Bulletin of the Faculty of Education,
Nagoya University (*Educational Psychology*)
1990, Vol. 37, 181−189.

データの分類とファジィ演算

潘　　益　　平[1)]

1．はじめに

研究対象，または実験単位を分類する場合に用いられる統計的方法には，大きく分けると二つの方法がある。一つは分類があらかじめ設定された群に基づいて行われる方法である。例えば，判別分析がこれにあたる。もう一つは分類がデータから決定される群に基づいて行われる方法である。例えば，クラスター分析がこれにあたる。

クラスター分析に関しては，さらに階層クラスター分析と非階層クラスター分析がある。階層クラスター分析について，Johnson（1967）は超距離不等式（ultra-metric inequality すなわち，x，y，zを三つの単位とすれば，$d(x, z) \leqq \max(d(x, y), d(y, z))$ が成立する）を導入して研究を行った。一般に対象間の距離が超距離不等式を満たせば，これらの対象は階層クラスター化が可能である。逆に，階層クラスターになっている対象間の距離は必ず超距離不等式を満たす。しかし，実際のデータから得た対象間の距離は一般的に超距離不等式を満たすとは限らないし，また満たさなければならないというわけではない。そこで，Johnson はデータから与えられた対象間の距離に基づいて各対象間の距離を超距離不等式を満たすように変換するという手順を繰り返しながら，データを階層クラスター化する方法として，最小距離法（minimum method）と最大距離法（maximum method）を提案した。

しかし，このような方法を用いるためには，最初から対象間の距離が定義されなければならず，対象間の類似性などについて順序情報しか得られない場合には適用できない。また，得られたデータの誤差が結果に与える影響も大きいのではないかと思われる。

本論文はこのような欠点を改善するために，ファジィ理論の中のファジィ演算を用いて，最初の対象間の距離は定義されずに順序情報しかない場合で，対象間の順序を距離に変換させ，その距離を超距離不等式を満たすような変換する方法，即ちファジィ分類について論じる。この方法はデータの順序性しか用いないということが大きな利点である。まず，ファジィ分類を論じた上で，次に二つの例を通して，この方法の有効性を示す。

1）名古屋大学大学院博士課程（後期課程）

2．ファジィ演算について

ファジィ分類を論議する前に，本論文で必要となるファジィ理論の簡単な概念について説明しておく。

2．1 ファジィ集合及びファジィ関係

普通の集合Aについては，ある要素がその集合に属するか，属しないかは確実にわかる。例えば，aはAに確実に属するが，非a——b，cなどは確実に属しない。確率の言葉でいえばaはAに属する確率は1であり，非aはAに属する確率は0である。しかし，現実では普通の集合のようにものを表わすばかりではなく，多いのは集合の要素がある確率またはある程度でその集合に属することである。例えば，若い人という集合については，年齢が20才，25才，30才，40才などの人は皆確実に若いといえるであろうか。そこで集合の要素がその集合に属する程度を表わすために，ある関数が要素に対してつけられる。このような集合はファジィ集合という。

定義1：集合Xのファジィ集合AというのはXの要素xは

関数 $\mu : x \longrightarrow [0,1]$ につけられるものである。AをXのファジィ集合と呼び，μをファジィ集合のメンバシップ関数と呼ぶ。

定義2：集合XからYへのファジィ関係Rとは直積 $X * Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ におけるファジィ集合であり，

$$\mu_R : X * Y \longrightarrow [0,1]$$

なるメンバシップ関数によって特性付けられたものである。

もし$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ が有限集合であれば，$X * Y$ におけるファジィ関

係Rは次のようなn＊mのファジィ行列によって表わすことができる。

$$R=\begin{bmatrix}\mu_R(x_1,y_1)&\cdots\cdots&\mu_R(x_1,y_m)\\ \vdots&&\vdots\\ \vdots&&\vdots\\ \mu_R(x_n,y_1)&\cdots\cdots&\mu_R(x_n,y_m)\end{bmatrix}$$

この行列をファジィ行列という。つまり，メンバシップ関数は行列で表記することができる。もしX＝Yなら，X上のファジィ関係を得て，Rはn＊nのファジィ行列である。

実際のデータ分類では有限個のデータしか用いられないので説明の便宜のために本論文ではファジィ集合が有限集合と設定するが，数学的に議論を展開するためには有限集合に限定する必要はない。また，誤解のない限り，ファジィ関係とファジィ行列と同じ意味として用いる。

2．2 ファジイ関係の合成

ファジィ関係の合成，つまり，ファジィ行列間の演算がどう行われているかを説明するために次のような定義を定める。定義3はファジィ行列間のかけ算を定義し，定義4はファジィ集合間の大小関係を定義する。

定義3：$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$

$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$。もしRをX＊Yにおける，そしてSをY＊Zにおけるファジィ関係とするなら，RとSの合成R・SはX＊Zに於けるファジィ関係で，その要素は

$$R\cdot S \ \longleftrightarrow\ \mu_{R\cdot S}(x_i,z_j)$$
$$=\max_{k=1,2,\cdots,n}\min\{\mu_R(x_i,y_k),\ \mu_S(y_k,z_j)\}$$

