルにするためにコンパクト化が必要だったのに対し、2スカラーモデルではより簡単に ghost が現れないモデルをつくることができた。ここで挙げた2つのモデルを滑らかに接続すればインフレーション宇宙，物質が支配的な宇宙，現在の加速膨張宇宙を統一的に説明するトイモデルを作ることができる。

第4章 重力の局所化

本章では Higuchi, & Nojiri(2015)[1] に従って5次元 bulk に埋め込まれた一般の FRW domain wall 上への4次元重力子の局所化について考える。一般に domain wall 解を構成しても、重力は時空の歪みそのものであるから bulk にも広がっている。我々が domain wall 上に住んでいるとすると4次元重力子は domain wall 上に局所化されているべきである。4次元重力子は5次元重力子のゼロモードと理解でき、4次元重力子の局所化は domain wall 上でニュートンポテンシャルに従う重力が実現できることを意味する。

4.1 重力子の運動方程式

前章までの時空を背景時空とし、そのまわりの摂動を考えるために新たな計量

$$g_{AB} = g_{AB}^{(0)} + h_{AB} \quad (4.1)$$

を定義する。 $g_{AB}^{(0)}$ は前章までで扱ってきた計量である。同様に添字(0)がついた量は $g_{AB}^{(0)}$ により構成される量とする。添字の上げ下げは $g_{AB}^{(0)}, g^{(0)AB}$ で行う。

h_{AB} の 2 次まで展開する。

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g^{(0)}} \left(1 + \frac{1}{2} h_A^A + \frac{1}{8} (h_A^A)^2 - \frac{1}{4} h_{AB} h^{AB} \right) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} R = & R^{(0)} - R^{(0)AB} h_{AB} + \nabla^{(0)A} \nabla^{(0)B} h_{AB} - \nabla^{(0)2} h_A^A \\ & + \frac{3}{4} (\nabla^{(0)C} h_A^A) \nabla^{(0)B} h_{CB} + \frac{3}{4} h^{AB} \nabla_A^{(0)} \nabla_B^{(0)} h_D^D \\ & - \frac{1}{2} \nabla^{(0)A} h_{AE} \nabla_B^{(0)} h^{BE} + \frac{1}{4} h^{AB} \nabla^{(0)2} h_{AB} \\ & - \frac{1}{4} (\nabla^{(0)C} h_D^D) (\nabla_C^{(0)} h_A^A) + \frac{1}{2} R_{AB}^{(0)} h^{AD} h_D^B + \frac{1}{2} R^{(0)DACB} h_{DC} h_{AB} \\ & + \nabla^{(0)A} \left(-\frac{1}{4} h_{FB} \nabla_A h^{BF} - \frac{1}{2} h_{AF} \nabla_D^{(0)} h^{DF} + \frac{1}{4} h_{AF} \nabla^{(0)F} h_D^D \right) \\ & + \frac{1}{2} \nabla^{(0)2} (h_{AB} h^{AB}) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (4.3)$$

いま 5 次元重力子 h_{AB} のうち 4 次元重力子に相当する成分のみに興味があるから

$$h_{5A} = 0 \quad (4.4)$$

とする。これは

$$ds^2 = dw^2 + L^2 e^{u(w)} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \left(\hat{g}_{\mu\nu}^{(0)} + \hat{h}_{\mu\nu} \right) dx^\mu dx^\nu \quad (4.5)$$

として、domain wall 上での摂動のみを考えることに相当する。(4.5) において $\hat{h}_{\mu\nu}$ が我々が観測できる 4 次元重力子と解釈される。より一般的な議論をするためには摂動 h_{5A} も含めなければならない。しかしこれらの摂動は massive モードをに相当するので低エネルギー有効理論としては無視できると考えられる。4 次元部分についてゲージ固定をする。

$$\nabla^{(0)i} h_{ij} = 0 \Leftrightarrow \hat{\nabla}^{(0)i} \hat{h}_{ij} = 0 \quad (4.6)$$

$$h_i^i = 0 \Leftrightarrow \hat{h}_i^i = 0 \quad (4.7)$$

残りの項が massless のスピン 2 の成分である。

(4.1) を (3.11) に代入して h の 2 次まで書き下す。

$$\begin{aligned}
& \int d^5 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \omega(\varphi) \partial_A \varphi \partial^A \varphi - \mathcal{V}(\varphi) \right] \\
\rightarrow & \int d^5 x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left\{ R^{(0)} - \frac{1}{4} \nabla^{(0)A} h^{ij} \nabla_A^{(0)} h_{ij} + \frac{1}{2} R^{(0)ij} h_{ik} h_j^k \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} R^{(0)ikjl} h_{ij} h_{kl} - \frac{1}{4} R^{(0)} h_{ij} h^{ij} \right\} - \frac{1}{4} h_{ij} h^{ij} \left(-\frac{1}{2} \omega \partial_A \varphi \partial^A \varphi - \mathcal{V} \right) + \mathcal{O}(h^3) \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

h_{ij} に対して変分をとって h_{ij} の運動方程式は

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2\kappa^2} \left\{ \frac{1}{2} \nabla^{(0)A} \nabla_A^{(0)} h_{ij} + \frac{1}{2} \left(R_{ik}^{(0)} h_j^k + R_{jk}^{(0)} h_i^k \right) \right. \\
& \left. + R_{ikjl}^{(0)} h^{kl} - \frac{1}{2} R^{(0)} h_{ij} \right\} - \frac{1}{2} h_{ij} \left(-\frac{1}{2} \omega \partial_A \varphi \partial^A \varphi - \mathcal{V} \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。

4.2 平坦な domain wall 上での重力の局所化

まず, domain wall が平坦な場合, すなわち $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ を考える。このとき

$$\nabla^{(0)A} \nabla_A^{(0)} h_{ij} = (\partial_5^2 + e^{-u}) h_{ij} - \left(u'' + \frac{3}{2} u'^2 \right) h_{ij} \tag{4.10}$$

より (4.9) は

$$0 = (\partial_5^2 + e^{-u} \square) h_{ij} + \left(-u'' + \frac{3}{2} u'^2 \right) h_{ij} \tag{4.11}$$

となる。4次元重力子のふるまいを見るために

$$h_{ij}(w, x) = A(w) \hat{h}_{ij}(x) \tag{4.12}$$

とおく。平坦な domain wall におけるゼロモード解は $\square \hat{h}_{ij}(x) = 0$ をみたすから

$$A(w) \propto e^{u(w)} \tag{4.13}$$

とすれば方程式はみたされる。よって 4次元重力子は 5次元重力子において $h_{ij}(w, x) \propto e^{u(w)} \hat{h}_{ij}(x)$ の形で現れる。 $|w| \rightarrow \infty$ で十分速く $u \rightarrow -\infty$ となれば 4次元重力子は domain wall 上に局所化できる。

4.3 (anti-)de Sitter domain wall 上での重力の局所化

次に, domain wall が de Sitter または anti-de Sitter 時空の場合, すなわち $\hat{R}_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2}\hat{g}_{\mu\nu}$ の場合を考える。このとき (4.9) は

$$0 = (\partial_5^2 + e^{-u}\square) h_{ij} + \left(-u'' - u'^2 - \frac{2e^{-u}}{l^2}\right) h_{ij} \quad (4.14)$$

となる。ゼロモード解は $\square h_{ij} = \frac{2}{l^2}h_{ij}$ をみたすから再び $h_{ij}(w, x) \propto e^{u(w)}\hat{h}_{ij}(x)$ を得る。したがって $|w| \rightarrow \infty$ で十分速く $u \rightarrow -\infty$ となれば 4次元重力子は domain wall 上に局所化できる。

4.4 一般の FRW domain wall での重力の局所化

この節ではこの章のはじめに扱った模型における重力子の局所化を調べる。そのためにまず 1 個のスカラー場を入れて, 一般の 4次元 FRW 宇宙における重力子が従う方程式を求める。作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{\omega(\varphi)}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \mathcal{V}(\varphi) \right], \quad (4.15)$$

で与えられる。ここで $\omega(\varphi) = 1$ なら通常为正準なスカラー場による FRW 宇宙模型である。この作用ではスカラー場の運動項の係数が場に依存しているため非正準な場合も含んだ模型になっている。計量は

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \frac{a(t)^2}{1-kr^2} & & \\ & & a(t)^2 r^2 & \\ & & & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

