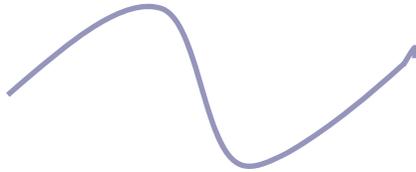


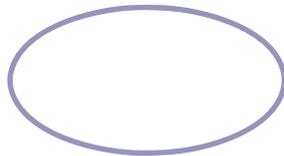
## 3.2 弦理論と現代数学

cf. [G][大3]

- 弦理論: 万物は弦(string)からできている
- 弦のさまざまな振動モード $\Leftrightarrow$ さまざまな素粒子



開弦(open string) $\Leftrightarrow$ 素粒子



閉弦(closed string) $\Leftrightarrow$ 重力

- すべての素粒子を含み、然るべき対称性を備える
- ブラックホールの理解に重要な知見を与えた(重力の量子論として本領発揮?)
- 新しい数学を次々に「予言」

# 弦理論のはじまり

- 1960年代：双対共鳴模型

核内複合粒子の実験事実の説明

物理的意味付け→弦！

[南部・後藤・サスカインド・ニールセン・・・(1970年頃)]

- 1974年：重力を含む！ [米谷・シャーク・シュワルツ]

- さまざまな困難

10次元時空でしか定義されない

(現実はもちろん4次元！6次元分はどこへ行った？)

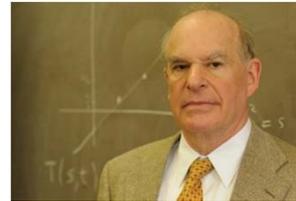
実験による直接的検証はほぼ不可能？

量子論的な問題(アノマリー等)

# 第1次ストリング革命

- 1984年: アノマリー相殺メカニズムの発見

by グリーン[49]・シュワルツ[50]



- 1980年代後半: カラビ・ヤウ(CY)空間コンパクト化

10次元 = 4次元時空 + 6次元CY空間(内部空間)

素粒子の標準模型の実現・現象論への応用

ミラー対称性の発見 → ホモロジカル・ミラー予想

摂動論的弦理論の完成(5種類)

by コンチェヴィッチ  
(1994年) [51]

その後の数学に革命的影響



# 位相的場の理論(1982~1989年)

- トポロジカル・ツイストという魔法をかける
- 超対称場の理論 → 位相的場の理論(おもちゃ)
- BPS状態(エネルギー極小状態)だけを拾う理論
- 物理量が位相不変量になる(距離依存性なし!)

(例) Wittenのモース理論: 分配関数 = オイラー数

Donaldson不変量 → 4次元図形の精密な分類

- アティヤにより数学的に公理化される
- 位相的弦理論の計算方法

の確立(93年)

[ベルシャドスキー・チェコツティ  
・大栗・バッフア]



Michael Atiyah  
[53]



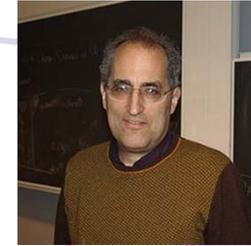
Simon  
Donaldson  
[52]

# 第2次ストリング革命

- 1994年: 双対性の進展



Nathan Seiberg [54]



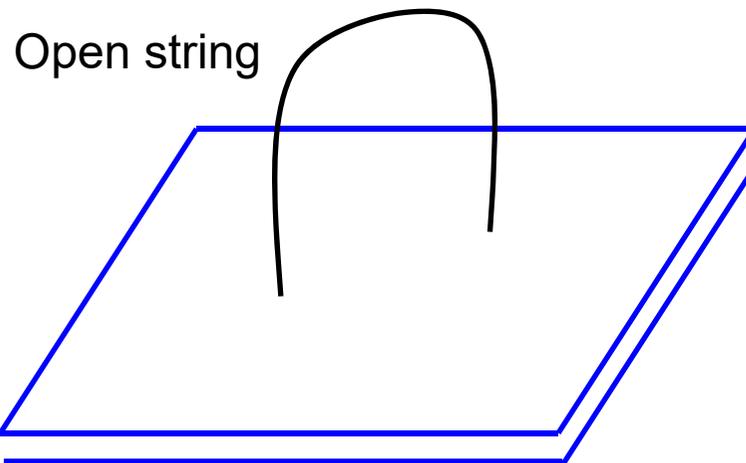
Edward Witten [55]

