

可積分系とゲージ場の理論*

浜中 真志 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

1 場の理論における可積分系とは？

可積分系とは何だろう？昔からしばしば取り上げられる問いだが，その答えは人それぞれである [13, 19]. ただ，これらに共通した性質として背後に潜む大きな対称性がある. 有限自由度の Hamilton 系では Liouville-Arnold の定理があり，系の自由度と同じ数の (独立な) 保存量が存在すればある種の可積分性が保証される. これらは通常 Noether の定理を通じてラグランジアン of 隠れた対称性の帰結として理解される. KP 方程式, KdV 方程式など場の理論の可積分系を統一的に取り扱うソリトンの佐藤理論においては，解空間の持つ無限次元の対称性が可積分性の起源であり，無限次元代数の言葉で見事に記述される. これは運動方程式の対称性であってラグランジアン of 対称性ではない. Lagrange 形式での記述は可能だろうか？Noether の定理の帰結として無限個の保存量が導出できるのだろうか？アノマリーという現象はあるのだろうか？もっと別の視点から統一的に理解する枠組みはないだろうか？

本稿では，ゲージ場の理論と (古典) 可積分系との不思議なつながりについて紹介し，ツイスター理論の枠組みから可積分性の起源を考察する. 紙数の制約のため原論文への引用をかなり省略した. (興味ある方は参考文献の巻末論文リストなどをご参照ください.)

2 Ward のつぶやき

1985 年に R.Ward 氏は，可積分系とゲージ理論を結ぶ大変興味深い予想をつぶやいた：

「可積分あるいは可解とみなされる方程式の多く (ひょっとするとすべて?) は，反自己双対なゲージ場の方程式 (あるいはその一般化) からリダクションによって得られるかもしれない。」 [17]

ここで言う「反自己双対なゲージ場の方程式」は 4 次元の反自己双対 Yang-Mills 方程式のことである. この方程式に対してはツイスター理論での取扱いが大きな成功を収めてお

*この解説は日本の一般向け雑誌の 2017 年 11 月号に掲載された以下の記事に基づく： 浜中 真志, “可積分系とゲージ場の理論”, 「数理科学」 Vol.55-11 (No.653), 49-55.

り, ツイスター理論の可積分系への応用という新しい潮流が湧き起こった. その後の精力的な研究により, 主要な可積分系のほとんどが実際にリダクションから得られることが分かり, 1996 年出版の Mason & Woodhouse のモノグラフ [12] には, ツイスター理論の取扱いも含めて非常に多くの具体例がぎっしりと体系的にまとめられている.

3 反自己双対 Yang-Mills 方程式

まず主役の反自己双対 Yang-Mills 方程式を可積分系の枠組みから定義する. 4 次元時空の座標を複素化して $z, w, \tilde{z}, \tilde{w}$ と書く. 計量を $ds^2 = dzd\tilde{z} - dwd\tilde{w}$ で与えれば, 実スライス: $\tilde{z} = \bar{z}, \tilde{w} = -\bar{w}$ の場合が Euclid 空間, $\tilde{z} = \bar{z}, \tilde{w} = \bar{w}$ あるいは $\tilde{z}, z, \tilde{w}, w \in \mathbb{R}$ の場合が不定値計量 (+ + - -) の空間に対応する. ゲージ群を $G = GL(N, \mathbb{C})$ とし共変微分を, $D_w = \partial_w + A_w$ のように表す. ($A_w(x)$ はゲージ場で, $N \times N$ 行列値関数. 引き数の x は 4 次元座標を表す.)

ここで以下の線形系を考える.

$$\begin{aligned} L\varphi &:= (D_w - \zeta D_{\tilde{z}})\varphi = 0, \\ M\varphi &:= (D_z - \zeta D_{\tilde{w}})\varphi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ζ はスペクトル・パラメーターと呼ばれる複素数である. この方程式系は自由度の点で過剰であるが, 両立条件 $[L, M] = 0$ を課すことで解 $\varphi(x; \zeta)$ が N 個定まる. (このとき φ は $N \times N$ とみなされる.) この条件式の各 ζ の係数からゲージ場についての次の方程式が得られる (ここで $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$):

$$F_{wz} = 0, \quad F_{\tilde{w}\tilde{z}} = 0, \quad F_{z\tilde{z}} = F_{w\tilde{w}}. \quad (2)$$

これが反自己双対 Yang-Mills 方程式である. 実スライスを取れば, Hodge 作用素 $*$ に関する反自己双対方程式 $*F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ と一致することが分かる. 線形系 (1) に対するゲージ変換は以下ようになる:

$$L \mapsto g^{-1}Lg, \quad M \mapsto g^{-1}Mg, \quad \varphi \mapsto g^{-1}\varphi, \quad g(x) \in G.$$

式 (1) は広い意味での **Lax** 形式とみなすことができ, Ward 予想の一つの根拠となっている. 自己双対 Yang-Mills 方程式の解はいつも Yang-Mills 理論の運動方程式 (Yang-Mills 方程式) を満たす.