で与えられる。Christoffel 記号, Ricci テンソル, スカラー曲率は (A.2-A.4) で与えられる。エネルギー運動量テンソルと Einstein テンソルは $\varphi = \varphi(t)$ を仮定して

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{\omega(\varphi)}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} \partial_\rho \varphi \partial^\rho \varphi + \omega(\varphi) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu}^{(0)} \mathcal{V}(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\omega(t)}{2} \dot{\varphi}^2 + \mathcal{V}(t) & & & \\ & \left(\frac{\omega(t)}{2} \dot{\varphi}^2 - \mathcal{V}(t) \right) g_{ij}^{(0)} & & \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$G_{tt} = \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2}, \quad G_{rr} = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}$$

$$G_{\theta\theta} = -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k), \quad G_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \quad (4.18)$$

とそれぞれ計算できる。したがって Friedmann 方程式は

$$\rho = \frac{3}{\kappa^2} H^2 \quad (4.19)$$

$$p = -\frac{1}{\kappa^2} (2\dot{H} + 3H^2) \quad (4.20)$$

となる。ここでスカラー場のエネルギー密度 ρ と圧力 p は

$$\rho = T_{tt} = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (4.21)$$

$$p = T_{ii}/g_{ii} = - \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (4.22)$$

である。 $\varphi(t) = t$ を仮定すると ω, \mathcal{V} は

$$\omega = -2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{V} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \quad (4.24)$$

となり、 $\varphi(t) = t$ はスカラー場の方程式

$$0 = \omega(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\omega'(\varphi)\dot{\varphi}^2 + 3\frac{\dot{a}}{a}\omega(\varphi)\dot{\varphi} + \mathcal{V}'(\varphi) \quad (4.25)$$

の解になっている。

状態方程式パラメータは

$$w = \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2a\ddot{a}}{\dot{a}^2 + k} \right) \quad (4.26)$$

と表される。したがって $\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2 + k} > 1$ のとき $w < -1$ となり phantom 宇宙となる。特に $k = 0$ の場合 Hubble パラメータ H が $\dot{H} > 0$ をみたすとき phantom 宇宙になる。これは $\omega < 0$ に対応する。一方、 $\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2 + k} < 1$ のとき $w > -1$ となるから non-phantom 宇宙になる。特に $k = 0$ の場合は \dot{H} をみたすとき non-phantom 宇宙となり、これは $\omega > 0$ に対応する。ここでスカラー場を $\omega > 0$ のとき

$$\tilde{\varphi} = \int^\varphi d\varphi \sqrt{\omega(\varphi)}, \quad (4.27)$$

$\omega < 0$ のとき

$$\tilde{\varphi} = \int^{\varphi} d\varphi \sqrt{-\omega(\varphi)} \quad (4.28)$$

と再定義する。このとき、少なくとも局所的には $\varphi = \varphi(\tilde{\varphi})$ と逆に解くことができる。作用 (4.15) は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{R}{2\kappa^2} \mp \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial^\mu \tilde{\varphi} - \tilde{\mathcal{V}}(\tilde{\varphi}) \right] \quad (4.29)$$

と書き換えることができる。ここで $\tilde{\mathcal{V}}$ は新たなスカラー場 $\tilde{\varphi}$ で書き換えたポテンシャルである。すなわち

$$\tilde{\mathcal{V}}(\tilde{\varphi}) \equiv \mathcal{V}(\varphi(\tilde{\varphi})) \quad (4.30)$$

である。作用 (4.29) の符号 \mp は、マイナスが non-phantom, プラスが phantom 宇宙に対応する。このように ω はスカラー場に吸収できるので, phantom, non-phantom 宇宙それぞれについて ω と \mathcal{V} のうち物理的な自由度は (4.29) の表式における $\tilde{\mathcal{V}}(\tilde{\varphi})$ のみである。(4.27), (4.28) の定義は不連続的である。しかし元のスカラー場 φ を用いて考えると, φ が時間発展することにより $\omega(\varphi)$ は連続的に変化し ω の符号が変わるため phantom, non-phantom 宇宙は連続的に移り変わることが可能である。一旦 ω の符号が決まれば (4.27) または (4.28) によって再定義される場 $\tilde{\varphi}$ を用いた等価な作用 (4.29) で系を考えることができる。

この背景時空まわりの摂動

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad (4.31)$$

を考え、ゲージ条件

$$h_{0\mu} = h_i^i = \nabla^{(0)i} h_{ij} = 0 \quad (4.32)$$

を課し、重力子の運動方程式 (4.9) を書き下すと

$$0 = \left(\nabla^{(0)2} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} \right) h_{ij} \quad (4.33)$$

を得る。

次に第 3.3 節で扱った 5 次元における一般の FRW domain wall での重力子の方程式を調べる。 $|w| \rightarrow \infty$ で十分速く $u \rightarrow -\infty$ となれば domain

wall 上で (4.15) の一般の FRW 宇宙が再現される。第 4.1 節での議論と同様に (4.1) で定義される重力子に (4.6),(4.7) を仮定すると h_{ij} の運動方程式は

$$\left[\partial_w^2 - u'' - u'^2 + L^{-2} e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + \dot{u}\partial_t - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} + \hat{\nabla}^2 \right) \right] h_{ij} = 0 \quad (4.34)$$

と書ける。さらに

$$h_{ij}(w, x) = e^{u(w,t)} \hat{h}_{ij}(x) \quad (4.35)$$

と仮定すると \hat{h}_{ij} が従う方程式は

$$\left(2\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} - \dot{u}\partial_t - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{k}{a^2} + \hat{\nabla}^2 \right) \hat{h}_{ij} = 0 \quad (4.36)$$

となる。これと (4.33) を比較すると \dot{u} に比例する項だけ異なることがわかる。もし u が t に依存しないなら $\dot{u} = 0$ となり (4.33) と (4.36) は一致する。そうでないならば異なるふるまいをすることになるが、 \dot{u} が十分小さければその違いは無視できる。

第5章 スピノル場の局所化

本章では Toyozato, Higuchi, & Nojiri(2016)[2] に従って一般の FRW domain wall 上へのスピノル場の局所化について述べる。第 3.3 節で求めた背景場と結合するカイラルなフェルミオンを考える。5次元の Dirac 方程式は

$$\Gamma^M \nabla_M \Psi + \tilde{f} \chi(w) \Psi = 0 \quad (5.1)$$

で与えられる。ここで、 \tilde{f} はスカラー場 $\chi(w) = w$ とフェルミオン Ψ との湯川結合定数である。共変微分 ∇_M は

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_{ABM} \Gamma^{AB} \quad (5.2)$$

$$\Gamma^{AB} = \frac{1}{2} [\Gamma^A, \Gamma^B] \quad (5.3)$$

と定義される。スピン接続 ω_{ABM} のあらわな表式は付録 A で記述する。 $\psi(x^\mu)$ を 4次元の Dirac スピノルとして $\Psi(x^M) = \xi(t, w) \psi(x^\mu)$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \Gamma^M \nabla_M \Psi + \tilde{f} \chi \Psi &= (\Gamma^\mu \partial_\mu \psi) \xi + \Gamma^5 \psi (\partial_5 \xi) + \Gamma^0 \psi (\partial_0 \xi) + \frac{1}{4} \Gamma^M \omega_{ABM} \Gamma^{AB} \Psi + \tilde{f} \chi \Psi \\ &= L^{-1} e^{-u/2} \left\{ \Gamma^{\hat{0}} \partial_0 \psi + \frac{1}{a(t)} \Gamma^{\hat{i}} \partial_i \psi \right\} \xi + \{ \partial_5 \xi + u' \xi \} \Gamma^{\hat{5}} \psi \\ &\quad + \tilde{f} \chi \xi \psi + L^{-1} e^{-u/2} \left\{ \partial_0 \xi + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \dot{u} + \frac{\dot{a}}{a} \right) \xi \right\} \Gamma^{\hat{0}} \psi \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、“ $\hat{}$ ” 付きの添字は Minkowski 時空の添字である。さらに $\tilde{C}_1(w)$, $D_1(t)$ を任意の関数として

$$\xi(t, w) = \zeta(t) \lambda(w) g(t, w) \quad (5.5)$$

$$g(t, w) = \exp \left[\tilde{C}_1(w) + D_1(t) - u(t, w) \right] \quad (5.6)$$

として $\Gamma^5\psi = \pm\psi$ と仮定すると

$$\begin{aligned}\Gamma^M\nabla_M\Psi + \tilde{f}\chi\Psi &= L^{-1}e^{-u/2} \left\{ \Gamma^{\hat{0}}\partial_0\psi + \frac{1}{a}\Gamma^{\hat{i}}\partial_i\psi \right\} \xi \\ &+ \zeta g \left\{ \partial_5\lambda + \tilde{C}_1\lambda \pm \tilde{f}\chi\lambda \right\} \psi \\ &+ L^{-1}e^{-u/2}\lambda g \left\{ \partial_0\zeta + \left(\frac{3\dot{a}}{2a} - \frac{1}{4}\dot{u} + \dot{D}_1 \right) \zeta \right\} \Gamma^{\hat{0}}\psi\end{aligned}\quad (5.7)$$