で定義する。

定義4：もしR及びSがともにX上のファジィ関係であるならば，$R\subset S$ は $\mu_R(x_i,x_j)\leqq\mu_S(x_i,x_j)$ $(\forall(x_i,x_j)\in X*X)$ と定義される。つまり，行列Rの成分は行列Sの対応する成分より大きくないということを意味している。

2．3 ファジィ類似関係

Xにおけるファジィ関係Rが次の3つの条件を満たすならば，Rはとくにファジィ類似関係と呼ばれる。

1. 反射性：$\mu_R(x_i,x_i)=1$； $i=1,\cdots,n$
2. 対称性：$\mu_R(x_i,x_j)=\mu_R(x_j,x_i)$； $i,j=1,\cdots,n$
3. 推移性：$\max_{k=1,\cdots,n}\min\{\mu_R(x_i,x_k),\ \mu_R(x_k,x_j)\}\leqq\mu_R(x_i,x_j)$； $i,j=1,\cdots,n$

ファジィ関係とファジィ行列とは同じであるので，ファジィ類似関係はファジィ類似行列で表わすことができる。つまり

Xにおけるファジィ行列Rが次の3つの条件を満たすならば，Rはとくにファジィ類似行列と呼ばれる。

1. 反射性：diag $R=I$
2. 対称性：$R=R^t$
3. 推移性：$R\cdot R\subseteq R$

本論文で論じているファジィ分類は主にこのファジィ類似行列を基にするものである。即ち，与えられたデータに対応するファジィ類似行列を求め，このファジィ類似行列によって，データが分類される。

2．4 ファジィ分類の基本的理論

一般的な研究の中では，反射性，対称性を持つファジィ行列が多く用いられている。例えば，相関行列はこの二つの条件を満たしている。しかし，このようなファジィ行列は必ずしも推移性という条件を満たしていない。そこで，以下の定理から一般的なファジィ行列に対応する類似行列をいかに求めるかを説明する。まず，定理1では $R,R^2,\cdots,R^n,\cdots$ の上限は R^n であることを証明する。次に定理2ではこの上限 R^n がファジィ類似行列であることを証明する。

定理1：反射性，対称性を持つファジィ行列 $R_{n\cdot n}$ にとって，$\forall p\geqq n$，$R^p=R^n$ $(R^n=\underbrace{R\cdot R\cdot\cdots\cdot R}_{n個})$

証明：先に述べたように，定理1では $R,R^2,\cdots,R^n,\cdots$ の上限は R^n であることを証明する。そのために，R^n は R^p に含まれていること（①で証明する），また，R^n は R^p を含むこと（②，③で証明する）を証明する。

① $R^n\subseteq R^p$ を証明する。

（∨：maxの意味；∧：minの意味）

Rの反射性によって，Rの主対角成分がすべて1であるから，R・Rの成分を $r^{(2)}_{ij}$ と記すれば，

$$\begin{aligned}r^{(2)}_{ij}&=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})\\&=(r_{i1}\wedge r_{1j})\vee\cdots\vee(r_{ii}\wedge r_{ij})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge r_{nj})\\&=(r_{i1}\wedge r_{1j})\vee\cdots\vee(1\wedge r_{ij})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge r_{nj})\\&\geqq r_{ij}\end{aligned}$$

従って，$R^2\supseteq R$。同じ手順を繰り返すと最終的に $R^n\subseteq R^p$ が成立する。

即ち，$\forall p\geqq n$，$R^n\subseteq R^p$

② $R^n = \bigvee_{k=1}^{n} R^k$

∵Rは反射性を持っているので，drag R＝I，また，①に示された証明方法によって，

$R^n \supseteq \cdots\cdots \supseteq R^2 \supseteq R^1$，したがって，$R^n \supseteq \bigvee_{k=1}^{n} R^k$。また，$\bigvee_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^n$が自明なことであるので，$R^n = \bigvee_{k=1}^{n} R^k$が成立する。

③ $\bigvee_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^{n+1}$

$$r_{ij}^{(n+1)} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik1} \wedge r_{k1j}^{(n)})$$

$$= \bigvee_{k_1, k_2 \cdots, k_n = 1}^{n} (r_{ik1} \wedge r_{k1k2} \wedge \cdots \wedge r_{knj})$$

$i = k_0$とするなら，$k_0, k_1, k_2, \cdots, k_n \in \{1, 2, \cdots, n\}$ である。従って，n＋1個の整数のなかに少なくとも1組の同じ値の整数がある。便宜のため，kp＝kq（p＜q）とする。だから，

$$r_{ik1} \wedge r_{k1k2} \wedge \cdots \wedge r_{knj}$$
$$\leqq r_{ik1} \wedge r_{k1k2} \wedge \cdots \wedge r_{kp-1kp} \wedge r_{kpkq+1} \wedge \cdots \wedge r_{knj}$$
$$\leqq \bigvee_{m_1, m_{(n-q+p)}}^{n} r_{im1} \wedge r_{m1m2} \wedge \cdots \wedge r_{m(n-q+p)j}$$
$$= r_{ij}^{(n+1-q+p)} \qquad (n+1-q+p \leqq n)$$