ここで反自己双対 Yang-Mills 方程式の対称性についてコメントする. まず時空の対称性として, 「4 次元回転」の対称性と 4 次元並進の対称性の他にスケール変換と特殊共形変換の対称性が加わる. この実 15 次元の対称性は共形対称性と呼ばれる. 内部空間の対称性としてはゲージ対称性がある. こちらは空間の各点ごとに決まる局所対称性であり, 巨大な無限次元の対称性である.

4 可積分系へのリダクション

低次元可積分系へのリダクションの例をいくつか紹介する [12]. ここで言うリダクションとは, 次元還元だけでなく, ゲージ場に対する非自明な拘束条件を含む. なお, Euclid 計量でリダクションすると時空座標が複素のまま残って困ることがあるので, 通常は不定値計量を採用する¹.

4.1 KdV, 変形 KdV, 非線形 Schrödinger 方程式

以下の3つの例では, ゲージ群は $GL(2, \mathbb{C})$ (あるいはその部分群) で考える. また次の方向に関する並進不変性を課し次元還元を行う: $X = \partial_w - \partial_{\bar{w}}, Y = \partial_{\bar{z}}$. これによりすべての場は, $(t, x) \equiv (z, w + \bar{w})$ だけに依存する. X, Y 方向の微分はゼロになるので $\Phi_X := A_w - A_{\bar{w}}, \Phi_{\bar{z}} := A_{\bar{z}}$ は Higgs 場とみなされる. 反自己双対 Yang-Mills 方程式は次の形になる:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\bar{z}} + [A_{\bar{w}}, \Phi_{\bar{z}}] &= 0, \\ \dot{\Phi}_{\bar{z}} + A'_w - A'_{\bar{w}} + [A_z, \Phi_{\bar{z}}] - [A_w, A_{\bar{w}}] &= 0, \\ A'_z - A'_w + [A_w, A_z] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

($\dot{f} := \partial f / \partial t$ は時間微分, $f' := \partial f / \partial x$ は空間微分.)

まず, KdV 方程式へのリダクションを行うため, 以下の非自明な条件をゲージ場に課す:

$$A_{\bar{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u/2 & 0 \end{bmatrix}, A_w = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ u & 0 \end{bmatrix}, \Phi_{\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_z = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} u' & -2u \\ u'' + 2u^2 & -u' \end{bmatrix}.$$

反自己双対 Yang-Mills 方程式 (3) の第 1, 2 式は自明に満たされ, 第 3 式の (2, 1) 成分から KdV 方程式が導出される:

$$\dot{u} = \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{2}uu'.$$

次に, 変形 KdV 方程式へのリダクションを議論する. $\Phi_{\bar{z}}$ の形は KdV と同じものを取り, 以下の異なる条件を課してみよう:

$$A_w = \begin{bmatrix} v & -1 \\ 0 & -v \end{bmatrix}, A_{\bar{w}} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v' + v^2 & 0 \end{bmatrix}, A_z = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} v'' - 2v^3 & -2v' + 2v^2 \\ 0 & -v'' + 2v^3 \end{bmatrix}.$$

すると今度は変形 KdV 方程式が得られる:

$$\dot{v} = \frac{1}{4}v''' - \frac{3}{2}v'v^2.$$

¹なお文献 [14] は不定値計量に特化した 4 次元幾何学の貴重な本である.

ここで KdV と変形 KdV の関係についてゲージ理論の立場から考察する．以下の形のゲージ変換は $\Phi_{\bar{z}}$ を不変に保つ：

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_{21} & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\bar{z}} \mapsto g^{-1} \Phi_{\bar{z}} g. \quad (4)$$

このゲージ変換 (4) によって, KdV のリダクション条件 (4) を変形 KdV のもの (4) と一致させるには, $g_{21} = -v$ かつ

$$u = v' - v^2 \quad (5)$$

とすればよいことが分かる．(5) は **Miura 変換** として知られている有名な変数変換である²．この文脈では, Miura 変換はゲージ変換であると理解される．

最後に非線形 Schrödinger 方程式へのリダクションを与える．今度は違う Higgs 場の値を取る ($\varepsilon := \pm 1$):

$$\Phi_{\bar{z}} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_w = - \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \varepsilon \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_z = i\varepsilon \begin{bmatrix} -\psi \bar{\psi} & -\varepsilon \psi' \\ \bar{\psi}' & \bar{\psi} \psi \end{bmatrix}, \quad A_{\bar{w}} = O.$$