となる。warp factor を $e^{u(t,w)} = T(t)W(w)$ と変数分離し、Dirac 方程式を使うと

$$\lambda(w) = C_3 \exp \left[-\tilde{C}_1(w) \mp \tilde{f} \int dw \chi(w) \right] \quad (5.8)$$

$$\zeta(t) = C_4 a(t)^{-3/2} T(t)^{1/4} \exp[-D_1(t)] \quad (5.9)$$

を得る。したがって $\xi(t, w)$ は

$$\begin{aligned}\xi(t, w) &= C_5 a(t)^{-3/2} T(t)^{-3/4} W(w)^{-1} \exp \left[\mp \tilde{f} \int dw \chi(w) \right] \\ &= C_5 a(t)^{-3/4} T(t)^{-3/4} W(w)^{-1} \exp \left[\mp \frac{\tilde{f}}{2} w^2 \right]\end{aligned}\quad (5.10)$$

となる。最後の等号では $\chi(w) = w$ を用いた。したがって、 ψ が domain wall 上に局所化されるためには

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{3u/2} |\xi|^2 = C_5^2 a^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} dw W^{-1/2} \exp \left[\mp \tilde{f} w^2 \right] < \infty \quad (5.11)$$

が必要である。いま、第3.4節の具体例を考える。

$W(w) = e^{-w^2/w_0^2}$, $T(t) = T_1 t^{1-3h_0} + T_2 t^{-2h_0}$ の場合,

$$I = C_5^2 a^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp \left[\left(\frac{1}{2w_0^2} \mp \tilde{f} \right) w^2 \right] \quad (5.12)$$

となり、局所化されるフェルミオンのカイラリティによって条件が決まる。

$$\begin{cases} \tilde{f} > \frac{1}{2w_0^2} & \left(\Gamma^{\hat{0}}\psi = +\psi \right) \\ \tilde{f} < -\frac{1}{2w_0^2} & \left(\Gamma^{\hat{0}}\psi = -\psi \right) \end{cases} \quad (5.13)$$

$u(t, w) = -3H_0t + \log \{-\alpha(w) + \exp [H_0t]\} + \beta(w)$ の場合,

$$I \propto \int_{-\infty}^{\infty} dw \exp \left[-\frac{1}{2}\beta(w) \mp \tilde{f}w^2 \right] \quad (5.14)$$

となる。第 3.4 節より $\alpha = 0$, $\beta'' < 0$ とすると ghost は現れない。例えば, $\beta(w) = -\beta_0^2 w^2$ とすると局所化の条件

$$\begin{cases} \tilde{f} > \frac{\beta_0^2}{2} & \left(\Gamma^{\hat{0}}\psi = \psi \right) \\ \tilde{f} < -\frac{\beta_0^2}{2} & \left(\Gamma^{\hat{0}}\psi = -\psi \right) \end{cases} \quad (5.15)$$

を得る。

以上より, カイラルフェルミオンまたは反カイラルフェルミオンが FRW domain wall 上に局所化されることが示された。

第6章 ベクトル場の局所化

D-brane と domain wall の大きな違いはゲージ場の存在である。D-brane 上ではゲージ場は開弦の端点として現れる。しかし、我々が行った domain wall の構成法では、そのようなゲージ場は自然に現れない。そこで、domain wall 上のベクトル場の他の起源を考える必要がある。本章では3つの異なる方法でベクトル場の局所化を考える。第一の方法は第6.1, 6.2節で扱う Dvali-Shifman 機構とよばれる方法である。第6.3節では質量項を持った bulk のベクトル場の質量をうまく選ぶことで局所化を行う。第6.4節では5次元計量の Kaluza-Klein 次元還元を利用する。

6.1 Dvali-Shifman 機構

G. R. Dvali と M. A. Shifman はゲージ対称性を domain wall 上で破り、bulk で閉じ込めを起こすことでゲージ場の局所化を実現した [29](Dvali-Shifman 機構)。[29] では4次元 bulk での $SU(2)$ ゲージ理論を静的な domain wall 上で $U(1)$ に破ることで $U(1)$ ゲージ場の局所化を行った。

6.1.1 QCD における色荷閉じ込め

閉じ込めとは、非可換ゲージ理論に特徴的な現象で、電荷を持った場は一重項状態でしか観測できないという現象である。一般に、フレーバー数 n_f のフェルミオンを含む $SU(3)$ ゲージ理論の結合定数は1-loop レベルで

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{8\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3}n \right) \ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \quad (6.1)$$

と計算される。ここで μ はエネルギースケールである。 Λ_{QCD} は QCD スケールと呼ばれ、実験的に決まる量である。エネルギースケールが Λ_{QCD} より十分大きければ弱結合となり、 $\mu = \Lambda_{\text{QCD}}$ で結合定数は発散する。こ

れより小さいエネルギースケールでは摂動論が破綻し、非摂動的な量子効果により閉じ込めなどの現象が起こると考えられている。このような高エネルギースケール、すなわち短距離では結合定数が0に近づくことは漸近的自由性と呼ばれる [30, 31]。

6.1.2 $SU(2)$ ゲージ理論における Dvali-Shifman 機構

次のような4次元 $SU(2)$ Yang-Mills 理論を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}(D_\mu\chi^a)^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\chi^2 + \kappa^2 - v^2 + \eta^2)^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \lambda(\eta^2 - v^2)^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで $G_{\mu\nu}^a$ は $SU(2)$ ゲージ場の field strength で、 χ^a と η はスカラー場である。 χ^a は $SU(2)$ の随伴表現である。 v と κ は質量の次元を持った正のパラメータである。スケールパラメータを Λ とし、 $\lambda v^2 \ll \Lambda^2$, $\sqrt{\lambda}v^2 \gg \Lambda^2$ を課す。 λ , λ' は無次元の結合定数である。この系は変換

$$\eta \rightarrow -\eta \quad (6.3)$$

のもとで不変であるから \mathbf{Z}_2 対称性を持つ。 η は真空期待値

$$\eta = v \quad \text{or} \quad -v \quad (6.4)$$

を持つから、理論の真の真空 $\eta \sim \pm v$ では χ の自己相互作用ポテンシャルは

$$V_\chi \sim \frac{1}{2}\lambda'(\chi^2 + \kappa^2)^2 \quad (6.5)$$

となり、安定的である。したがって、そこでは $SU(2)$ ゲージ対称性のために理論は閉じ込め相にあると考えられる。閉じ込め相では全ての観測可能量は $SU(2)$ 一重項でなければならず電荷をもつ場は束縛状態となっている。 η の質量は

$$m = \sqrt{2\lambda}v \quad (6.6)$$

である。

η は domain wall 解

$$\eta_0 = v \tanh(mz) \quad (6.7)$$

を持つ。このとき domain wall は x - y 平面上にあり、厚さは m^{-1} である。domain wall から十分離れたところでは $\eta_0 = \pm v$ であるから上で述べたように $SU(2)$ ゲージ対称性は破れていない。ところが domain wall の中、 $z \sim 0$ では、 $\eta_0 \sim 0$ となり χ の自己相互作用ポテンシャルは

$$V_\chi \sim \frac{1}{2} \lambda' (\chi^2 + \kappa^2 - v^2) \quad (6.8)$$

となる。これは $\kappa^2 - v^2 < 0$ で不安定になり、 χ が tachyonic になるパラメータ領域が存在する。このことは次のように確かめられる。

背景場 $\eta_0(z)$ のまわりの摂動として $\chi^a = \delta_{3a} \chi_0 e^{-i\omega t}$ と書くと χ^a の運動方程式は

$$\{-\partial_z^2 + 2\lambda' [\kappa^2 + v^2 (\tanh^2(mz) - 1)]\} \chi_0 = \omega^2 \chi_0 \quad (6.9)$$

