Bulletin of the Faculty of Education,
Nagoya University (Educational Psychology)
1990, Vol. 37, 191－198.

共通被験者デザインにおける等化係数の周辺最尤法による推定

野　口　裕　之

項目反応理論に基づく測定尺度を実際の応用場面で構成する場合には，“項目反応理論では尺度の原点と単位とが一意的に定まらない”という特徴がある為に，尺度の原点と単位とを便宜上，項目パラメータ値を推定するために用いた被験者集団の尺度値分布の平均が0.0，標準偏差が1.0となるように定める事が多い。その結果，異なる被験者集団を用いて項目パラメータ値が推定された項目相互の間ではパラメータ値そのものを比較することは勿論，それらの項目を用いて推定された被験者の尺度値についても相互に比較する事はできなくなる。このように，別個の被験者集団を用いて構成された複数の測定尺度上の特性尺度値を相互に比較する為には，全ての尺度が共通の原点と単位とを持つように，適当な変換を実施しておく必要がある。この尺度変換に関する手続きを尺度の“等化（equating）”と呼ぶ。

本研究では，項目反応理論に基づいて作成された複数の尺度間の等化に関して新しい方法を提案し，その妥当性についてコンピューター・シミュレーションに基づいて検討した。

1．目　的

項目反応理論に基づいて互いに独立に構成された2つの潜在特性尺度を共通の尺度に等化する為には，データを収集するデザインとして“共通項目デザイン”と“共通被験者デザイン”の2つがあり，それぞれのデザインに基づいて具体的に等化を実施する際に必要となる等化係数 k 及び l の値を推定する方法はこれまでに複数の方法が提案されて来た。その1つに，野口（1986）の“共通被験者の反応パタンを利用する”方法がある。

野口（1986）では，2つのテストに含まれる各項目のパラメータ値が各テスト毎に独立に構成された尺度上の値で表わされている時に，同一の被験者集団に両方のテストを実施した結果得られる被験者集団の反応行列（各要素は正答の場合は1，非正答の場合は0）をデータとして未知パラメータである等化係数 k，l 及び各被験者の尺度値 θ_i（i＝1，……，N），但しNは被験者数，を同時最尤法により推定している。

しかしながら，各被験者の推定尺度値 $\hat{\theta}_i$（i＝1，……，N）は尺度を等化するという目的に照らすと必要ではない。しかも，被験者パラメータ θ_i（i＝1，……，N）は被験者数Nが増加するのに伴ってその数が増加するが，これに対して等化係数を表わすパラメータは被験者数の増加とは無関係に k，l の2つである。すなわち，前者はincidental parametersであり，後者はstructural parameters である（例えば Kendall & Stuart，1973，p.399参照）。一般に incidental parameters が存在する状況で同時最尤法を用いてパラメータ値を推定すると structural parameters の推定値が一致性を持たなくなることが知られている（Hambleton & Swaminathan，1985，7．3節）が，野口（1986）の場合には被験者数を増やしても等化係数の推定値 $\hat{k}$，$\hat{l}$ が真値 k，l に収束しなくなるということに相当する。

同様の問題が，項目パラメータ値を推定するのに，被験者集団の反応行列をデータとして項目パラメータ a_j，b_j（j＝1，……，n），但しnはテストに含まれる項目数，及び被験者の尺度値 θ_i（i＝1，……，N）の両者を同時最尤法により推定する場合（例えば Wingersky 他（1982）の LOGIST 5）にも生ずる。この場合には，個々の被験者を尺度値 θ が密度関数 $g(\theta)$ で表わされる分布をする母集団からのランダム・サンプルと考え，これを利用し，さらに θ について積分することによって structural parameters である a_j，b_j，（j＝1，……，n）のみで尤度関数を表わす事が可能になる。この尤度関数を特に周辺尤度関数と呼び，これを最大にする a_j，b_j（j＝1，……，n）の値を求める事によって項目パラメータの周辺最尤推定値を得る事ができる。

一般に，周辺最尤推定量の統計的性質は十分に確認されているわけではないが，一致性や漸近正規性というような望ましい性質を備えているものと思われる（Hambleton & Swaminathan，1985，p.141）ので，

本研究では項目パラメータ値を推定する場合と同様に，野口（1986）の等化法に対して被験者集団の母集団における尺度値の分布を利用して incidental parameters である θ_i（$i=1, \cdots\cdots, N$）を尤度関数の中から消去して等化係数 k，l の値を推定するという周辺最尤法による等化係数の推定法を提案し，検討を加える。