これは非線形 Schrödinger 方程式を導く：

$$i\dot{\psi} + \psi'' + 2\varepsilon\psi\bar{\psi}\psi = 0.$$

($\varepsilon = 1$ のとき引力型, $\varepsilon = -1$ のとき斥力型である.) なお, これとゲージ同値な可積分系として Heisenberg の強磁性体方程式がある．

4.2 Boussinesq 方程式

ここではゲージ群を $GL(3, \mathbb{C})$ とし, 4.1 節とは異なる方向に次元還元を行う: $X = \partial_{\bar{w}}$, $Y = \partial_{\bar{z}}$. 時間空間座標を $(t, x) \equiv (z, w)$ のように同一視すると, 反自己双対 Yang-Mills 方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned} [\Phi_{\bar{w}}, \Phi_{\bar{z}}] &= 0, \quad A'_z - \dot{A}_w + [A_w, A_z] = 0, \\ \dot{\Phi}_{\bar{z}} - \Phi'_{\bar{w}} + [A_z, \Phi_{\bar{z}}] - [A_w, \Phi_{\bar{w}}] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

以下の条件をゲージ場に課す：

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{z}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\bar{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} a & 0 & -1 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ v & u & 0 \end{bmatrix}, \\ a &= -\frac{2}{3}u, \quad b = c = \frac{1}{3}u, \quad d = -\frac{2}{3}u' + v, \quad e = -\frac{1}{3}u' + v, \quad f = -\frac{2}{3}u'' + v'. \end{aligned}$$

²Miura 変換は広い意味では Bäcklund 変換の一例であるが, 本稿では変数変換と解釈する.

反自己双対 Yang-Mills 方程式 (6) は u と v についての微分方程式を与える. v を消去すると, Boussinesq 方程式が得られる:

$$\ddot{u} + \frac{1}{3}u'''' + \frac{2}{3}(u^2)'' = 0.$$

4.3 (アファイン) 戸田場の方程式

最後に (アファイン) 戸田場方程式の導出を議論する. 今度はゲージ群を $GL(N, \mathbb{C})$ とし, 以下の方向に次元還元を行う: $X = \partial_w, Y = \partial_{\tilde{w}}$. 反自己双対 Yang-Mills 方程式は以下の形になる:

$$\begin{aligned} \partial_z \Phi_w + [A_z, \Phi_w] &= 0, \quad \partial_{\tilde{z}} \Phi_{\tilde{w}} + [A_{\tilde{z}}, \Phi_{\tilde{w}}] = 0, \\ \partial_z A_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} A_z + [A_z, A_{\tilde{z}}] + [\Phi_{\tilde{w}}, \Phi_w] &= 0. \end{aligned}$$

ゲージ場に以下の条件を課す:

$$\begin{aligned} A_z &= \text{diag}(a_1, \dots, a_N), \quad A_{\tilde{z}} = \text{diag}(-\tilde{a}_1, \dots, -\tilde{a}_N), \\ \Phi_w &= \begin{bmatrix} 0 & \phi_1 & & O \\ & 0 & \phi_2 & \\ & & 0 & \ddots \\ & O & & \ddots & \phi_{N-1} \\ \epsilon \phi_N & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\tilde{w}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \epsilon \tilde{\phi}_N \\ \tilde{\phi}_1 & 0 & & O & \\ & \tilde{\phi}_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & \tilde{\phi}_{N-1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ϵ は 0 または 1 の定数である. $\epsilon = 0$ のとき, 上記方程式を書き下し, a_i, \tilde{a}_i を消去して $u_i = \log(\phi_i \tilde{\phi}_i)$ とおけば, 戸田場の方程式が得られる:

$$\partial_z \partial_{\tilde{z}} u_i + \sum_j K_{ij} e^{u_j} = 0,$$

ただし K_{ij} は $SU(N)$ の Cartan 行列. $\epsilon = 1$ のときはアファイン戸田場の方程式が得られる.

5 Bäcklund 変換

さて, ここから反自己双対 Yang-Mills 方程式の可積分性を議論しよう. **Bäcklund 変換** (解を解にうつす変換) について, まずはツイスター理論を持ち出さずに低次元でもなじみのある形で紹介する.