だから，$r_{ij}^{(n+1)} \leqq \bigvee_{k=1}^{n} r_{ij}^{(k)}$であり，行列で表現すると $\bigvee_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^{n+1}$

従って，$\bigvee_{k=1}^{n} R^k \supseteq \bigvee_{k=1}^{n+1} R^k \supseteq R^{n+2}$ であるから，$\forall p > n$ $\bigvee_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^p$。②の結論から，

$R^n = \bigvee_{k=1}^{n} R^k$であるから，$R^n \supseteq R^p$。

従って，①，③の結論を合わせて，$\forall p \geqq n$ $R^n = R^p$

定理2：反射性，対称性を持つファジィ行列R_{n*n}にとって，R^nは類似行列である。

証明：R^nは類似行列であることを証明するために，R^nは反射性，対称性，類似性を持つことを証明すればよい。

① R^nの反射性については，R^2の主対角成分は

$$r^{(2)}_{ii} = \bigvee_{k=1}^{n} (r^{ik} \wedge r^{ki})$$
$$= (r_{i1} \wedge r_{1i}) \vee \cdots \vee (r_{ii} \wedge r_{ii}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge r_{ni})$$
$$= (r_{i1} \wedge r_{ij}) \vee \cdots \vee (1 \wedge 1) \vee \cdots \vee (r in \wedge r nj)$$
$$= 1$$

である。従って，diag $R^2 = I$。同じ手続きを繰り返すと最終的に diag $R^n = I$ が成立する。従って，R^nは反射性を持つ。

② R^nの対称性については，Rが対称性を持つことから，R^2の成分$r^{(2)}_{ij}$，$r^{(2)}_{ji}$はそれぞれ次の通りである。

$$r^{(2)}_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj})$$
$$r^{(2)}_{ji} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{jk} \wedge r_{ki}) = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{kj} \wedge r_{ik})$$
$$= \bigvee_{k=1}^{n} (r ik \wedge r kj)$$

従って，$r^{(2)}_{ij} = r^{(2)}_{ji}$が成立し，$R^2$は対称性を持つ。同じ手順を繰り返とRの$2^k$階の積も対称性を持つ。定理1によれば，$\forall p > n$ $R^p = R^n$が成立する。$2^k > n$のkが必ずあるから，$p = 2^k$とすれば，$R^n = R^{2k}$がある。従って，R^nは対称性を持つ。

③ R^nの推移性については，定理1によって，$R^n = R^p$，そして，p＝2nとすると，$R^n = R^p = R^n \cdot R^n$があるから，$R^n \supseteq R^n \cdot R^n$。これは推移性の定義を満たしている。

従って，①，②，③からR^nは反射性，対称性，推移性を満たし，ファジィ類似行列である。

この定理2から，わかるように，反射性，対称性を持っているファジィ行列Rに対して，R^nを求めれば，ファジィ類似行列ができあがる。これから，これらの定理を基にして，データ分類のアルコリズムを論議する。

3．ファジィ分類のアルコリズム及び性質

3．1 ファジィ分類のアルコリズム

n個の対象について，対象iと対象jの間の関係r'_{ij}（例えば，相関関係など）があって，n個の対象のファジィ行列は$R'(r'_{ij})$とする。このファジィ行列は反射性，対称性を持っていると仮定する。（もしファジィ行列が反射性と対称性を持っていなければ，後に述べる方法（4．2）によって，反射性と対称性を持つファジィ行列に変換できる。従って，ここでは，説明の便宜上，以上のような仮定を置く）。

これから反射性と対称性を持つファジィ行列$R(r_{ij})$から，二の中の定理1と定理2を基にして，n個の対象を分類するアルコリズムを説明する。

(1) 最初の関係行列は$R^0 = R$とする。

(2) $R^1 = R^{1-1} * R^{1-1}$を求める。ただし，

$$r^{l}_{ij} = \max_{k=1,2,\cdots,n} (\min (r^{l-1}_{ik}, r^{l-1}_{kj})) \quad (2)$$

(3) もし$R^{l}=R^{l-1}$なら，(4)へ移動する。また，このR^{l}は類似行列と呼ばれる。そうでなければ，(2)に戻る。

(4) R^{l}のn^2個成分の中に多くても，異なる値はn個しかない。mは実際に存在する異なる値の数とする($m \leq n$)。このm個の値はr_k（$1 \leq k \leq m$）と記する。r_kはx_i，x_jの類似性である。r_kが大きければ，類似性が高いことを意味する。表記の便利のため，値が大から小へという順に並べて，$r_1 > r_2 > \cdots > r_m$とする。そこで，n個の対象は各r_kに基づいて分類される。いずれのr_kによって，分類されるものであるが，識別するために各r_kに対応するクラスター群をC_k（$k=1, \cdots, m$）とする。