2．等化の状況

2つのテストX及びYが存在し，テストXに含まれる項目のパラメータ値は被験者母集団Ⅰで潜在特性尺度値が標準正規分布するように原点と単位が定められた尺度 θ 上で表わされ，テストYに含まれる項目のパラメータ値は被験者母集団Ⅱで潜在特性尺度値が標準正規分布するように原点と単位が定められた尺度 θ^* 上で表わされているものとする。

この時，被験者集団Ⅰ及びⅡに含まれる全ての被験者に対してテストX及びYの両方を実施し，その結果得られる項目反応行列を利用して尺度 θ を尺度 θ^* に等化，すなわちテストXに含まれる各項目のパラメータ値を尺度 θ^* 上の値に変換する為に必要な等化係数の値を推定する。但し，被験者集団Ⅰ及びⅡはそれぞれ母集団Ⅰ及びⅡから無作為抽出されているものとし，またテストXとYに共通に含まれる項目はないものとする。

以上の状況は野口（1986）のそれとほとんど同じであるが，テストを実施した被験者集団を母集団の違いを強調する為に2つに分割している点が異なっている。

3．記　法

テストXはn項目から構成され，各項目のパラメータ値は等化前の尺度 θ 上で a_j，b_j（$j=1, \cdots\cdots, n$），等化後の尺度 θ^* 上で a_j^*，b_j^*（$j=1, \cdots\cdots, n$）と表わす。前者が既知であるのに対して後者は未知である。テストYはm項目から構成され，各項目のパラメータ値は尺度 θ^* 上で A_h^*，B_h^*（$h=1, \cdots\cdots, m$）と表わす。ここで，a_j，a_j^*，A_h^* は各項目の識別力を，b_j，b_j^*，B_h^* は困難度をそれぞれ表現するパラメータである。

また，任意の被験者の潜在特性尺度値については尺度 θ 上では θ で，尺度 θ^* 上では θ^* で表わし，この被験者のテストXの各項目に対する反応を u_j（$j=1, \cdots\cdots, n$），テストYの各項目に対する反応を v_h（$h=1, \cdots\cdots, m$）で表わす。

この時，等化係数を k，l とすると，被験者の潜在特性尺度値 θ，θ^* の間には

$$\theta^* = k\theta + l \qquad (1)$$

そして，項目パラメータ値 a_j，a_j^* 及び b_j，b_j^* の間にはそれぞれ

$$a_j^* = k^{-1}a_j \quad (j=1, \cdots\cdots, n) \qquad (2)$$

$$b_j^* = kb_j + l \quad (j=1, \cdots\cdots, n) \qquad (3)$$

という関係がある。

さらに，以下のベクトルを定義する。

テストXの項目パラメータベクトルとして，

$$\mathrm{a} = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)' \qquad (4)$$

$$\mathrm{b} = (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)' \qquad (5)$$

$$\mathrm{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \cdots\cdots, a_n^*)' \qquad (6)$$

$$\mathrm{b}^* = (b_1^*, b_2^*, \cdots\cdots, b_n^*)' \qquad (7)$$

テストYの項目パラメータベクトルとして，

$$\mathrm{A}^* = (A_1^*, A_2^*, \cdots\cdots, A_h^*)' \qquad (8)$$

$$\mathrm{B}^* = (B_1^*, B_2^*, \cdots\cdots, B_h^*)' \qquad (9)$$

テストXに対する任意の被験者の反応ベクトルとして，

$$\mathrm{u} = (u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)' \qquad (10)$$

テストYに対する任意の被験者の反応ベクトルとして，

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \cdots\cdots, v_m)' \qquad (11)$$

また，母集団Ⅰ及びⅡに於ける被験者の潜在特性尺度値の分布は，

$$g_{\mathrm{I}}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{\theta^2}{2}\}, \qquad (12)$$

$$g_{\mathrm{II}}(\theta^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{\theta^{*2}}{2}\}, \qquad (13)$$

と表わされるが，母集団Ⅰに於ける被験者の潜在特性尺度値の分布を尺度 θ^* 上で表わすと，

$$g_{\mathrm{I}}(\theta^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}k} \exp\{-\frac{(\theta^*-l)^2}{2k^2}\}, \qquad (14)$$