ザイバーグ・ウィッテン理論 → 幾何学へ多大な影響

S双対性テスト[バッフア・ウィッテン] → 数論との接点

- 1995年: M理論の提唱[ウィッテン]

- 1995年: Dブレーン(弦理論のソリトン)ポルチンスキー[56]

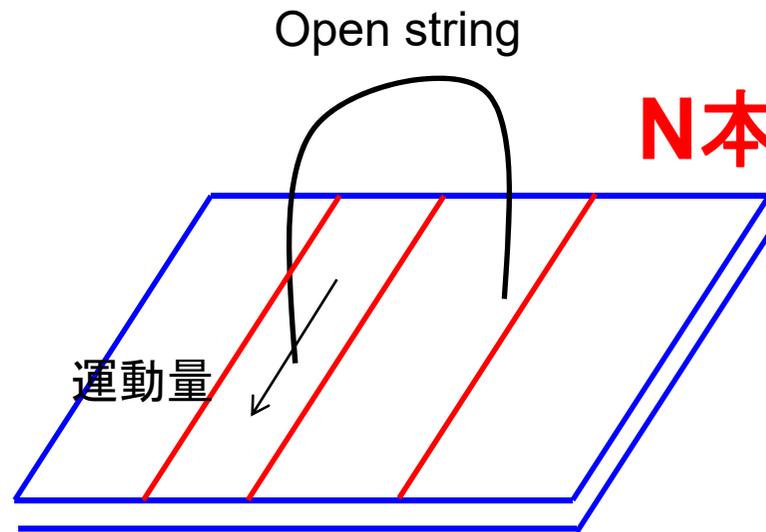


N枚重なった  
Dpブレーン  
⇒ (p+1)次元の  
U(N)ゲージ理論  
が乗っかる



Dpブレーン: 空間p次元に広がった「板状」物体

- 1996年：Dブレーンを用いたブラックホール・エントロピーの統計力学的理解  
[ストロミンジャー・ヴァッフア],  
[キャラン・マルダセナ]
- ・Dブレーンを大量に重ねるとブラックホールになる
- ・開弦の自由度の数え上げでエントロピーの統計力学的導出が可能(エントロピーの微視的起源)



**N本のD1ブレーン(円に巻き付く)**

この状況は5次元のBH:

$S=(EH\text{の面積})$

一方開弦の自由度の計算:

$S=(\text{求まる})=\text{完全一致!}$

**N枚のD5ブレーン(5方向が円に巻き付く)**

# ADHM構成法再訪

## ゲージ理論の数学の最高峰の成果の一つ

4次元ASDYang-Mills方程式

ADHM方程式(≡0次元ASDYM)

$$F_{z_1 \bar{z}_1} + F_{z_2 \bar{z}_2} = 0$$

$$F_{z_1 z_2} = 0 \quad N \times N \text{ PDE}$$

$$[B_1, B_1^+] + [B_2, B_2^+] + I I^+ - J^+ J = 0$$

$$[B_1, B_2] + I J = 0$$

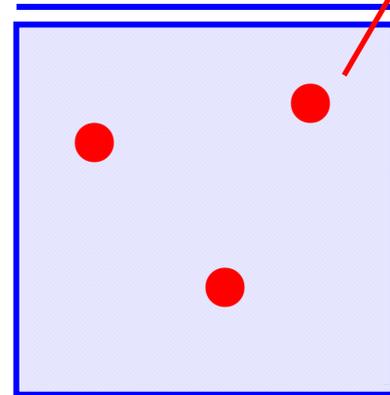
$k \times k$ 行列方程式

1:1

解: インスタントン  
( $G=U(N)$ ,  $C_2 = k$ )