つまり，C_kについて類似性はr_kである。Rがあり，

$$R_k : r_{kij} = \begin{cases} 1 & r^{l}_{ij} \geq r_k \\ 0 & r^{l}_{ij} < r_k \end{cases} \quad (3)$$

があって，$r_{kij}=1$なら，対象iと対象jは類似性r_kに基づいた分類では同じクラスターに属する。$r_{kij}=0$なら,対象iと対象jは類似性r_kに基づいた分類では同じクラスターに属しないということを意味する。

この手順を通して，n個の対象は同質さr_kによってクラスター化された。

以上で述べた方法はファジィ分類と呼ばれる。また，このファジィ分類は以下のような性質を持つ。

3. 2 ファジィ分類の性質

(1) できあがったクラスター化は階層的であること。

任意のα_p，$\alpha_t \in \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$，証明の便利のため，$\alpha_p < \alpha_t$と仮定する。$\alpha_p$，$\alpha_t$に対応する行列は

$$\alpha_p \quad R_p: \ r_{kij} = \begin{cases} 1 & r^{l}_{ij} \geq \alpha_p \\ 0 & r^{l}_{ij} < \alpha_p \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha_t \quad R_t: \ r_{kij} = \begin{cases} 1 & r^{l}_{ij} \geq \alpha_t \\ 0 & r^{l}_{ij} < \alpha_t \end{cases} \quad (5)$$

R_t上でX_i，X_jが同じクラスターに属する。即ち，$r^{l}_{ij} \geq \alpha_t$であるとすると，$\alpha_p < \alpha_t$であるから，$r^{l}_{ij} \geq \alpha_t > \alpha_p$が成立する。従って，$R_p$上においても$X_i$，$X_j$は同じクラスターに属する。これで，ファジィ分類の階層性は証明された。

(2) あたらしい距離は超距離不等式を満たすこと。

変数の集合$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$のファジィ行列Rの類似行列が$R^{l}$（$r^{l}_{ij}$）であるとすれば，$x_i$，$x_j$の新しい距離を次のように定義する。即ち，$d(x_i, x_j) = 1-r^{l}_{ij}$。これからはこの新しい距離は超距離不等式を満たすことを説明する。

証明：① 自分から自分までの距離が0であること。

Rは反射性を満たすから，

$r^{l}_{ii}=1$（$i=1, 2, \cdots, n$）。

従って，$d(x_i, x_i) = 1-r^{l}_{ii}=0$

② AからBまでの距離とBからAまでの距離が同じであること。

Rは対称性を満たすから，$r^{l}_{ij}=r^{l}_{ji}$

従って，$d(x_i, x_j) = 1-r^{l}_{ij} = 1-r^{l}_{ji}$

$=d(x_j, x_i)$

③ $\forall$ $x_i, x_j, x_l \in X$。書きやすいために

xi=x，xj=y，xl=zと置く。

この時，$d(x, y) = 1-r^{l}_{ij}$，

$d(y, z) = 1-r^{l}_{jl}$，

$d(x, z) = 1-r^{l}_{il}$

また，$r_1=r^{l}_{ij}$，$r_2=r^{l}_{jl}$，$r_3=r^{l}_{il}$と仮定する。従って，r_1のレベルで，x，yは同じクラスターに属する。r_2のレベルで，y，zは同じクラスターに属する。r_3のレベルで，x，zは同じクラスターに属する。

便利のために，$r_1 \geq r_2$と仮定すると，$r^{l}_{ij} \geq r_2$がある。だから，r_2のレベルで，x, y, zは同じクラスターに属する。また，ファジィ分類は階層的であるから。$r_3 > r_2$が成立する。従って，$r^{l}_{jl} \geq \min(r^{l}_{il}, r^{l}_{ij})$がある。

故に$d(y, z) \leq \max(d(y, x), d(x, z))$。

3. 3 単調変換によって分類の結果が不変であること（monotone invariance）

ファジィ分類は数字の大小順序しか用いられない。単調変換の不変性のことは大小順序に依存している。従って，類似行列からのクラスター化の結果は単調変換によっては変わらない。

4. 適用例

以上に述べたファジィ分類の有効性を示すために次の二つの例を取り上げた。

4. 1 潘（1989，未公刊）の学習意欲に関する研究データ

下山は1981年から1983年までの2年間をかけて，学習意欲検査用紙を作成した。学習意欲検査用紙の40項目から，8因子（自主的学習態度，達成志向の態度，責任感，従順性，自己評価，失敗回避傾向，持続性の欠如，価値観の欠如）が抽出され，各因子の得点についてクラスター

