担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

参考資料

作成日：August 2, 2015　Updated：March 13, 2017　Version：1.0　実施日：August 5, 2015

物体の運動法則について

ここでは質点の運動について議論する．(質点とは大きさのない物体のことである．)

時刻 t での質点の位置を 3 次元ベクトル $\vec{x}(t)$ で表す．$\vec{x}(t)$ から重要な物理量が定義される：

- 時刻 t での質点の**速度** $\vec{v}(t)$(= 位置 $\vec{x}(t)$ の時間変化率)：

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

- 時刻 t での質点の**加速度** $\vec{a}(t)$(= 速度 $\vec{v}(t)$ の時間変化率)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$$

[物体の運動法則 (ニュートン)]

- **第一法則 (慣性の法則)**：質点に力が加わらなければ, 質点は等速直線運動を続ける．(特に静止している質点は静止したままである．)
- **第二法則 (運動方程式)**：質点に力が加わると加速度が生じる．この加速度 $\vec{a}$ は, 加えられた力の総和 $\vec{F}$ に “比例” し, 質点の質量 m に反比例する：$m\vec{a} = \vec{F}$
- **第三法則 (作用・反作用の法則)**：物体 A が物体 B から力 $\vec{F}$ を受けるとき，物体 B は物体 A から力 $-\vec{F}$ を受ける．

[コメント] 運動方程式は，t についての 2 階微分を含む関係式である．(t についての 2 階の微分方程式という．) 運動方程式を解くというのは，すなわちこの微分方程式を解く (=「積分する」) ことに他ならない．

例題 1. (物体の自由落下運動)

ガリレオ・ガリレイは，高さ h の高さから物体を初速度 0 で自由落下させる実験を行い，以下の結果を得た (落体の法則)：

(1) 物体が地面に着地するまでの時間 T は落下する物体の質量 m に依存しない．

(2) 地面までの距離 h は地面に着地するまでの時間 T の 2 乗に比例する．

運動方程式を解いてこの実験事実の説明 (仮説の検証) を行え．なお，質量 m の物体が地球から受ける力は m に比例し，その比例定数を g (重力加速度) と表す．

【解答】 黒板で説明

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

微分

$f(x)$ をなめらかな関数とする．$y = f(x)$ の**導関数**を以下で定義する．(関数 $f(x)$ の導関数を求めることを，$f(x)$ **を微分する**という．)

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (y = f(x) \text{ の導関数は } \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx} \text{ とも書かれる.})$$

- **例**：$f(x) = x^n$ のとき $f'(x) = nx^{n-1}$ (n は自然数).
- **例**: $f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$. (e はネピアの数で $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\cdots$.)
- **例**：$f(x) = e^{W(x)}$ のとき $f'(x) = W'(x)e^{W(x)} = W'(x)f(x)$. $\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - W'\right) f = 0$.

参考：ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei, 1564 年~ 1642 年, イタリア)

- 直観ではなく実験事実や観測結果に基づいて数学的記述により自然現象を解明 (落体の法則，振り子の等時性の発見など)．「自然という書物は数学の言葉で書かれている.」(近代科学の父と呼ばれる.)
- 望遠鏡を自ら製作し，精密な天体観測を行う．(天文学の父とも呼ばれる.)
- 主要著書：「天文対話」「新科学対話」
- 天動説ではなく地動説を唱えたためローマ教皇庁に罰せられる (ガリレオ裁判)

参考：アイザック・ニュートン (Isaac Newton, 1642 年~ 1727 年, イギリス)

- ケンブリッジ大学 ルーカス教授
- 万有引力の法則の発見
- ニュートン力学の確立 (微分積分学へ多大な影響)
- 主要著書：「自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)」

参考：数学と物理の交流 (対談記事)