となる。

4．等化係数の推定

いま，尺度値が θ^* である任意の被験者に対してテストX及びテストYの両方を実施した結果，反応パタン（u, v）が得られる尤度は

$$L^*(\mathrm{u}, \mathrm{v} \mid \mathrm{a}^*, \mathrm{b}^*, \mathrm{A}^*, \mathrm{B}^*, \theta^*) = \prod_j P(a_j^*, b_j^*, \theta^*)^{u_j} \cdot Q(a_j^*, b_j^*, \theta^*)^{1-u_j}$$

$$\times \prod_{h} \mathrm{P}\,(\mathrm{A}_h^*,\ \mathrm{B}_h^*,\ \theta^*)^{v_h} \cdot \mathrm{Q}\,(\mathrm{A}_h^*,\ \mathrm{B}_h^*,\ \theta^*)^{1-v_h} \qquad (15)$$

で表わされる。ここで，P（•）は2パラメーターロジスティックモデルの項目特性関数

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{a}_j^*,\ \mathrm{b}_j^*,\ \theta^*) = \frac{1}{1+\exp\{-\mathrm{Da}_j^*\,(\theta^*-\mathrm{b}_j^*)\}} \qquad (16)$$

であり，

$$\mathrm{Q}\,(\mathrm{a}_j^*,\ \mathrm{b}_j^*,\ \theta^*) = 1-\mathrm{P}\,(\mathrm{a}_j^*,\ \mathrm{b}_j^*,\ \theta^*) \qquad (17)$$

である。

ところで，a_j^*, b_j^* と a_j, b_j（$j=1$，……，n）にはそれぞれ（2）及び（3）の関係がある為，(15) 式は等化係数 k，l もパラメーターとして，

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^*\,(\mathrm{u},\ \mathrm{v}\mid k^{-1}\mathrm{a},\ k\mathrm{b}+l,\ \mathrm{A}^*,\ \mathrm{B}^*,\ \theta^*) &= \prod_{j} \mathrm{P}\,(k^{-1}\mathrm{a}_j,\ k\mathrm{b}_j+l,\ \theta^*)^{u_j} \cdot \mathrm{Q}\,(k^{-1}\mathrm{a}_j,\ k\mathrm{b}_j+l,\ \theta^*)^{1-u_j} \\ &\quad \times \prod_{h} \mathrm{P}\,(\mathrm{A}_h^*,\ \mathrm{B}_h^*,\ \theta^*)^{v_h} \cdot \mathrm{Q}\,(\mathrm{A}_h^*,\ \mathrm{B}_h^*,\ \theta^*)^{1-v_h}\end{aligned} \qquad (18)$$

と表わす事が出来る。

また，当該被験者の属する母集団で尺度値 θ^* の分布を密度関数 $g\,(\theta^*)$ で表わすと，この母集団で反応パタン（u，v）が得られる確率 P_{uv} は

$$\mathrm{P}_{uv} = \int g\,(\theta^*) \cdot \mathrm{L}^*\,(\mathrm{u},\ \mathrm{v}\mid \mathrm{a}^*,\ \mathrm{b}^*,\ \mathrm{A}^*,\ \mathrm{B}^*,\ \theta^*)\,d\theta^* \qquad (19)$$

で与えられる。但し，積分は θ^* の存在する区間全体にわたって実行する（以後の積分についても同様）。

さらに，この母集団から N 名の無作為標本を得てテストX及びテストYの両方を各被験者に対して実施した結果について反応パタン別に当該反応パタンをとる人数を集計するならば，これらの人数は多項分布に従う。すなわち，反応パタン（u，v）をとる被験者の数を N_{uv} 名とすると当該被験者集団に於いて特定の反応パタン人数が得られる確率は

$$\mathrm{Prob}\,[\{N_{uv}\}] = \frac{\mathrm{N}\,!}{\prod_{uv} N_{uv}\,!} \cdot \prod_{uv} \mathrm{P}_{uv}^{\,N_{uv}} \qquad (20)$$

で与えられる。但し，$\{N_{uv}\}$ は各反応パタン毎の人数を要素とするベクトルであり，$\prod_{uv}$ は全ての反応パタン（u，v）について積をとることを表わす。

ところが，P_{uv} には未知母数 k，l が含まれているから（20）式は $\{N_{uv}\}$ が与えられた時の k，l に関する尤度関数とみなす事もできる。