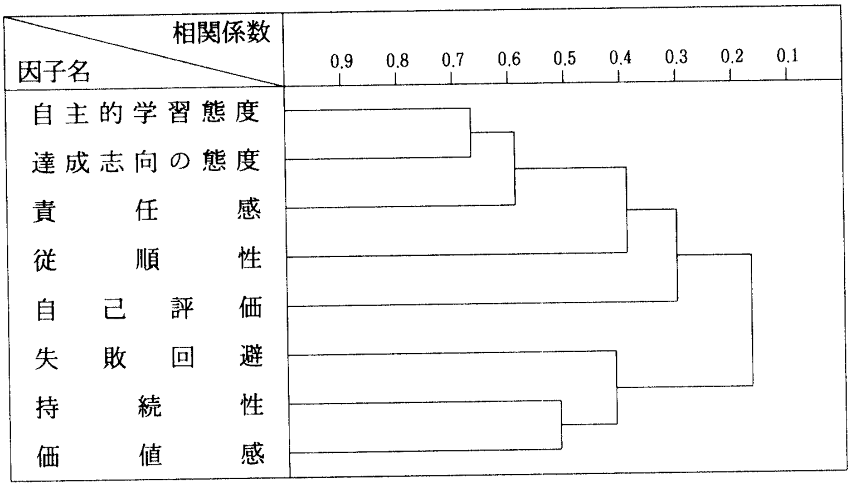


図1　下山のクラスター分析の結果（1983）

表1　潘（1989）の研究データの相関行列

1.00	.542	.491	.378	.257	−.230	−.465	−.380
.542	1.00	.314	.203	.334	−.170	−.369	−.194
.491	.314	1.00	.410	.252	.096	−.257	−.394
.378	.203	.410	1.00	.309	−.014	−.284	−.354
.257	.334	.252	.309	1.00	−.032	−.165	−.148
−.230	−.170	−.096	−.014	−.032	1.00	.407	.278
−.465	−.369	−.257	−.284	−.165	.407	1.00	.590
−.380	−.194	−.394	−.354	−.148	.278	.590	1.00

表2　表1のデータからの類似行列

1.00	.542	.491	.410	.334	.000	.000	.000
.542	1.00	.491	.410	.334	.000	.000	.000
.491	.491	1.00	.410	.334	.000	.000	.000
.410	.410	.410	1.00	.334	.000	.000	.000
.334	.334	.334	.334	1.00	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.407	.407
.000	.000	.000	.000	.000	.407	1.00	.590
.000	.000	.000	.000	.000	.407	.590	1.00

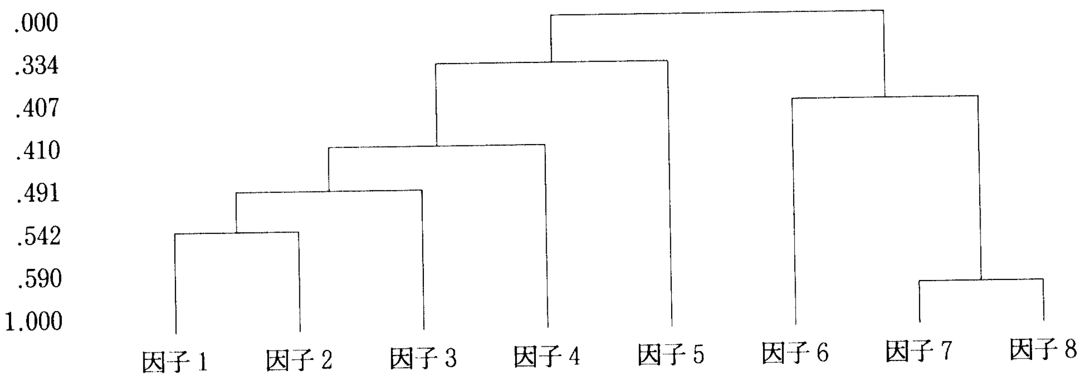


図2　潘のクラスター分析の結果（1989）

分析を実施して，その結果は図1に示した。この8因子は大きく二つに分けて，二つのクラスターが得られた。それは学習意欲における達成行動を促進する正傾向（前の5因子）と達成行動を抑制する負傾向ということである。潘（1989）では，この検査用紙を用いて，中国で調査が行われた。その結果は日本の結果とほぼ同じで，8因子が抽出された。即ち，自主的学習の態度，達成志向の態度，自信心，依存的向上性，自己評価，失敗回避の態度，持続性の欠如，価値観の欠如である。これら8因子を分類するのに，ファジィ分類が用いられた。各因子に含まれた項目の総合得点間の相関行列は表1に，類似行列は表2に，樹状図は図2に示した通りである。

図1と図2を比較すると，明らかにほぼ同じ結果は得られている。

ファジイ分類から，得られた結果によれば，中国の8因子も大きく二つクラスターに分けることができる。

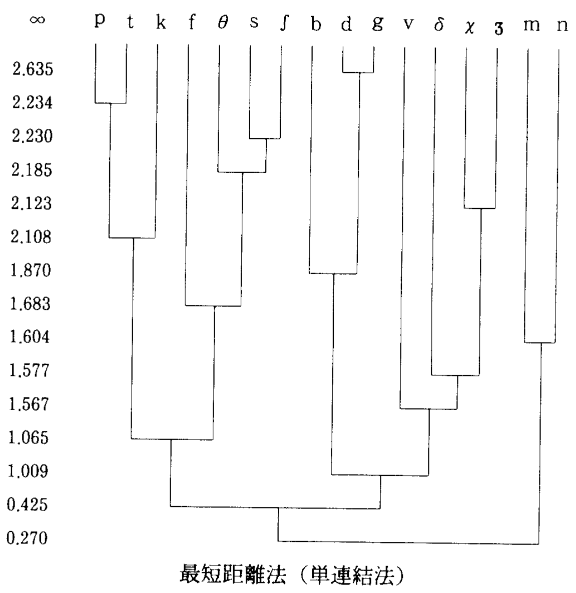
4. 2 Miller,Nicely 1955の音声に関する研究データ（Johnson（1967）の最小距離法の結果との比較。）