となる。 $\kappa = 0$ のとき、この (6.9) は一次元 Shrödinger 方程式で、 $\omega^2 < 0$ の解を持つ。連続性からこの束縛状態の解は有限の $\kappa \neq 0$ となる領域で存在する。

安定な真空 $\chi^2 = v^2 - \kappa^2$ 近傍に存在する。 χ^a の真空期待値を $\chi^3 = \langle \chi \rangle \neq 0$ とするとゲージ場は 0 でない質量項

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{ab'c'} \eta^{MN} A_M^b A_N^{b'} \chi^c \chi^{c'} \\ & = -\frac{1}{2} g^2 \langle \chi \rangle^2 \eta^{MN} (A_M^1 A_N^1 + A_M^2 A_N^2) \end{aligned} \quad (6.10)$$

を得る。3つの $SU(2)$ ゲージ場のうち2つが質量を獲得する。残った対称性は A_M^3 方向の変換に対する $U(1)$ である。したがって domain wall の中では $SU(2)$ ゲージ対称性が $U(1)$ に破れていることになり、非閉じ込め相にある。domain wall の中の $U(1)$ ゲージ場は、domain wall の外に出るためには $SU(2)$ ゲージ場の一部にならなければならないが、domain wall の外ではオーダー Λ より軽い質量の状態が存在しないため、それより高いエネルギーを要する。

6.2 一般の FRW domain wall へのゲージ場の局所化

[40] では Dvali-Shifman 機構を 5次元 bulk での $SU(5)$ ゲージ理論へと拡張した模型において標準模型のゲージ場の局所化が調べられた。Dvali-Shifman 機構の拠り所は 4次元の漸近的自由な Yang-Mills 理論における

閉じ込めの性質であるが、高次元での閉じ込めは未だよく理解されていないため、5次元の Dvali-Shifman 機構は予想にすぎない。主な問題は5次元での純粋な Yang-Mills 理論がくりこみ不可能であることである。これは格子ゲージ理論の立場では、物理的な連続極限が存在しない事に相当する。この点に関して、5次元 $SU(2)$ ゲージ理論は有限の格子間隔で一次相転移を持つことが知られている [41]。このことは5次元 $SU(5)$ でも確かめられた [40]。したがって、強結合領域では5次元 $SU(5)$ 理論でも閉じ込めが起こると期待される。我々は Dvali-Shifman 機構を5次元 bulk に埋め込まれた FRW domain wall へと拡張し、 $U(1)$ ゲージ場の局所化を調べた。[1]

第3.3節で求めた背景場まわりの摂動として $SU(2)$ ゲージ場と $SU(2)$ 随伴表現のスカラー場 η^a を導入する。作用は

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} G_{MN}^a G_{MN}^a - \frac{1}{2} (D_M \eta^a)^2 + \frac{1}{2} \lambda (\eta^2 + \kappa^2 - v^2 + v^2 \tanh^2(m\chi))^2 \right] \quad (6.11)$$

$$G_{MN}^a = \partial_M A_N^a - \partial_N A_M^a + g f^{abc} A_M^a A_N^c \quad (6.12)$$

と記述される。ここで、 g はゲージ結合定数、 f^{abc} は構造定数、 $\lambda, \kappa(\kappa^2 - v^2 < 0), v, m$ は定数である。

$|w| \rightarrow \infty$ で η のポテンシャルは $\frac{1}{2} \lambda (\eta^2 + \kappa^2)^2$ となるから $SU(2)$ は破れないが、 $w \sim 0$ ではポテンシャルが $\frac{1}{2} \lambda (\eta^2 + \kappa^2 - v^2)^2$ となり、 $\kappa^2 - v^2 < 0$ より η^a はゼロでない真空期待値

$$\eta^a = \delta_{3a} \eta_0(w) = \delta_{3a} k \cosh^{-1}(mw) \quad (6.13)$$

を持ち、 $SU(2)$ ゲージ対称性は自発的に破れる。(6.13) を η^a の運動方程式に代入すると

$$-\eta_0'' + 2\lambda(\eta^2 + \kappa^2 - v^2 + v^2 \tanh^2(m\chi))\eta_0 = 0 \quad (6.14)$$

となり、条件

$$\tanh^2(mw)(-2m^2 - 2\lambda k^2 + 2\lambda v^2) + m^2 + 2\lambda(k^2 + \kappa^2 - v^2) = 0 \quad (6.15)$$

を得る。したがって

$$k^2 = v^2 - 2\kappa^2, \quad m^2 = 2\lambda\kappa^2 \quad (6.16)$$

のとき (6.13) は解となる。このとき η^a の真空期待値は

$$\begin{pmatrix} \langle \eta^1 \rangle \\ \langle \eta^2 \rangle \\ \langle \eta^3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [(1 - \tanh^2(mw))v^2 - \kappa^2]^{1/2} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

となるからゲージ場は質量項

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}g^2 f^{abc} f^{a'b'c'} g^{MN} A_M^b A_N^{b'} \eta^c \eta^{c'} \\ &= -\frac{1}{2}g^2 g^{MN} (A_M^1 A_N^1 + A_M^2 A_N^2) [(1 - \tanh^2(mw))v^2 - \kappa^2] \\ &\equiv -\frac{1}{2}\mu(w)^2 (1 - \delta_{3a}) g^{MN} A_M^a A_N^a \end{aligned} \quad (6.18)$$

を得る。(3.87) を作用 (6.11) に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \int d^5x \left[\frac{1}{2}a(t)(G_{0i}^a)^2 + \frac{1}{2}L^2W(w)T(t)a(t)^3(G_{05}^a)^2 - \frac{1}{4}a(t)^{-1}(G_{ij}^a)^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}L^2W(w)T(t)a(t)(G_{i5}^a)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu(w)^2L^2W(w)T(t)a(t) \left[-a(t)^2 ((A_0^1)^2 + (A_0^2)^2) \right. \\ &\quad \left. \left. + ((A_i^1)^2 + (A_i^2)^2) + L^2W(w)T(t)a(t)^2 ((A_5^1)^2 + (A_5^2)^2) \right] \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

となり、したがってゲージ場の運動方程式は

$$\begin{aligned}
0 = & T(t)a(t)^3 \partial_5 [L^2 W(w)(\partial_0 A_5^a - \partial_5 A_0^a)] + a(t)(\partial_0 \partial_i A_i^a - \partial_i^2 A_0^a) \\
& + (1 - \delta_{a3})\mu(w)^2 L^2 W(w) T(t) a^3(t) A_0^a \\
& + g f^{abc} [a(t)(A_0^b \partial_i A_i^c - A_i^c \partial_0 A_i^b + 2A_i^c \partial_i A_0^b) \\
& + L^2 W(w) T(t) a(t)^3 (A_0^b \partial_5 A_5^c - A_5^c \partial_0 A_5^b + 2A_5^c \partial_5 A_0^b) \\
& + L^2 W'(w) T(t) a(t)^3 A_0^b A_5^c] \\
& + g^2 f^{abc} f^{cde} [a(t) A_i^b A_0^d A_i^e + L^2 W(w) T(t) a(t)^3 A_5^b A_0^d A_5^e] \quad (6.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & T(t)a(t) \partial_5 [L^2 W(w)(\partial_5 A_i^a - \partial_i A_5^a)] - \partial_0 [a(t)(\partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a)] \\
& - a(t)^{-1} (\partial_i \partial_j A_j^a - \partial_j^2 A_i^a) - (1 - \delta_{a3})\mu(w)^2 L^2 W(w) T(t) a(t) A_i^a \\
& - g f^{abc} [a(t)(A_i^c \partial_0 A_0^b + A_0^c \partial_i A_0^b + 2A_0^b \partial_0 A_i^c) + \dot{a}(t) A_0^b A_i^c \\
& - a(t)^{-1} (A_i^c \partial_j A_j^b + A_j^c \partial_i A_j^b + 2A_j^b \partial_j A_i^c) \\
& + L^2 W(w) T(t) a(t) (A_i^b \partial_5 A_5^c - A_5^c \partial_i A_5^b + 2A_5^c \partial_5 A_i^b) \\
& + L^2 W(w)' T(t) a(t) A_i^b A_5^c] \\
& - g^2 f^{abc} f^{cde} (a(t) A_0^b A_0^d - a(t)^{-1} A_j^b A_j^d - L^2 W(w) T(t) a(t) A_5^b A_5^d) A_i^e \quad (6.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & L^2 W(w) T(t) a(t) [\partial_i^2 A_5^a - \partial_5 \partial_i A_i^a] - L^2 W(w) \partial_0 [T(t) a(t)^3 (\partial_0 A_5^a - \partial_5 A_0^a)] \\
& - (1 - \delta_{a3})\mu(w)^2 L^4 W(w)^2 T(t)^2 a(t)^3 A_5^a \\
& - g f^{abc} [L^2 W(w) T(t) a(t)^3 (A_5^c \partial_0 A_0^b + A_0^c \partial_5 A_0^b + A_0^b \partial_0 A_5^c) \\
& + L^2 W(w) \partial_0 (T(t) a(t)^3) A_0^b A_5^c \\
& - L^2 W(w) T(t) a(t) (A_5^c \partial_i A_i^b + A_i^c \partial_5 A_i^b + A_i^b \partial_i A_5^c)] \\
& - g^2 f^{abc} f^{cde} [L^2 W(w) T(t) a(t)^3 A_0^b A_0^d + L^2 W(w) T(t) a(t) A_i^b A_i^d] A_5^e \quad (6.22)
\end{aligned}$$