すなわち，

$$\mathrm{L}^*\,(\{N_{uv}\}\mid k,\ l) = \frac{\mathrm{N}\,!}{\prod_{uv} N_{uv}\,!} \cdot \prod_{uv} \mathrm{P}_{uv}^{\,N_{uv}} \qquad (21)$$

これを最大にする k，l の値を求めれば等化係数の周辺最尤推定値 k，l がえられる。

しかしながら，本研究で想定している状況では母集団が2つ存在する為にこの事を考慮に入れる必要がある。

いま，被験者の属する母集団の違いを添字Ⅰ，Ⅱで区別するならば，母集団Ⅰ及び母集団Ⅱで反応パタン（u，v）が得られる確率 $\mathrm{P}_{\mathrm{I}uv}$，$\mathrm{P}_{\mathrm{II}uv}$ はそれぞれ

$$\mathrm{P}_{\mathrm{I}uv} = \int g_{\mathrm{I}}\,(\theta^*) \cdot \mathrm{L}^*\,(\mathrm{u},\ \mathrm{v}\mid \mathrm{a}^*,\ \mathrm{b}^*,\ \mathrm{A}^*,\ \mathrm{B}^*,\ \theta^*)\,d\theta^* \qquad (22)$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{II}uv} = \int g_{\mathrm{II}}\,(\theta^*) \cdot \mathrm{L}^*\,(\mathrm{u},\ \mathrm{v}\mid \mathrm{a}^*,\ \mathrm{b}^*,\ \mathrm{A}^*,\ \mathrm{B}^*,\ \theta^*)\,d\theta^* \qquad (23)$$

で与えられ，さらに被験者集団Ⅰ及びⅡで反応パタン別人数の分布 $\{N_{\mathrm{I}uv}\}$ 及び $\{N_{\mathrm{II}uv}\}$ が得られた時の k，l に関する尤度はそれぞれ

$$\mathrm{L}^*\,(\{N_{\mathrm{I}uv}\}\mid k,\ l) = \frac{\mathrm{N}_{\mathrm{I}}\,!}{\prod_{uv} N_{\mathrm{I}uv}\,!} \cdot \prod_{uv} \mathrm{P}_{\mathrm{I}uv}^{\,N_{\mathrm{I}uv}} \qquad (24)$$

$$\mathrm{L}^*\,(\{N_{\mathrm{II}uv}\}\mid k,\ l) = \frac{\mathrm{N}_{\mathrm{II}}\,!}{\prod_{uv} N_{\mathrm{II}uv}\,!} \cdot \prod_{uv} \mathrm{P}_{\mathrm{II}uv}^{\,N_{\mathrm{II}uv}} \qquad (25)$$

で与えられる。

本研究が想定している状況では被験者集団Ⅰ及びⅡの両者に対してテストX及びテストYを実施する為，等化係数 k，l に関する尤度は（24）式と（25）式との積で与えられる。すなわち，

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^*\,(\{N_{\mathrm{I}uv}\},\ \{N_{\mathrm{II}uv}\}\mid k,\ l) &= \frac{\mathrm{N}_{\mathrm{I}}\,!}{\prod_{uv} N_{\mathrm{I}uv}\,!} \cdot \prod_{uv} \mathrm{P}_{\mathrm{I}uv}^{\,N_{\mathrm{I}uv}} \\ &\quad \times \frac{\mathrm{N}_{\mathrm{II}}\,!}{\prod_{uv} N_{\mathrm{II}uv}\,!} \cdot \prod_{uv} \mathrm{P}_{\mathrm{II}uv}^{\,N_{\mathrm{II}uv}}\end{aligned} \qquad (26)$$

であり，対数尤度は

$$\begin{aligned}\mathrm{L} = \ell n\,\mathrm{L}^* &= \Sigma\,\mathrm{N}_{\mathrm{I}uv}\,\ell n\,\mathrm{P}_{\mathrm{I}uv} \\ &\quad + \Sigma\,\mathrm{N}_{\mathrm{II}uv}\,\ell n\,\mathrm{P}_{\mathrm{II}uv} + \mathrm{C}\end{aligned} \qquad (27)$$