Miller, Nicely は16個の子音の混同可能性について研究を行った。観測されたデータは子音の音素 x が，1

表3　Miller, Nicely の16個個の子音の混同可能性に基づくデータ

47	61	68	15	11	17	9	3	3	1	0	1	2	2	3	1
59	63	64	19	15	14	13	3	4	1	0	5	2	2	2	2
37	47	56	10	13	15	10	1	2	1	0	2	0	1	0	1
21	29	21	38	37	47	19	2	2	1	0	2	2	3	3	1
13	23	25	23	39	54	39	2	2	1	0	5	1	0	4	5
16	25	10	29	52	65	34	1	4	2	4	5	1	1	1	2
15	33	23	18	28	70	41	1	1	0	0	8	3	1	1	2
0	1	1	8	8	5	3	98	29	17	38	19	9	2	8	7
1	0	1	11	7	12	5	70	84	33	12	10	24	9	1	0
4	1	2	7	5	13	8	56	74	33	13	15	21	13	6	1
0	2	1	1	2	1	1	44	34	18	77	34	36	14	2	1
1	0	0	0	3	0	1	22	16	19	45	46	45	23	11	8
2	3	2	2	4	3	2	15	15	20	46	35	64	21	2	0
1	1	0	1	2	0	1	11	15	24	54	42	70	39	2	5
0	0	1	1	2	2	0	1	3	3	4	5	1	4	161	60
1	3	2	1	1	1	2	1	3	2	2	4	2	2	133	108

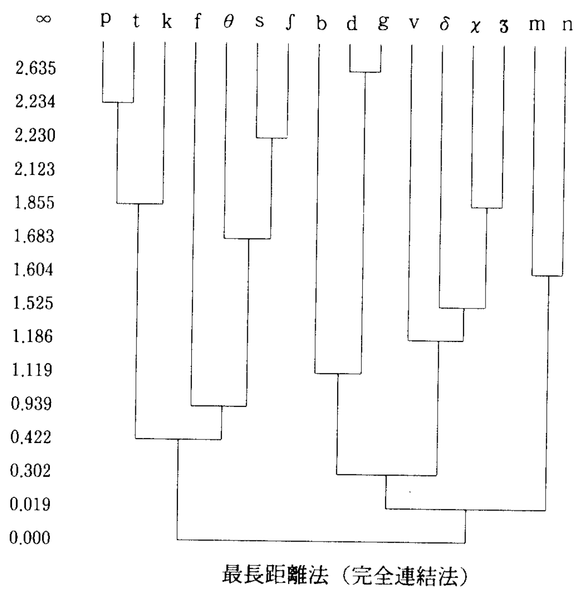
16個の子音の混同可能性に関するデータに最短距離（または栄連結）法を使って求めた階層的クラスター（Johnson, 1967）



最短距離法（単連結法）

最小距離法

16個の子音の混同可能性に関するデータに最長距離（または完全連結）法を使って求めた階層的クラスター（Johnson, 1967）



最長距離法（完全連結法）

最大距離法

図3　両方法のクラスター分析の結果

群の人間の聞き手によって子音の音素yとして聞かれた度数f（x，y）の値である。フィルターと雑音の水準をいろいろと変えて実験し，各実験条件下で子音の各対について混同された度数が別々に観測された。表3はこれらの一つのデータである。

Johnson（1967）は表3のデータを対称化にするために，s（x,y）＝f（x，y）／f（x，x）＋f（y，x）／f（y，y）という式を導入した。そして，得られたs（x，y）に対して，最小距離法と最大距離法を用いて，クラスター分析を行った。その結果は図3に示した。

同じ表3のデータに対して，本論文の方法を適用して分類してみる。

このファジィ行列は反射性と対称性ともに満たしていない。そこで，以下のような変換が行われる。

(1)　ファジィ行列の主対角成分を最大化にする。つまりr'_{ii}について第i行第i列に属する全ての成分中に最大の値で置き換える。

(2)　変換されたファジィ行列について，次式

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{r'_{ij}}{r'_{ii}} + \frac{r'_{ji}}{r'_{jj}}\right)$$

によって新たな行列が求められる。新しい関係行列はR（r_{ij}）と記する。この式によって，R（r_{ij}）は対称行列であることが分かる。また，$-1 \leqq r_{ij} \leqq 1$が成立する。