と得られる。massless の $U(1)$ ゲージ場, A_M^3 を

$$A_5^3 = 0, \quad A_\mu^3 = X(w) C_\mu(x^\nu) \quad (6.23)$$

と選び,

$$(W(w) X'(w))' = 0 \quad (6.24)$$

と仮定すると $\mathcal{O}(g^0)$ で (6.20-6.22) は

$$0 = a(t)X(w)(\partial_0\partial_i C_i - \partial_i^2 C_0) \quad (6.25)$$

$$0 = \partial_0 [a(t)(\partial_0 C_i - \partial_i C_0)] + a(t)^{-1}(\partial_i\partial_j C_j - \partial_j^2 C_i) \quad (6.26)$$

$$0 = X'(w) [-T(t)a(t)\partial_i C_i + \partial_0(T(t)a(t)^3 C_0)] \quad (6.27)$$

となる。(6.26,6.27) は4次元でのベクトル場の方程式に他ならない。一方、(6.25) は Landau ゲージ $\partial^\mu A_\mu = 0$ のゲージ固定条件を一般化したものと理解される。

6.3 massive ベクトル場の局所化

先にも述べたとおりゲージ理論は共形不変性のために bulk のゲージ場を局所化することは困難である。そこで [2] では、質量を持ったベクトル場の局所化が考えられた。作用は

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} - \frac{1}{2} m(\chi)^2 A_M A^M \right], \quad (6.28)$$

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M \quad (6.29)$$

で与えられる。(3.87) を代入すると

$$\begin{aligned} S = \int d^5x \left[\frac{1}{2} L^2 W(w) T(t) a(t)^3 F_{50}^2 - \frac{1}{2} L^2 W(w) T(t) a(t) F_{5i}^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a(t) F_{0i}^2 - \frac{1}{4} a(t)^{-1} F_{ij}^2 - \frac{1}{2} m(\chi)^2 (L^4 W(w)^2 T(t)^2 a(t)^2 A_5^2 \right. \\ \left. - L^2 W(w) T(t) a(t)^3 A_0^2 + L^2 W(w) T(t) a(t) A_i^2 \right]. \quad (6.30) \end{aligned}$$

よって A_5 , A_0 , A_i の方程式は

$$\begin{aligned} 0 = L^2 W(w) \partial_0 (T(t) a(t)^3 (\partial_5 A_0 - \partial_0 A_5)) - L^2 W(w) T(t) a(t) (\partial_5 \partial_i A_i - \partial_i^2 A_5) \\ - m(\chi)^2 L^4 W(w)^2 T(t)^2 a(t)^3 A_5 \quad (6.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = -L^2 T(t) a(t)^3 \partial_5 (W(w) (\partial_5 A_0 - \partial_0 A_5)) + a(t) (\partial_0 \partial_i - \partial_i^2) A_0 \\ + m(\chi)^2 L^2 W(w) T(t) a(t)^3 A_0 \quad (6.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = L^2 T(t) a(t) \partial_5 (W(w) (\partial_5 A_i - \partial_i A_5)) - \partial_0 (a(t) (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)) \\ - a(t)^{-1} (\partial_i \partial_j A_j - \partial_j^2 A_i) - m(\chi)^2 L^2 W(w) T(t) a(t) A_i \quad (6.33) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$A_5 = 0, \quad A_\mu(w, x^\nu) = X(w)C_\mu(x^\nu) \quad (6.34)$$

と仮定し,

$$m(\chi = w)^2 = \frac{(W(w)X'(w))'}{W(w)X(w)} \quad (6.35)$$

とすると (6.31-6.33) は一般化された Landau ゲージのゲージ固定条件と 4次元ベクトル場の方程式に帰着する。

$$0 = \partial_5 X(w)(\partial_0(T(t)a(t)^3 C_0) - T(t)a(t)\partial_i C_i) \quad (6.36)$$

$$0 = \partial_0 \partial_i C_i - \partial_i^2 C_0 \quad (6.37)$$

$$0 = \partial_0(a(t)(\partial_0 C_i - \partial_i C_0)) + a(t)^{-1}(\partial_i \partial_j C_j - \partial_j^2 C_i) \quad (6.38)$$

$|w|$ を大きくしたときに十分速く $X(w)$ が小さくなるように選べば (6.35) のもとで A_μ は局所化される。

6.4 Kaluza-Klein reduction

Kaluza-Klein 理論では 5次元計量の摂動 $h_{\mu\nu}$ のゼロモードが massless 4次元重力子として現れ, $h_{5\mu}$ のゼロモードは massless 4次元ベクトル場として現れた。Randall-Sundrum 模型でも同様に massless 4次元重力子は 5次元重力子のゼロモードとして現れた。我々は 5次元計量の摂動, $h_{5\mu}$ 成分がベクトル場として domain wall に局所化されるか調べた。

再び背景時空まわりの摂動 $g_{AB} = g_{AB}^{(0)} + h_{AB}$ を考え, ゲージ固定条件

$$\nabla_A^{(0)} h^{AB} = 0 \quad (6.39)$$

を課し, 作用を h_{AB} の 2次まで展開すると

$$\int d^5x \sqrt{-g^{(0)}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(R^{(0)} + \frac{1}{4} h^{AB} \nabla^{(0)2} h_{AB} - \frac{1}{4} R^{(0)} h_{AB} h^{AB} + \frac{1}{2} R_{AB}^{(0)} h^A D h_D^B + \frac{1}{2} R^{(0)ACBD} h_{AB} h_{CD} \right) - \frac{1}{4} h_{AB} h^{AB} \mathcal{L}_m \right] \quad (6.40)$$

となる。運動方程式は

$$0 = \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{2} \nabla^{(0)2} h^{AB} - \frac{1}{2} R^{(0)} h^{AB} + \frac{1}{2} R^{(0)AC} h_C^B + \frac{1}{2} R^{(0)BC} h_C^A + R^{(0)ACBD} h_{CD} \right) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m h^{AB}, \quad (6.41)$$

となる。 $h_{\mu\nu}$, h_{55} 成分を無視して $h_{5\mu}$ 成分に注目する。

$$0 = \frac{1}{2\kappa^2} \left(\nabla^{(0)2} h^{5\mu} - R^{(0)} h^{5\mu} + R^{(0)55} h_5^\mu + R^{(0)\mu\nu} h_\nu^5 - 2R^{(0)\mu 5\nu 5} h_{5\nu} \right) - \mathcal{L}_m h^{5\mu} \quad (6.42)$$

6.4.1 平坦な domain wall

再び domain wall が平坦な場合, $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ を考える。このとき (6.42) は

$$\left[\frac{1}{2\kappa^2} (L^{-2} e^{-u} \partial_\nu \partial^\nu + \partial_5^2 + u' \partial_5 + 2u'' + u'^2) - \mathcal{L}_m \right] h_{5\mu} = 0 \quad (6.43)$$

となる。ここで

$$h_{5\mu}(x^\nu, w) = N(w) A_\mu(x^\nu) \quad (6.44)$$

と仮定して A_μ を 4次元ゲージ場とみなす。物質場を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -\frac{1}{2} \omega(w) \partial_A \varphi \partial^A \varphi - \mathcal{V}(\varphi) \\ &= \frac{3}{2} u'' + \frac{3}{2} u'^2 \end{aligned} \quad (6.45)$$