ここで，

$$C = \ell n \frac{N_{\mathrm{I}}}{\prod_{uv} N_{\mathrm{I}uv}!} + \ell n \frac{N_{\mathrm{II}}}{\prod_{uv} N_{\mathrm{II}uv}!} \quad (28)$$

になる。

従って，等化係数k，lの推定値を求める為に解くべき尤度方程式は，(27) 式をk及びlで微分した結果を用いて

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial k} = \Sigma N_{\mathrm{I}uv} \dfrac{1}{P_{\mathrm{I}uv}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial k} P_{\mathrm{I}uv} \\ + \Sigma N_{\mathrm{II}uv} \dfrac{1}{P_{\mathrm{II}uv}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial k} P_{\mathrm{II}uv} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial l} = \Sigma N_{uv} \dfrac{1}{P_{\mathrm{I}uv}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial l} P_{\mathrm{I}uv} \\ + \Sigma N_{\mathrm{II}uv} \dfrac{1}{P_{\mathrm{II}uv}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial l} P_{\mathrm{II}uv} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

で与えられる。

5．計算手順

以上で述べた方法を用いて実際に尺度θを尺度θ^*に等化する為の計算手順をまとめると次の様になる。

① テストX及びテストYに含まれる各項目のパラメーター推定値を用意する。但し，テストXについては尺度θ上の，テストYについては尺度θ^*上の値で表わされているものとする。

② 尺度θを構成した母集団Ⅰからの被験者集団ⅠN_{I}名及び尺度θを構成した母集団Ⅱからの被験者集団ⅡN_{II}名に対して，テストX及びテストYの両方を実施する。

③ 各被験者毎に解答を採点して反応パタンu及びvを求める。

④ 被験者集団Ⅰ及び被験者集団Ⅱについてそれぞれ実際に得られた反応パタン毎の人数$N_{\mathrm{I}uv}$及び$N_{\mathrm{II}uv}$（添字のuvは反応パタンを表わす）を集計する。

⑤ テストX及びテストYの項目パラメーター値と④で求めた各反応パタンに対する人数$N_{\mathrm{I}uv}$及び$N_{\mathrm{II}uv}$を (29) 及び (30) 式に代入して非線形連立方程式を解き，等化係数k，lの周辺最尤推定値k，lを求める。但し，解は数値計算による。

6．シミュレーション・データによる検討

ここでは，等化係数の値が既知であるデータを用いて本研究で提案した等化係数の推定法について検討を加えるが，実際に測定尺度を構成する場面で真の等化係数の値が既知であることはほとんど有り得ないため，予め等化係数の値を設定した上でコンピューター・シミュレーションによって被験者の項目反応データを発生させ，その結果を用いて等化係数の値を推定し，予め設定した等化係数の値と比較する。

すなわち，

① テストXに含まれる項目のパラメーター値は母集団Ⅰで尺度値θが標準正規分布するように原点と単位とが定められた尺度θ上で推定されており，テストYに含まれる項目のパラメーター値は母集団Ⅱで尺度値θ^*が標準正規分布するように原点と単位とが定められた尺度θ^*上で推定されている。

② 母集団Ⅰの尺度値分布は尺度θ^*上では，平均l，標準偏差kの正規分布をするという条件の下で，

③ 母集団ⅠからのランダムサンプルN_{I}名の尺度値θ_i（$i=1$，……，N_{I}），母集団ⅡからのランダムサンプルN_{II}の尺度値θ_i^*（$i=1$，……，N_{II}）を正規乱数を発生させる事によって得る。

④ ③で得られた被験者集団Ⅰ及びⅡそれぞれN_{I}，N_{II}名の各被験者毎にテストX及びYに含まれる全ての項目に対する反応パタンを，一様乱数と項目反応関数とを用いて発生させる。

ここまでで計算手順の①から③までを実行した事になる。

⑤ 計算手順の④に従って人数の集計を実施する。

⑥ 次に，等化係数を推定する為の計算に入るのであるが，初期値の設定法が結果に及ぼす影響を除く為に，初期値には等化係数の真値を用いることにする。

⑦ さらに，計算手順の⑤を実行し等化係数k，lの推定値$\hat{k}$，$\hat{l}$を得る。

シミュレーションはkが1.0，lが0.0という場合（ケースⅠ）とkが0.9，lが-0.8という場合（ケースⅡ）という2つのケースについて実施する。

テストX及びYに含まれる項目は計算時間等の制限を考慮して10項目とした。テストに含まれる各項目のパラメーター値は表1に示した通りである。但し，ケースⅠの場合はテストX及びテストYが同一の尺度上の値でパラメーター値が表わされる訳であるからテストX，Yともに表1に示したパラメーター値を持つ項目から