- 「[対談] 数学と物理の対話／超弦理論を中心として」数学セミナー 1994 年 3 月号 (江口徹，土屋昭博)
- 「座談会 幾何学と物理の対話」数学セミナー 1997 年 7 月号＆ 8 月号 (河合俊哉, 清水勇二, 深谷賢治, 松尾泰).
- 「interview 深谷賢治教授に聞く (聞き手：齋藤恭司)」Kavli IPMU News No.22 June 2013. (「深谷 IPMU」などで検索＆ダウンロード可能)
- 「Round Table Talk: エドワード・ウィッテン博士に聞く (大栗 博司, 戸田 幸伸, 山崎雅人))」Kavli IPMU News No.28 December 2014. (「エドワードウィッテン IPMU」などで検索＆ダウンロード可能)

参考文献

- 吉永良正「数学・まだこんなことがわからない」(講談社ブルーバックス)
- 小平邦彦「怠け数学者の記」(岩波書店)
- ロジャー・ペンローズ「皇帝の新しい心」(みすず書房)
- 立花隆「小林・益川理論の証明」(朝日新聞出版)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

トポロジーとオイラー数

トポロジー (topology) とは，(切り貼りなしの) 連続変形でうつり合うもの同士は同じとみなして図形の分類を行う, 幾何学の一分野である.
通常，図形の連続変形で不変な量 (位相不変量) を指標として分類を行う.
(位相不変量の例：オイラー数，ベッチ数, ホモロジー群，ホモトピー群, ...)

定理 1. M を向き付け可能な 2 次元閉曲面とする．このとき, M は次のいずれかに連続変形でうつり合う: 球面 S^2, トーラス (ドーナツの表面) T^2, g 人乗り浮き輪 Σ_g $(g = 2, 3, 4, \cdots)$.

定理 2. 向き付け可能な 2 次元閉曲面 M を多角形 (多面体) 分割したとき, 以下で定義されるオイラー数 $\chi(M)$ は位相不変量であり，定理 1 の分類に十分な指標となる.

$$\chi(M) = v - e + f$$

ただし，v, e, f はそれぞれ，分割された多角形の頂点, 辺, 面の数を表す．また，オイラー数は M の多角形分割の仕方によらない.
凸多面体に対して $v - e + f = 2$ が成り立つというのがオイラーの定理であるが，これは上記の $\chi(S^2)$ の値に相当する. (なお χ はギリシャ文字の一つで「カイ」と読む：下表参照)

問題 1. (M の多角形分割とオイラー数) 定理 2 を確認しよう. (詳しくは黒板にて説明.)

(1) 球面 S^2 を適当に多角形分割し，$v - e + f = 2$ を確かめよ.

(2) 多角形分割により, トーラス T^2 のオイラー数 $\chi(T^2)$ を求めよ.

(3) 同様に, g 人乗り浮き輪 $\chi(\Sigma_g)$ のオイラー数 $\chi(\Sigma_g)$ を求めよ.

おまけ：ギリシャ文字の表

大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ, ϱ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ, (ς)	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	upsilon
E	ϵ, ε	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ, φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ, ϑ	theta	Π	π, (ϖ)	pi	Ω	ω	omega

手書きの際，以下の区別が付くように工夫しましょう：ϕ と φ と ψ, δ と σ, ξ と ζ 等.
またアルファベットと似た文字にも注意しましょう：γ と r，θ と $\mathcal{O}$，ι と i，κ と k，μ と u，ν と v，ρ と p，τ と t，χ と x，ω と w 等.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

モース理論

問題 2. (高さ関数とモース理論)

2 次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 上の関数 $f(x,y,z)=z$ を考えよう．これは球面上の点の z 座標の値を示す関数であり，高さ関数と呼ばれる．

(1) $df=0$ となる球面上の点を臨界点と呼ぶ．(今の場合は，球面の接平面が水平 (xy 平面と平行) という条件と等価．) 臨界点を 2 次元球面に図示せよ．