と仮定すると A_μ は

$$(L^{-2} N e^{-u} \partial_\nu \partial^\nu + N'' + N' u' - N u'' - 2N u'^2) A_\mu = 0 \quad (6.46)$$

に従う。これは

$$N \propto e^u \quad (6.47)$$

とすると 4次元の電磁場の方程式に一致する。

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu = 0 \quad (6.48)$$

したがって $|w| \rightarrow \infty$ で十分速く $u(w) \rightarrow -\infty$ となるような $u(w)$ を選べば (6.48) に従うベクトル場が $w \sim 0$ に局所化される。実際, Randall-Sundrum 型

$$u(w) = -2\sqrt{w^2 + w_0^2} \quad (6.49)$$

の場合

$$N \propto e^{-2\sqrt{w^2 + w_0^2}} \rightarrow e^{-2|w|} \quad (w_0 \rightarrow 0) \quad (6.50)$$

となり, 局所化されることがわかる。

6.4.2 一般のFRW domain wallでのゲージ場の局所化

次にFRW domain wall上でのゲージ場の局所化を扱う。計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = L^2 e^{u(w,t)} \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dw^2 \quad (6.51)$$

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a(t)^2, a(t)^2, a(t)^2) \quad (6.52)$$

このとき、運動方程式は

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2\kappa^2} \left\{ (\partial_5^2 + 2u'' + u' \partial_5 + u'^2) h_{5\mu} \right. \\ & + L^{-2} e^{-u} \left[\left(\hat{\nabla}^2 - 2\ddot{u} - \frac{4\dot{a}\dot{u}}{a} - \frac{\dot{u}^2}{2} - \frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{6\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{5\mu} \right. \\ & \left. \left. + \left(\left(\ddot{u} + \frac{\dot{u}\dot{a}}{a} \right) h_{50} - \dot{u} \hat{g}^{\alpha\gamma} \partial_\alpha h_{5\gamma} \right) \delta_\mu^0 - \dot{u} \partial_\mu h_{50} \right] \right\} - \mathcal{L}_m h_{5\mu} \quad (6.53) \end{aligned}$$

と書ける。物質場(3.88)を仮定して結果(3.102-3.105)を用いると

$$\kappa^2 \mathcal{L}_m = \frac{3}{2} (u'' + u'^2) - L^{-2} e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{\dot{u}^2}{4} + \frac{2\dot{u}\dot{a}}{a} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (6.54)$$

を得る。再びゲージ固定条件 $\nabla^A h_{A5}$ を使うと(6.53)は

$$\begin{aligned} 0 = & \left[(\partial_5^2 + u' \partial_5 - u'' - 2u'^2) + L^{-2} e^{-u} \left(\hat{\nabla}^2 - \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{4\dot{a}^2}{a^2} \right) \right] h_{5\mu} \\ & + L^{-2} e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{\dot{u}^2}{a} + \frac{4\dot{u}\dot{a}}{a} \right) h_{50} \delta_\mu^0 - L^{-2} e^{-u} \dot{u} \partial_\mu h_{50} \quad (6.55) \end{aligned}$$

となる。さらに $h_{5\mu}(x^\nu, w) = N(w) A_\mu(x^\nu)$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 = & (N'' + N'u' - Nu'' - 2Nu'^2) A_\mu \\ & + L^{-2} N e^{-u} \left[\left(\hat{\nabla}^2 - \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{4\dot{a}^2}{a^2} \right) A_\mu + \left(\ddot{u} + \frac{\dot{u}^2}{4} + \frac{4\dot{u}\dot{a}}{a} \right) A_0 \delta_\mu^0 - \dot{u} \partial_\mu A_0 \right] \\ = & (N'' + N'u' - Nu'' - 2Nu'^2) A_\mu \\ & + L^{-2} N e^{-u} \left[\left(\hat{\nabla}^2 - \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{4\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} \right) A_\mu + \left(\ddot{u} + \frac{\dot{u}^2}{4} + \frac{5\dot{u}\dot{a}}{a} \right) A_0 \delta_\mu^0 - \dot{u} \hat{\nabla}_\mu A_0 \right] \quad (6.56) \end{aligned}$$

を得る。ここで $e^{u(w,t)} = e^{u_t(t)+u_w(w)} = W(w)T(t)$ とすると (6.56) は

$$0 = \left(\hat{\nabla}^2 - \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{4\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{u}_t}{a} \right) A_\mu + \left(\ddot{u}_t + \frac{\dot{u}_t^2}{4} + \frac{5\dot{u}_t\dot{a}}{a} \right) A_0\delta_\mu^0 - \dot{u}_t\hat{\nabla}_\mu A_0 \quad (6.57)$$

となる。一方、4次元FRW時空でのゲージ場は次式に従う。

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\nabla}^2 A_\mu - \hat{\nabla}_\nu \hat{\nabla}_\mu A^\nu \\ &= \hat{\nabla}^2 A_\mu - \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu A^\nu - \hat{R}^\nu{}_{\lambda\nu\mu} A^\lambda \\ &= \hat{\nabla}^2 A_\mu - \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu A^\nu - \hat{R}_{\lambda\mu} A^\lambda \\ &= \hat{\nabla}^2 A_\mu - \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu A^\nu - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) A_\mu - \left(\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) A_0\delta_\mu^0 \quad (6.58) \end{aligned}$$

(6.57) と (6.58) を比較すると、ゲージ固定条件 $\hat{\nabla}_\mu A^\mu = 0$ を用いたとしても、(6.57) にはいくらかの補正が加わることがわかる。この補正項は第4.4節の結果と同様に a や u の時間微分として現れるため、これらが時間的に十分ゆるやかに変化するならば無視できて、 A_μ は domain wall 上に局所化される。

第7章 まとめ

本論文では domain wall 宇宙模型を構成し、domain wall 上への場の局所化について考察してきた。domain wall は高次元時空上のスカラー場のダイナミクスにより構成される。domain wall 宇宙模型では標準模型の粒子と4次元重力子が domain wall 上に局所化する必要がある。本論文では主題としてベクトル場の局所化を扱った。

第3章では FRW domain wall 模型を構築するために再構築と呼ばれる方法を用いた。この構成法により、任意の warp factor と scale factor が方程式をみたすような模型を作ることができた。この warp factor と scale factor を適切に選ぶことで FRW domain wall が5次元に埋め込まれた模型を構築した。再構築による構成法では一般にスカラー場が ghost となるが、第3.4節では scale factor と warp factor をうまく選んでスカラー場が ghost にならないような、膨張する domain wall 解が存在することを示した。

第4章では、domain wall が平坦、(anti-)de Sitter、一般の FRW それぞれの場合について重力の局所化を調べた。5次元重力子のうち4次元重力子成分が従う方程式と、4次元重力理論から導出される重力子の方程式とを比較した。平坦な場合、(anti-)de Sitter の場合については4次元重力子成分の方程式が4次元理論のものと一致し、局所化された。一方、一般の FRW 時空の場合は4次元重力子成分が従う方程式に warp factor の時間微分に比例する補正項が現れた。この補正は warp factor が時間に対して十分ゆっくりと変化する場合は無視できるため、4次元重力子は局所化される。

第5章では、一般の FRW domain wall 上へのフェルミオンの局所化を調べた。5次元の Dirac 方程式を満たし、domain wall 上に局所化される解が4次元の Dirac 方程式に従うか調べた。その結果、カイラルまたは反カイラルなフェルミオンが局所化されることがわかった。

第6章では、domain wall が平坦、一般の FRW それぞれの場合についてベクトル場の局所化を3つの方法で調べた。Dvali-Shifman 機構を用いた

方法では bulk の $SU(2)$ ゲージ対称性を domain wall 上で $U(1)$ に破ることで局所化を実現した。 $SU(2)$ ゲージ場の 3 自由度のうち 2 自由度は自発的対称性の破れにより質量を獲得した。残った $U(1)$ ゲージ場は domain wall 上に局所化され、これは光子と理解できる。Dvali-Shifman 機構は bulk での $SU(2)$ Yang-Mills 理論が閉じ込め相にあることが要求されるが、強結合領域では閉じ込めが起こることが期待できる。2 つ目の方法は [2] に基いて bulk の massive なベクトル場の一部を 4 次元で massless ベクトル場として局所化した。3 つ目の方法は Kaluza-Klein の dimensional reduction により 5 次元重力子の一部を 4 次元ベクトル場として domain wall 上に局所化できるかを調べた。その結果、domain wall が平坦な場合 (Randall-Sundrum 型) の場合は局所化できるが、domain wall が一般の FRW 時空の場合は、局所化した 4 次元ベクトル場の方程式に補正項が現れることが分かった。この補正項は warp factor と scale factor の時間微分に比例して現れる。したがって、これらの量が十分ゆるやかに変化するならば無視できる。このとき domain wall 上に局所化されたベクトル場は 4 次元の FRW 時空上での振る舞いに一致する。