まず，表3の行列は対称ではないし，かつ主対角成分はすべて最大でもないということで，式(1)などで変換された。その結果は表4に示した。

次にデータについて，ファジィ分類法によって分類が行われる。表5は類似行列であり，
図4は分類の樹状図である。

図3と図4の結果を比較すると，いくつかの意味のあることがいえる。

まず，異なるところについて，

表4　表3のデータを用いられて変換した結果

1	.91	.77	.33	.20	.24	.17	.02	.03	.03	.00	.02	.03	.02	.02	.01
.91	1	.85	.46	.33	.29	.34	.03	.03	.01	.01	.04	.04	.02	.02	.03
.77	.85	1	.30	.33	.18	.24	.01	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.00	.01
.33	.46	.30	1	.61	.71	.33	.06	.09	.06	.01	.02	.04	.04	.04	.01
.20	.33	.33	.61	1	.87	.56	.06	.06	.04	.01	.08	.04	.01	.04	.05
.24	.29	.18	.71	.87	1	.74	.03	.10	.10	.04	.04	.03	.01	.01	.02
.17	.34	.24	.33	.56	.74	1	.02	.04	.05	.01	.06	.04	.01	.01	.02
.02	.03	.01	.06	.06	.03	.02	1	.56	.47	.48	.34	.15	.09	.04	.04
.03	.03	.02	.09	.06	.10	.04	.56	1	.70	.29	.23	.25	.16	.02	.01
.03	.01	.02	.06	.04	.10	.05	.47	.70	1	.20	.31	.29	.26	.05	.01
.00	.01	.01	.01	.01	.04	.01	.48	.29	.20	1	.71	.56	.48	.03	.01
.02	.04	.01	.02	.08	.04	.06	.34	.23	.31	.71	1	.74	.55	.14	.10
.03	.04	.01	.04	.04	.03	.04	.15	.25	.28	.56	.74	1	.65	.02	.01
.02	.02	.01	.04	.01	.01	.01	.09	.16	.26	.48	.55	.65	1	.03	.04
.02	.02	.00	.04	.04	.01	.01	.04	.02	.05	.03	.14	.02	.03	1	.69
.01	.03	.01	.01	.05	.02	.02	.04	.01	.01	.01	.10	.01	.04	.69	1

表5　類 似 関 係 行 列

1	.91	.85	.46	.46	.46	.46	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.91	1	.85	.46	.46	.46	.46	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.85	.85	1	.46	.46	.46	.46	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.46	.46	.46	1	.71	.71	.71	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.46	.46	.46	.71	1	.87	.74	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.46	.46	.46	.71	.87	1	.74	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.46	.46	.46	.71	.74	.74	1	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	1	.56	.56	.48	.48	.48	.48	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.56	1	.70	.48	.48	.48	.48	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.56	.70	1	.48	.48	.48	.48	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.48	.48	.48	1	.71	.71	.65	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.48	.48	.48	.71	1	.74	.65	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.48	.48	.48	.71	.74	1	.65	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.14	.14	.14	.65	.65	.65	1	.14	.14
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.14	.14	.14	.14	.14	.14	.14	1	.69
.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.14	.14	.14	.14	.14	.14	.14	.69	1

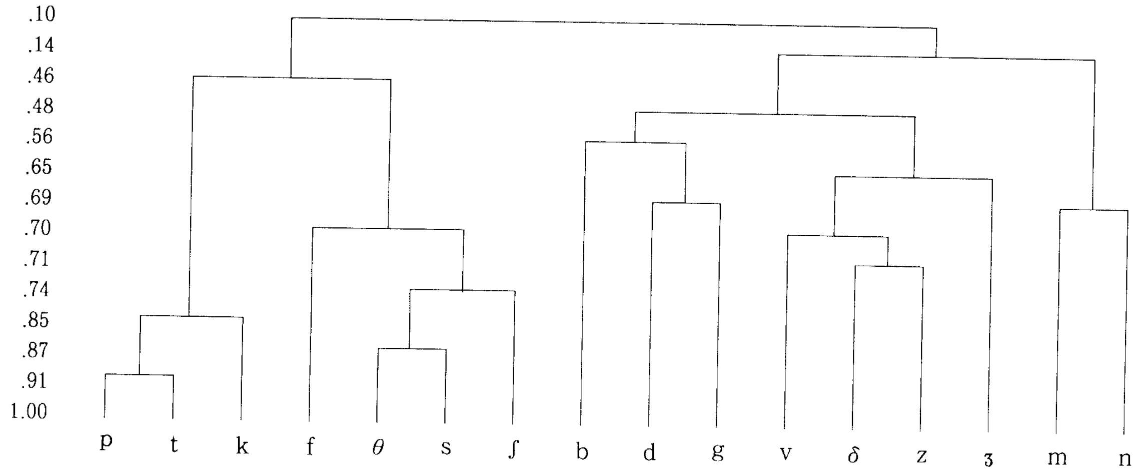


図4　ファジィ分類によるクラスター分析の結果

1．図4のクラスター化の強さのレベル .70 と .69 では，それぞれ二つのクラスターが同時に形成された。つまり.70の場合に，f，θ，s，ʃ，とv，δ，zがそれぞれ形成された。.69 の場合にd，gとm，nがそれぞれ形成された。これも普通のアルゴリズムのできないことである。