(2) 各臨界点における指数 (Morse 指数とも言う) を以下のように定義する．

z 軸を鉛直下向きにとり，z の正の方向に図形を水につけていったときに球面の表面に出来る水の流れが図 1 のように特異な振る舞いをするところで指数を図 1 の通り定義する．(水の音が「ぴちゃっ」と鳴るところの指数が 2，「とっぷん」と鳴るところが指数 1，「こぽっ」と鳴るところが指数 0 である.) この特異な点はちょうど $f(x,y,z)$ の臨界点に対応する．指数 k の臨界点の個数を m_k と書くとき，次の量 $m_0 - m_1 + m_2$ を計算し，それがオイラー数 $\chi(S^2)$ に一致することを確かめよ．

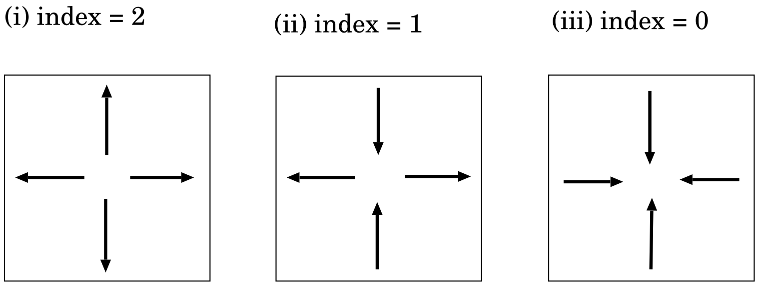


図 1: 臨界点における指数 (index) の定義

(3) 球面がゴム膜からできているとし，それを (破らないように) 適当に (なめらかに) 連続変形したとき，いかなる変形を行おうとも $\chi(S^2)$ の値は変わらないことをいくつかの例で図示して確認せよ．

(4) 2 次元トーラス T^2 の上の高さ関数に関しても (1)~ (3) と同様の考察を行い，$\chi(T^2) = m_0 - m_1 + m_2$ が成り立つことを示せ．またこの値はトーラスのなめらかな連続変形で変わらないことを図で確認せよ．(ドーナツは立てて考察するとよい.)

(5) g 人乗り浮き輪 Σ_g についても前問と同様の考察を行え．

参考文献

- 瀬山士郎「トポロジー：柔らかい幾何学」(日本評論社)
- 長野正「曲面の数学」(培風館)
- 松本幸夫「モース理論の基礎」(岩波書店)
- ミルナー「モース理論」(吉岡書店)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

特殊相対性理論の補足

問題 3. (ローレンツ変換の導出) 特殊相対性理論を空間 1 次元，時間 1 次元の設定で考え，光速不変の原理から座標変換の満たすべき関係式 (ローレンツ変換) を導こう．

いま互いに一定の速さ v で相対運動している 2 つの慣性系 (座標系) K, K' を考える．それらの系における空間座標と時間座標の組をそれぞれ (x,t), (x',t') とする．

慣性系 K と K' の空間座標の原点が一致した瞬間をそれぞれの系の時間座標の原点に選ぶ．(すなわちこのとき $t=t'=0$.) $t=t'=0$ に原点から放出された光が真空中を伝わるとき，光速不変の原理より，$x^2=c^2t^2$, $x'^2=c^2t'^2$ が成り立つ．すなわち，

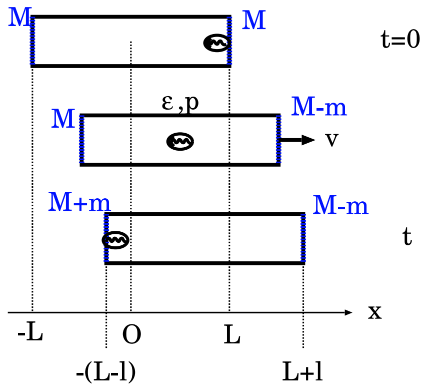
$$x'^2-c^2t'^2=x^2-c^2t^2$$

が成り立つ．求める座標変換の式を

$$x'=A(x-vt),\ t'=Bt+Cx$$

とおき，係数 A,B,C を与えられた量で表せ．ただし，$v\to 0$ の極限でガリレイ変換 $x'=x-vt, t'=t$ に一致することを用いてよい．

問題 4. (質量とエネルギーの等価性)



以下の問いにしたがって，質量とエネルギーの等価性を証明しよう．両端にそれぞれ質量 M の発光体 (右) と吸収体 (左) のついた筒を考える．長さは $2L$ で筒自体の質量は 0 とする．時刻 0 に右から放出された光子 (エネルギー ε, 運動量 p) が, 筒の中を飛んで時刻 t に左で吸収されたとする (右図参照).