表1　テストX及びテストYに含まれる項目のパラメーター値

項目番号	識別力（a_j）	困難度（b_j）
1	0.7	−2.0
2	0.7	−1.5
3	0.7	−1.0
4	0.7	−0.6
5	0.7	−0.2
6	0.7	0.2
7	0.7	0.6
8	0.7	1.0
9	0.7	1.5
10	0.7	2.0

構成された平行テストになるが，ケースⅡの場合はテストXに含まれる項目は尺度 θ 上で，テストYに含まれる項目は尺度 θ^* 上で表1に示したパラメーター値を持つのであるから平行テストにはならないことに注意を要する。

各ケースとも被験者集団ⅠとⅡとが同数になるという条件の下で，被験者数による推定値の変化を見る為に総被験者数を250，500，1000，2000名の4種類設定した。そして，それぞれの被験者数毎にシミュレーションを10回繰り返した。

ケースⅠ及びⅡについてシミュレーションを実施した結果は表2及び表3に示した通りである。

ケースⅠについては，10回のシミュレーション結果の

表2　周辺最尤法による等化係数の推定結果（Ⅰ）　　（$k=1.0$，$l=0.0$ の場合）

人　数	250		500		1000		2000	
等化係数	$\hat{k}$	$\hat{l}$	$\hat{k}$	$\hat{l}$	$\hat{k}$	$\hat{l}$	$\hat{k}$	$\hat{l}$
1	1.049	−0.061	1.027	0.007	0.873	−0.001	1.007	0.003
2	1.099	0.246	1.043	0.038	0.997	−0.015	1.012	0.001
3	1.002	0.118	1.023	−0.070	1.026	−0.022	0.993	−0.005
4	0.908	0.080	0.949	0.040	1.036	0.004	1.048	0.014
5	0.966	0.017	0.989	−0.024	1.049	0.016	0.978	−0.000
6	0.994	0.019	0.961	−0.025	0.996	−0.040	1.010	0.011
7	1.009	−0.038	1.069	−0.012	0.922	0.043	0.991	−0.039
8	0.945	0.005	1.000	0.033	0.971	0.024	0.996	0.012
9	1.237	0.055	0.940	0.001	1.029	0.013	1.005	0.036
10	1.029	−0.086	1.011	0.010	0.998	−0.021	1.010	−0.002
平　均	0.924	0.036	1.001	−0.000	0.990	0.000	1.005	0.003
標準偏差	0.287	0.092	0.040	0.032	0.053	0.024	0.018	0.018
相関係数	−0.740		−0.106		−0.237		0.366	

表3　周辺最尤法による等化係数の推定結果（Ⅱ）　　（$k=0.9$，$l=-0.8$ の場合）

人　数	250		500		1000		2000	
等化係数	$\hat{k}$	$\hat{l}$	$\hat{k}$	$\hat{l}$	$\hat{k}$	$\hat{l}$	$\hat{k}$	$\hat{l}$
1	0.790	−0.765	0.852	−0.820	0.900	−0.854	0.901	−0.779
2	0.828	−0.767	0.928	−0.868	0.884	−0.816	0.900	−0.788
3	0.888	−0.870	0.862	−0.783	0.889	−0.778	0.924	−0.820
4	0.879	−0.830	0.921	−0.764	0.888	−0.783	0.911	−0.797
5	0.765	−0.847	0.907	−0.803	0.877	−0.793	0.928	−0.792
6	0.781	−0.680	0.830	−0.799	0.962	−0.776	0.924	−0.799
7	0.921	−0.819	0.859	−0.725	0.872	−0.727	0.879	−0.801
8	0.875	−0.804	0.934	−0.810	0.890	−0.815	0.890	−0.807
9	0.939	−0.824	0.895	−0.765	0.870	−0.760	0.927	−0.820
10	0.928	−0.827	0.881	−0.859	0.888	−0.795	0.888	−0.749
平　均	0.859	−0.803	0.887	−0.800	0.892	−0.790	0.907	−0.795
標準偏差	0.061	0.051	0.034	0.041	0.025	0.033	0.017	0.020
相関係数	−0.513		−0.240		−0.147		−0.469	