謝辞

本研究を遂行するにあたり，指導教員の野尻伸一教授には熱心なご指導を賜りました。ここに深く感謝致します。また，研究を通じて多くの議論にお付き合い頂いた豊里友太氏に深く感謝致します。

関連図書

- [1] M. Higuchi and S. Nojiri, “Reconstruction of Domain Wall Universe and Localization of Gravity,” *Gen. Rel. Grav.* **46** no. 11, (2014) 1822, [arXiv:1402.1346](#) [hep-th].
- [2] Y. Toyozato, M. Higuchi, and S. Nojiri, “Dynamical Domain Wall and Localization,” *Phys. Lett.* **B754** (2016) 139–143, [arXiv:1510.01099](#) [hep-th].
- [3] T. Kaluza, “On the Problem of Unity in Physics,” *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)* **1921** (1921) 966–972.
- [4] O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English),” *Z.Phys.* **37** (1926) 895–906.
- [5] J. Dai, R. G. Leigh, and J. Polchinski, “New Connections Between String Theories,” *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 2073–2083.
- [6] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 3370–3373, [arXiv:hep-ph/9905221](#) [hep-ph].
- [7] T. W. B. Kibble, “Topology of Cosmic Domains and Strings,” *J. Phys.* **A9** (1976) 1387–1398.
- [8] J. Polchinski, “Tasi lectures on D-branes,” in *Fields, strings and duality. Proceedings, Summer School, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI’96, Boulder, USA, June 2-28, 1996*, pp. 293–356. 1996. [arXiv:hep-th/9611050](#) [hep-th].
https://inspirehep.net/record/425724/files/arXiv:hep-th_9611050.pdf.

- [9] K. Bamba, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, “Domain wall solution in $F(R)$ gravity and variation of the fine structure constant,” *Phys.Rev.* **D85** (2012) 044012, [arXiv:1107.2538 \[hep-th\]](#).
- [10] C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood, and Y. Shirman, “Universal aspects of gravity localized on thick branes,” *Nucl.Phys.* **B581** (2000) 309–338, [arXiv:hep-th/0001033 \[hep-th\]](#).
- [11] H. Nicolai and C. Wetterich, “On the Spectrum of Kaluza-Klein Theories With Noncompact Internal Spaces,” *Phys.Lett.* **B150** (1985) 347.
- [12] B. Zwiebach, *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2006. <http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521831431>.
- [13] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, “Supergravity,”.
- [14] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,” *Phys.Lett.* **B429** (1998) 263–272, [arXiv:hep-ph/9803315 \[hep-ph\]](#).
- [16] P. D. Mannheim, *Brane-localized gravity*. 2005. <http://www.worldscibooks.com/physics/5975.html>.
- [17] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [18] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [19] L. Randall and R. Sundrum, “An Alternative to compactification,” *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 4690–4693, [arXiv:hep-th/9906064 \[hep-th\]](#).
- [20] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, “4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space,” *Phys.Lett.* **B485** (2000) 208–214, [arXiv:hep-th/0005016 \[hep-th\]](#).

- [21] B. J. Harrington and A. Yildiz, “Restoration of Dynamically Broken Symmetries at Finite Temperature,” *Phys. Rev.* **D11** (1975) 779.
- [22] L. Jacobs, “Critical Behavior in a Class of $O(n)$ Invariant Field Theories in Two-Dimensions,” *Phys. Rev.* **D10** (1974) 3956.
- [23] Y. Toyozato, K. Bamba, and S. Nojiri, “Scalar Domain Wall as the Universe,” *Phys.Rev.* **D87** no. 6, (2013) 063008, [arXiv:1202.5375 \[hep-th\]](#).
- [24] V. Rubakov and M. Shaposhnikov, “Do We Live Inside a Domain Wall?,” *Phys.Lett.* **B125** (1983) 136–138.
- [25] O. DeWolfe, D. Freedman, S. Gubser, and A. Karch, “Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity,” *Phys.Rev.* **D62** (2000) 046008, [arXiv:hep-th/9909134 \[hep-th\]](#).
- [26] A. Kehagias and K. Tamvakis, “Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce,” *Phys.Lett.* **B504** (2001) 38–46, [arXiv:hep-th/0010112 \[hep-th\]](#).
- [27] H. Davoudiasl, J. Hewett, and T. Rizzo, “Bulk gauge fields in the Randall-Sundrum model,” *Phys.Lett.* **B473** (2000) 43–49, [arXiv:hep-ph/9911262 \[hep-ph\]](#).
- [28] A. Pomarol, “Gauge bosons in a five-dimensional theory with localized gravity,” *Phys.Lett.* **B486** (2000) 153–157, [arXiv:hep-ph/9911294 \[hep-ph\]](#).
- [29] G. R. Dvali and M. A. Shifman, “Domain walls in strongly coupled theories,” *Phys. Lett.* **B396** (1997) 64–69, [arXiv:hep-th/9612128 \[hep-th\]](#). [Erratum: *Phys. Lett.*B407,452(1997)].
- [30] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346–1349.
- [31] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343–1346.

- [32] G. Dvali and M. A. Shifman, “Dynamical compactification as a mechanism of spontaneous supersymmetry breaking,” *Nucl.Phys.* **B504** (1997) 127–146, [arXiv:hep-th/9611213](#) [hep-th].
- [33] C. Deffayet, “Cosmology on a brane in Minkowski bulk,” *Phys. Lett.* **B502** (2001) 199–208, [arXiv:hep-th/0010186](#) [hep-th].
- [34] C. Deffayet, G. R. Dvali, and G. Gabadadze, “Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions,” *Phys. Rev.* **D65** (2002) 044023, [arXiv:astro-ph/0105068](#) [astro-ph].
- [35] A. T. Barnaveli and O. V. Kancheli, “The Gauge fields on the soliton membrane. (In Russian),” *Sov. J. Nucl. Phys.* **52** (1990) 576–580. [*Yad. Fiz.*52,905(1990)].
- [36] N. Arkani-Hamed and M. Schmaltz, “Field theoretic branes and tachyons of the QCD string,” *Phys. Lett.* **B450** (1999) 92–98, [arXiv:hep-th/9812010](#) [hep-th].
- [37] K. G. Wilson, “Confinement of Quarks,” *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445–2459. [,45(1974)].
- [38] H. J. Rothe, “Lattice gauge theories: An Introduction,” *World Sci. Lect. Notes Phys.* **43** (1992) 1–381. [World Sci. Lect. Notes Phys.82,1(2012)].
- [39] S. Mandelstam, “Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rept.* **23** (1976) 245–249.
- [40] R. Davies, D. P. George, and R. R. Volkas, “The Standard model on a domain-wall brane,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 124038, [arXiv:0705.1584](#) [hep-ph].
- [41] M. Creutz, “Confinement and the Critical Dimensionality of Space-Time,” *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 553–556. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*43,890(1979)].
- [42] P. Dimopoulos, K. Farakos, A. Kehagias, and G. Koutsoumbas, “Lattice evidence for gauge field localization on a brane,”

Nucl.Phys. **B617** (2001) 237–252, [arXiv:hep-th/0007079](#)
[hep-th].

- [43] H. Georgi, “Lie algebras in particle physics,”.
- [44] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,”.
- [45] K. Akama, “An Early Proposal of ‘Brane World’,” *Lect.Notes Phys.* **176** (1982) 267–271, [arXiv:hep-th/0001113](#) [hep-th].
- [46] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, “New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV,” *Phys.Lett.* **B436** (1998) 257–263, [arXiv:hep-ph/9804398](#) [hep-ph].
- [47] N. Kaloper and A. D. Linde, “Inflation and large internal dimensions,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 101303, [arXiv:hep-th/9811141](#) [hep-th].
- [48] R. M. Wald, “General Relativity,”.