2．図3と図4とを比べて，クラスター化の強さと，特定のクラスターが形成されるクラスター化の段階の両方に違いがみられた。例えば，二つのいわゆる無声閉音pとtはいち早く結合されたに対して，図3の中に二番目に結合された。また無声摩擦音f，θ，s，ʃに関して，結合の順序は図3の場合に（((ʃ，s)，θ)，f）であり，図4の場合に（((θ，s)，ʃ)，f）である。有声摩擦音((ʒ，z)，δ)，vに関して，結合の順序は図3の場合に（((ʒ，z)，δ)，v）であり，図4の場合に（((δ，z)，v)，ʒ）である。

次に似ているところは以下の通りである。

1．有声子音（閉鎖音b，d，gと摩擦音v，ʒ，z，の両方）と無声音（閉鎖音p，t，kと摩擦音f，θ，s，ʃ）と鼻音（m，n）とは，はっきり区別され，三つのクラスターが形成された。最大距離法とファジィ分類と同じように，有声子音は鼻音とまず合併し，それらの結合が次ぎに無声音と合併する。

2．有声閉鎖音と無声閉鎖音の合併の順番が図3と図4とは同じである。つまり，((p，t)，k）と（(g，d)，b）である。

3．16個の音素について，図3と図4と同じように，第一に，無声音と有声音の両方の分類の枠内で，閉鎖音と摩擦音は四つの別々の群に固まり，鼻音はそれら自身結合して第五の群を形成する。

5．考　察

本研究では，ファジィ演算を基にして，対象の分類を行うファジィ分類について説明してきた。これはファジィ行列から，対応するファジィ類似行列を求めていく方法である。一般的には相関行列のような反射性と対称性を持つファジィ行列から，対応する類似行列を直ちに求めることができ，対象間の分類ができる。反射性と対称性を持っていないファジィ行列については，4．2の中に説明した変換を用いることによって同じ手順で対象間の分類が可能となる。

通常のクラスター分析のアルコリズムよりファジィ分類の方がすぐれている点がいくつかある。まず，クラスターを合併していく過程で，これまでの方法では，二つずつ合併する。しかし，関係行列の中に，等しい値が多い場合には，どちらを先に合併するかが一意的に定まらないことがある。ここで論じたファジィ分類では，R^nの結果は唯一であるから，どちらを先に合併したとしても結果に影響を与えない。次に，ファジィ分類はファジィ行列の演算によって行われる。この演算のプロセスが明確で，理論的にも強いと思われる。さらに，ファジイ演算の過程の中では，データの大きさに関して順序性しか用いられていないので，実際のデータ間の計算誤差が，結果に及ぼす影響が小さいものと思われる。

これからは心理学の研究の様々な場面で，ファジィ理論が持つ役割が大きくなってくると思われる。本論文で述べられたファジィ分類の方法であるし，さらにデータの収集方法について，ファジィ理論が貢献する可能性がある。その場合には，現在までに用いられているデータ分類の方法はそのまま用いられることが困難がある。そのような場合に本研究で述べたファジィ分類法は有用であると思われる。

文　　　献

1) Gnanadesikan, R. 1977 Method for Statistical Data Analysis of Multivariate Observatons（丘本 正，磯貝 史訳 統計的多変量データ解析 日科技連）
2) Hartigan, J. A. 1975 Clustering Algorithms John Wiley & Sons.Inc
3) Johnson, S. C. 1967 Hierarchical clustering schemes Psychometrika **32**, 241-254
4) 楼世博 1983 模糊数学 科学出版社
5) Miller, G. A Nicely, P. E. 1955 An analysis of perceptual confusions among some English consonants The Journal of The Acoustical Society of America 27, 2, 338-352
6) 寺野寿郎 1987 ファジィシステム入門 オーム社
7) 潘 益平 1989 中国と日本における学習達成場面の原因帰属と学習意欲について 1989年度横浜国立大学大学院教育学研究科修士論文 未公刊
8) 下山 剛ら 1983 学習意欲の構造に関する研究(2) 東京学芸大学紀要 第1部門 教育科学 34
9) 下山 剛 1985 学習意欲の見方・導き方 教育出版

謝 辞

本研究を実施するにあたって，指導教官の野口裕之助教授，村上 隆助教授から沢山かつ有意な御指導をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

（1990年8月31日 受稿）

ABSTRACT

Clustering and Fuzzy Operation

Yiping PAN

In the present paper, a new clustering method by fuzzy operation is proposed. This method is to transform an original data matrix to a similarity matrix, by using fuzzy operations and the resulting similarity matrix is used to the base of clustering the objects. In the result, the new distance measure defined from the similarity matrix satisfies the ultrametrix inequality proposed by Johnson (1967), and this method only uses rank order informations in the orginal data matrix so the result from this method is invariant under monotoric transformation, the clusters obtained from this method have hierarchical structure. This new clustering method proves to be valid on the example data, and further studies are needed in order to confirm the relationship between the new method and minimum method, maximum method proposed by Johnson (1967).