平均値が被験者数の小さい方から順に，$\hat{k}$ では 0.924, 1.001, 0.990, 1.005, $\hat{l}$ では0.036, 0.000, 0.000, 0.003であり，標準偏差は同じく $\hat{k}$ では0.287, 0.040, 0.053, 0.018, $\hat{l}$ では0.092, 0.032, 0.024, 0.018である。平均値は何れも真値に極めて近い値を示しており，しかも標準偏差は被験者数が増加するに従って $\hat{k}$, $\hat{l}$ 共に小さくなる傾向が見られ，被験者数が500名を超えた場合にはほぼ0.05以下になっている。

ケースⅡについては，10回のシミュレーション結果の平均値が被験者数の小さい方から順に，$\hat{k}$ では 0.859, 0.887, 0.892, 0.907, $\hat{l}$ では −0.803, −0.800, −0.790, -0.795であり，標準偏差は同じく $\hat{k}$ では0.061, 0.034, 0.025, 0.017, $\hat{l}$ では0.051, 0.041, 0.033, 0.020である。平均値はケースⅠの場合と同様に何れも真値に極めて近い値を示しており，標準偏差についても被験者数が増加するに従って $\hat{k}$, $\hat{l}$ 共に小さくなる傾向が見られ，その値は全体としてほぼ0.05以下になっている。

$\hat{k}$ と $\hat{l}$ との相関係数の値は，ケースⅠで被験者数の小さい方から順に −0.740, −0.105, −0.237, 0.366であり，ケースⅡで同じく順に −0.513, −0.240, −0.147, −0.469である。全体として負の値が多いが正の値を示す場合もあり，また，負の場合でもその値は −0.106から −0.740まで散らばっており，被験者数との関連も見られない。従って，今回の結果から特に $\hat{k}$ と $\hat{l}$ との間に意味のある相関関係が存在すると言う事はできない。

$\hat{k}$ と $\hat{l}$ 共に各被験者数毎に求められた標準偏差の値が小さいので，各平均値を基に検討を進める。すなわち，各被験者数毎に求められた $\hat{k}$ 及び $\hat{l}$ それぞれの平均値を用いて尺度 θ を尺度 θ^* に等化する為の変換式は，ケースⅠの被験者数250名の場合から順に，

$$\theta^* = 0.924\theta + 0.036 \quad (31)$$
$$\theta^* = 1.001\theta + 0.000 \quad (32)$$
$$\theta^* = 0.990\theta + 0.000 \quad (33)$$
$$\theta^* = 1.005\theta + 0.018 \quad (34)$$
$$\theta^* = 0.859\theta - 0.803 \quad (35)$$
$$\theta^* = 0.887\theta - 0.800 \quad (36)$$
$$\theta^* = 0.892\theta - 0.790 \quad (37)$$
$$\theta^* = 0.907\theta - 0.975 \quad (38)$$

である。これら (31) 式から (38) 式を用いて尺度 θ の値が −3.0, −2.0, −1.0, 0.0, 1.0, 2.0, 3.0の時に，尺度 θ^* に等化した結果得られる値を表4及び5に示した。その結果，何れの場合も等化係数の真値で等化した時に近い値が得られ，被験者数が250名の場合を除いてケースⅠ，ケースⅡ共に小数点以下第2位を四捨五入すれば等化係数の真値を用いて等化した時と等しい結果が得られる。尺度 θ 及び尺度 θ^* はそれぞれ被験者母集団Ⅰ及びⅡで尺度値分布の平均が0.0，標準偏差が1.0になるように構成されていたのであるから，尺度上における0.1の差はZ得点に直すと1点にしかならない。この程度の違いが実際の測定場面で測定結果に何らかの影響を及ぼすとは考えられず，(31) 式から (38) 式を用いて尺度 θ の値を尺度 θ に等化した結果は実用上十分に満足できるものである。

7．結論及び今後の課題

以上の結果では本研究で示した共通被験者デザインにおける周辺最尤推定法による等化係数の推定法は被験者

表4　等化による尺度値のずれ（Ⅰ）　　（$k=1.0$, $l=0.0$の場合）

尺度	θ	−3.000	−2.000	−1.000	0.000	1.000	2.000	3.000
真値で等化		−3.000	−2.000	−1.000	0.000	1.000	2.000	3.000
被験者数	250	−2.736	−1.812	−0.888	0.036	0.960	1.884	2.808
	500	−3.003	−2.002	−1.001	0.000	1.001	2.002	3.003
	1000	−2.970	−1.980	−0.990	0.000	0.990	1.980	2.970
	2000	−3.012	−2.007	−1.002	0.003	1.008	2.013	3.018