(1) 運動量保存則によれば，筒は発光と同時にその反動で右に動き，吸収によって再び静止する．その間の筒の速度を v，移動距離を $l(=vt)$ としたとき，その間の筒と光子が移動した距離の関係式から，v/c を l,L で表せ．

(2) この 2 物体と筒よりなるシステムには外力が働いておらず，また最初は静止していたのであるから，重心は不動のはずである．したがって，光子の移動に伴って，右から左に質量が移動したと考えなければならない．すなわち，右での光子の発生 (エネルギー $\Delta E=\varepsilon$ の発生) の際には，$\Delta M=m$ だけ発光体の質量が減少し，左での光子の吸収 (エネルギー $\Delta E=\varepsilon$ の消滅) の際には，$\Delta M=m$ だけ吸収体の質量が増加したと考えなければならない．その途中は全体として質量 m が消滅し，それが光子のエネルギーとなっていると考えられる．

システムの運動量保存則を M,m,v,p の言葉で書き表せ．

(3) システムの重心不動の条件を, M,m,L,l の言葉で書き表し，これを (1) の結果に代入することで，v/c を m,M で表せ．

(4) (3) の結果を (2) の結果に代入し，$\varepsilon=mc^2$ を導け．($cp=\varepsilon$ が成り立つことは既知としてよい.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

[**コメント**] ここで紹介した議論は1905年に光量子仮説を提唱したアインシュタインによる. (出典は Max Born の量子力学の教科書(洋書).) 物質からの光の放出・吸収過程から, 相対性理論の驚くべき帰結であるところの質量とエネルギーの等価性が導かれる.

本問題は, 山本義隆「**大学受験必修** 物理入門」(駿台文庫) で紹介されているものをそのまま問題化したものである. 解答が知りたい人は(高校3年の物理学を最後まで習得したのち) 参照するとよい. なお, 私はこの本との出会いによって物理学が真に面白いものであることを生まれて初めて知った.

関数のべき級数展開 ($x=0$ での無限テイラー展開)

なめらかな関数 $f(x)$ が以下のように無限和で表されるとき,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

これを関数の $f(x)$ のべき級数展開という. 無限和は必ずしも収束するわけではなく，この展開が成り立つためには，条件が加わることがある.

問題 5. (関数のべき級数展開) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $(x\neq 1)$ のべき級数展開を求めたい.

(1) まず, 有限和 $S_n:=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ を考える. これと xS_n の表式を辺々引くことで簡単な形にまとめよ.

(2) $|x|<1$ ならば, $x^n\to 0$ $(n\to 0)$ が成り立つことに注意し，べき級数展開を考察せよ.

問題 6. (関数のべき級数展開とオイラーの公式)

(1) 指数関数 e^x のべき級数展開は任意の x に対して以下で与えられる.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots.$$

ただし $n!:=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1,\ 0!=1$. このとき, $\dfrac{de^x}{dx}=e^x$ が成り立つことを確認せよ. (定数の微分は0, べき関数の微分は $\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ である.)

(2) 三角関数のべき級数展開は任意の x に対して以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.\\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots.\end{aligned}$$

$\sin x$ を微分すると $\cos x$ と一致することを確認せよ. $\cos x$ を微分するとどうか？

(3) 上記のべき級数展開は実は x が複素数の場合にも成り立つ. $x=i\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$ を代入し, オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を導け. (i は虚数単位で $i^2=-1$ を満たす.)

(4) 指数関数の指数法則 $e^{z+w}=e^ze^w$ が任意の複素数 z,w について成り立つ. $z=i\alpha$, $w=i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ を代入し, 三角関数の加法定理を導け.