付録 A 幾何学的な量

計量が

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \frac{a(t)^2}{1-kr^2} & & \\ & & a(t)^2 r^2 & \\ & & & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

で与えられる 4次元時空の Christoffel 記号, Ricci テンソル, スカラー曲率は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{tr}^r &= \hat{\Gamma}_{t\theta}^\theta = \hat{\Gamma}_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}, & \hat{\Gamma}_{rr}^t &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, & \hat{\Gamma}_{rr}^r &= \frac{kr}{1-kr^2}, \\ \hat{\Gamma}_{r\theta}^\theta &= \hat{\Gamma}_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, & \hat{\Gamma}_{\theta\theta}^t &= r^2 a\dot{a}, & \hat{\Gamma}_{\theta\theta}^r &= -r(1-kr^2), \\ \hat{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, & \hat{\Gamma}_{\phi\phi}^t &= r^2 a\dot{a} \sin^2\theta, \\ \hat{\Gamma}_{\phi\phi}^r &= -r(1-kr^2) \sin^2\theta, & \hat{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta &= -\cos\theta \sin\theta \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{tt} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}, & \hat{R}_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \\ \hat{R}_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ \hat{R}_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{R} = \frac{6(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)}{a^2} \quad (\text{A.4})$$

計量が

$$\begin{aligned} ds^2 &= dw^2 + f(w, t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right] - \frac{e(w, t)^2}{f(w, t)} dt^2 \\ &= e^{\ln f(w, t)} \gamma_{mn}(x) dx^m dx^n + h_{\alpha\beta}(w) dx^\alpha dx^\beta \\ &(m, n = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 0, 5) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

で与えられるとき, Christoffel 記号は

$$\Gamma_{ab}^m = \hat{\Gamma}_{ab}^m(\gamma), \quad \Gamma_{n\alpha}^m = \frac{1}{2}\delta_n^m \frac{\partial_\alpha f}{f}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(h), \quad \Gamma_{mn}^\alpha = -\frac{1}{2}\gamma_{mn} h^{\alpha\beta} \partial_\beta f, \quad (\text{A.6})$$

Riemann テンソルは

$$\hat{R}^a{}_{bcd} = {}^{(3)}R^a{}_{bcd} - \frac{1}{4}(\delta_c^a \gamma_{db} - \delta_d^a \gamma_{cb}) \left(f'^2 - \frac{\dot{f}^2}{e^2} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$R^a{}_{\gamma b\delta} = -\frac{1}{2}\delta_b^a \nabla^{(h)} \nabla_\gamma^{(h)} \ln f - \frac{1}{4}\delta_b^a \nabla_\gamma^{(h)} \ln f \nabla_\delta^{(h)} \ln f \quad (\text{A.8})$$

$$R^\alpha{}_{bc\delta} = \frac{1}{2}\nabla_\delta^{(h)} \left(h^{\alpha\beta} \nabla_\beta^{(h)} f \right) - \frac{1}{4}g_{cb} \nabla^{(h)\alpha} \ln f \nabla_\delta^{(h)} \ln f \quad (\text{A.9})$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = {}^{(2)}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \quad (\text{A.10})$$

となる。したがって Einstein テンソルは

$$G^t{}_t = \frac{3f''}{2f} - \frac{3k}{f} - \frac{3\dot{f}^2}{4e^2 f} \quad (\text{A.11})$$

$$G^r{}_r = G^\theta{}_\theta = G^\phi{}_\phi = \frac{f''}{2f} + \frac{e''}{e} - \frac{k}{f} - \frac{\dot{f}}{e^2} - \frac{\dot{f}^2}{4e^2 f} + \frac{\dot{e}\dot{f}}{e^3} \quad (\text{A.12})$$

$$G^w{}_w = \frac{3f'e'}{2fe} - \frac{3k}{f} - \frac{3\ddot{f}}{2e^2} - \frac{3\dot{f}^2}{4e^2 f} + \frac{\dot{e}\dot{f}}{2e^3} \quad (\text{A.13})$$

$$G^w{}_t = \frac{3e'\dot{f}}{2e^3} - \frac{3\dot{f}'}{2e^2} \quad (\text{A.14})$$

と計算できる。 $a(t)$, $u(w, t)$ を用いると Christoffel 記号は

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}\dot{u}, \quad \Gamma_{ij}^t = L^{-2}e^{-u} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2}\dot{u} \right) g_{ij}, \quad \Gamma_{jt}^i = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{u}}{2} \right) \delta_j^i$$

$$\Gamma_{tt}^w = \frac{1}{2}L^2 e^u u', \quad \Gamma_{ij}^w = -\frac{1}{2}u' g_{ij}, \quad \Gamma_{\nu w}^\mu = \frac{u'}{2} \delta_\nu^\mu, \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma_{jk}^i = \hat{\Gamma}_{jk}^i, \quad (\text{A.16})$$

Ricci テンソルは

$$R_{tt} = \left[-\frac{1}{2}u'' - u'^2 + \frac{3}{2}L^{-2}e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \right) \right] g_{tt} \quad (\text{A.17})$$

$$R_{ij} = \left[-\frac{1}{2}u'' - u'^2 + \frac{1}{2}L^{-2}e^{-u} \left(\ddot{u} + 5\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \dot{u}^2 + 4\frac{k}{a^2} \right) \right] g_{ij} \quad (\text{A.18})$$

$$R_{ww} = -2u'' - u'^2 \quad (\text{A.19})$$

$$R_{tw} = -\frac{3}{2}\dot{u}', \quad (\text{A.20})$$

スカラー曲率は

$$R = -4u'' - 5u'^2 + 3L^{-2}e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 + 3\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right), \quad (\text{A.21})$$

Einstein テンソルは

$$G_{tt} = g_{tt} \left[\frac{3}{2}(u'' + u'^2) - 3L^{-2}e^{-u} \left(\frac{1}{4}\dot{u}^2 + \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

$$G_{ij} = g_{ij} \left[\frac{3}{2}(u'' + u'^2) - L^{-2}e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{1}{4}\dot{u}^2 + 2\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

$$G_{ww} = \frac{3}{2}u'^2 - \frac{3}{2}L^{-2}e^{-u} \left(\ddot{u} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 + 3\frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$G_{wt} = -\frac{3}{2}\dot{u}' \quad (\text{A.25})$$

となる。

vierbien $e^{\hat{A}}$ を

$$g_{MN} = e^{\hat{A}}_M \eta_{\hat{A}\hat{B}} e^{\hat{B}}_N \quad (\text{A.26})$$

と定義する。計量が (A.5) で与えられるとき $e^{\hat{A}}_M$ の成分は行列形式で

$$e^{\hat{A}}_M = \begin{pmatrix} Le^{u/2} & & & \\ & Le^{u/2}a & & \\ & & Le^{u/2}a & \\ & & & Le^{u/2}a \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

と書ける。 $e_{\hat{A}M}$, $e_{\hat{A}}^M$ は

$$e_{\hat{A}M} = \eta_{\hat{A}\hat{B}} e_{\hat{B}}^M$$

$$= \begin{pmatrix} -L^{-1}e^{-u/2} & & & & \\ & L^{-1}e^{-u/2}a^{-1} & & & \\ & & L^{-1}e^{-u/2}a^{-1} & & \\ & & & L^{-1}e^{-u/2}a^{-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

(A.28)

$$e_{\hat{A}}^M = e_{\hat{A}N} g^{MN}$$

$$= \begin{pmatrix} L^{-1}e^{-u/2} & & & & \\ & L^{-1}e^{-u/2}a^{-1} & & & \\ & & L^{-1}e^{-u/2}a^{-1} & & \\ & & & L^{-1}e^{-u/2}a^{-1} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(A.29)

と定義される。一般にスピン接続は次式で定義される。

$$\omega_{ABM} = -\frac{1}{2} (\Omega_{ABM} - \Omega_{BMA} - \Omega_{MAB}) = -\omega_{BAM} \quad (\text{A.30})$$

ここで, Ω_{ABM} は

$$\Omega_{ABM} = (\partial_A e_{\hat{B}}^{\hat{C}} - \partial_B e_{\hat{A}}^{\hat{C}}) e_{\hat{C}M} = -\Omega_{BAM} \quad (\text{A.31})$$

である。非ゼロ成分は

$$\begin{aligned} \omega_{050} &= -\omega_{500} = -\frac{1}{2} u' L^2 e^u \\ \omega_{0ij} &= -\omega_{i0j} = -\left(\frac{1}{2} \dot{u} a^2 + \dot{a} a\right) L^2 e^u \delta_{ij} \\ \omega_{5ij} &= -\omega_{i5j} = -\frac{1}{2} u' L^2 e^u a^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

となる。