表5　等化による尺度値のずれ（Ⅱ）　　（$k=0.9$, $l=-0.8$ の場合）

尺度	θ	−3.000	−2.000	−1.000	0.000	1.000	2.000	3.000
真値で等化		−3.500	−2.600	−1.700	−0.800	0.100	1.000	1.900
被験者数	250	−3.380	−2.521	−1.662	−0.803	0.056	0.915	1.774
	500	−3.461	−2.574	−1.687	−0.800	0.087	0.974	1.861
	1000	−3.466	−2.574	−1.682	−0.790	0.102	0.994	1.886
	2000	−3.516	−2.609	−1.702	−0.795	0.112	1.109	1.926

数が500名程度を超える場合には特に問題となる結果は得られなかった。したがって，本等化法の有効性について今後検討を続ける意味があるものと言える。

今回の報告では推定法の提案をし，シミュレーション・データによる数値例を示したにすぎず，しかも，テストに含まれる項目の数が10項目であり，実際の測定場面で用いられるテストと比較して項目数が少ない，という問題点がある。これはコンピューターの計算時間等との関係から受けた制約であるが，これらの点について再検討をして，さらにテストに含まれる項目のパラメーター値を組織的に変化させたり，同一のデータを用いて共通被験者デザインにおける他の諸等化法との比較検討を行なうなどの必要がある。これらの点が引き続き検討すべき課題として残された。

文　　献

Hambleton, R. K. & Swaminathan, H. 1985 Item Response Theory. —Principles and Applications., Kluwer Nijhoff Publishing.

Kendall, M. & Stuart, A. 1973 The Advanced Theory of Statistics, 3rd Edition., Charles Griffin & Co. Ltd.

Marco, G. L. 1977 Item Characteristic Curve Solutions to Three Intractable Testing Problems., *Journal of Educational Measurement.*, **14**, 139-160.

野口　裕之　1986　共通被験者の反応パタンを利用した潜在特性尺度の等化法.，教育心理学研究.，**34**，315-323.

Wingersky, M. S., Barton, M. A. & Lord, F. M. 1982 LOGIST User' s Guide., Educational Testing Service.

附記

本研究の計算には，名古屋大学大型計算機センターのFACOM M780／20 システム及び東京大学大型計算機センターのHITAC M682H システムを利用した。特に，NUMPAC (NAGOYA University Mathematical Library Package) の中から数値積分の為のサブルーチン INFIND 及び非線形連立方程式の解を求める為のサブルーチン BROYDD を，TLIB (東大開発ライブラリー) の中から乱数発生の為のサブルーチン G5／TC／UNIF 及び G5／TC／NORM を利用した。それぞれについての具体的な計算方法は各ライブラリーの手引きを参照されたい。

(1990年8月31日　受稿)

ABSTRACT

Marginal Maximum Likelihood Estimation of the Equating Coefficients for Two IRT Scales Using Common Subjects' Design

Hiroyuki G. NOGUCHI

In the present paper, an equating method of two scales upon two separate tests using common subjects' item response patterns for both tests is proposed, and examined its applicability in actual IRT scales' equating situations.

We assume that there are two IRT scales based upon test X and Y respectively. In the new method, each subjects' item response patterns for various tests are obtained, and then marginal maximum likelihood estimates of the equating coefficients k, l are extracted from these data, while, simultaneous maximum likelihood estimates were extracted in Noguchi (1986). The equating coefficients k, l are estimated by solving simultaneous non-linear equations, (29) and (30).

In this paper, test X and Y are formed with 10 ideal test items respectively. Item parameters of them are given in Table 1.

By computer simulational item response data for these tests, validity of this method is examined in two situations, such as changing the true equating coefficients (k=1.0, l=0.0 and k=0.9, l=−0.8) and the number of subjects (N=250, 500, 1000, 2000).

As a consequence, this new equating method proves to be valid in almost all cases in the simulational studies.

Key words: item response theory, equating, item parameters, marginal maximum likelihood estimation, common subjects' design