BPS条件

N枚のD4 ブレーン



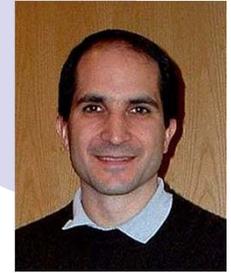
解: ADHMデータ  
( $G=U(k)$ )

BPS条件

Dブレーンから  
記述すると  
自明!

k個のD0 ブレーン

# 1997年: AdS/CFT対応(マルダセナ)



Juan  
Maldacena  
[57]

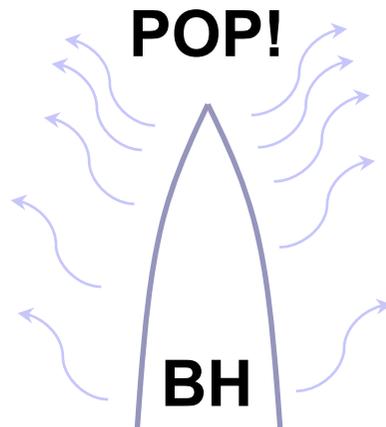
- ホログラフィック原理の具体的実現

バルクの(d+1)次元重力理論(AdS空間)

=境界のd次元ゲージ理論(共形場理論)

- BPS状態については検証完了
- Non BPS状態について研究進展中
- BHの情報損失問題について重要な知見

バルクの重力理論 ← 等価 → 境界のゲージ理論



ユニタリな  
時間発展  
(情報を保つ)

## ● ブラックホールの情報損失問題再訪

量子力学に従う物質場はユニタリな時間発展をする  
(因果律を守り、過去から未来へ情報を保つ)

ブラックホールに吸い込まれた物質の情報は一様な  
ホーキング放射となり、情報損失が起こるのでは？

→2つの立場:このような状況では

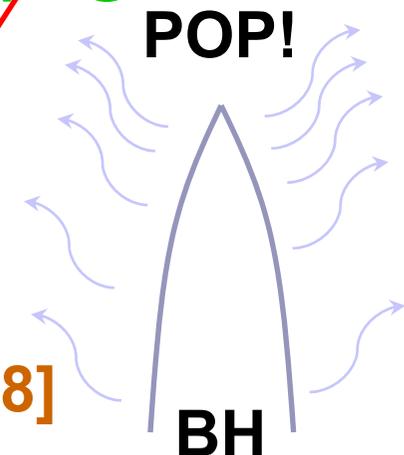
(i) 量子力学は破たんし情報は損失する  
(ホーキングはこちらに賭けた)

(ベースボール)  
百科事典

(ii) 量子力学は破たんせず情報は保たれる  
(プレスキルはこちらに賭けた)

2004年、ホーキングは自ら  
情報が損失しないという

研究発表を行った。ホーキングの負け[58]



# 以後の発展(主に現代数学との関連)

- 1999年: 非可換空間上のゲージ理論  
[ザイバーク・ウィッテン] 数学者達
- 2002年: ネクラソフ予想 → が解決 [中島・吉岡]等
- 2004年: 大栗・ストロミンジャー・バッファ予想  
(BHエントロピーについての公式)
- 2006年: カプスチン・ウィッテン → 電磁双対性とラングランズ双対性との深い深い関係(弦理論山と数論山が高い高いところにつながっている!?) cf.[F]
- 2008年: コンチェヴィッチ・ソイベルマン壁越え公式
- 2009年: アルデイ・ガイオット・立川予想 → 数学者達が解決
- ……以後ひたすら(果てしなく?)続く

素粒子論研究の現在の状況  
それぞれ好き勝手に山登りしている  
(物理山と数学山は予想以上に高く楽しい)



みなさんもぜひ一緒に登りましょう！  
(ちょっとしたトレッキングもOK)