反自己双対 Yang-Mills 方程式と等価な **Yang** の方程式を考える:

$$\partial_z (J^{-1} \partial_{\tilde{z}} J) - \partial_w (J^{-1} \partial_{\tilde{w}} J) = 0. \quad (7)$$

J は **Yang** の行列と呼ばれる $N \times N$ 行列である。この方程式の解 J が与えられると、 $J = \tilde{h}^{-1}h$ のように 2 つの $N \times N$ 行列 h と \tilde{h} に分解することで 反自己双対ゲージ場を以下のように再現することができる (理由は次節) :

$$A_z = -(\partial_z h)h^{-1}, \quad A_w = -(\partial_w h)h^{-1}, \quad A_{\bar{z}} = -(\partial_{\bar{z}} \tilde{h})\tilde{h}^{-1}, \quad A_{\bar{w}} = -(\partial_{\bar{w}} \tilde{h})\tilde{h}^{-1}. \quad (8)$$

ゲージ変換は $h \mapsto g^{-1}h, \tilde{h} \mapsto g^{-1}\tilde{h}$ として表される。したがって J はゲージ不変である。

以後ゲージ群は $GL(2, \mathbb{C})$ で考える。一般性を失わず J を以下のようにパラメトライズすることができる :

$$J = \begin{bmatrix} p - rq^{-1}s & -rq^{-1} \\ q^{-1}s & q^{-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

このとき、以下の 2 種類の変換は Bäcklund 変換であり、反自己双対 Yang-Mills 方程式を不変に保つ [3, 12] :

- β 変換: $p_{\text{new}} = q^{-1}, q_{\text{new}} = p^{-1},$
 $\partial_{\bar{z}} r_{\text{new}} = q^{-1}(\partial_w s)p^{-1}, \partial_{\bar{w}} r_{\text{new}} = q^{-1}(\partial_z s)p^{-1}, \partial_w s_{\text{new}} = p^{-1}(\partial_{\bar{z}} r)q^{-1}, \partial_z s_{\text{new}} = p^{-1}(\partial_{\bar{w}} r)q^{-1}.$
- γ_0 変換: $p_{\text{new}}^{-1} = q - sp^{-1}r, q_{\text{new}}^{-1} = p - rq^{-1}s, r_{\text{new}}^{-1} = r - ps^{-1}q, s_{\text{new}}^{-1} = s - qr^{-1}p.$

これらはともに包摂的 ($\beta \circ \beta = id, \gamma_0 \circ \gamma_0 = id$) であるが、それらを組み合わせた $\alpha = \gamma_0 \circ \beta$ は非自明な変換となる。したがってある解から出発して、Bäcklund 変換の作用によって一連の解のシリーズが構成 (生成) される :

$$\begin{array}{ccccccc} R_0 & \xrightarrow{\alpha} & R_1 & \xrightarrow{\alpha} & R_2 & \xrightarrow{\alpha} & R_3 \longrightarrow \dots \\ & \searrow \beta & \uparrow \gamma_0 & \searrow \beta & \uparrow \gamma_0 & \searrow \beta & \uparrow \gamma_0 \\ & & R'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & R'_2 & \xrightarrow{\alpha'} & R'_3 \longrightarrow \dots \end{array}$$

ここで生成された解を簡明に記述するため、Quasideterminant というものを導入しよう。 $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して、その逆行列の存在を仮定する。このとき、 A の **Quasideterminant** は、逆行列の要素の逆数として、

$$|A|_{ij} := (A^{-1})_{ji}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det A}{\det A^{ij}} \quad (10)$$

のように (n^2 種類だけ) 定義される。2 つ目の等号は Laplace の公式による。 (A^{ij} は A の i 行と j 列を除いた行列である。) このように行列式そのものではなく、上記の行列式の比 (一般には逆行列の要素) に着目したものが威力を発揮する。(特に最終節で述べるように非可換化の際、顕著である.)

なお行列 A の要素 a_{ij} を明示したいときは添え字 i, j の代わりに A の (i, j) 成分をボックスで囲む表記法が便利である：

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Quasideterminant はさまざまな恒等式を満たす [7]. (行列をブロック分解した表記であるが, 小文字の要素は 1×1 とする.)

- QuasiJacobi 恒等式 (行列式の比として分母を払うと通常の行列式の Jacobi 恒等式に帰着する)：

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ E & \boxed{i} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B \\ E & \boxed{h} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ D & \boxed{f} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} A & C \\ D & \boxed{g} \end{vmatrix}.$$

- ホモロジカル関係式 (非可換化すれば非自明で有用)：

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & \boxed{h} & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & \boxed{g} \\ E & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ D & f & \boxed{0} \\ E & h & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix}$$

さて本題に戻ろう. R_0 に属する種子となる解を見つけるため, $p = q = r = s = \Delta_0^{-1}$ ($\Delta_0(x)$ はスカラー関数) とおくと, 反自己双対 Yang-Mills 方程式は線形微分方程式 (Euclid 空間のときは 4 次元 Laplace 方程式)

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}} - \partial_w \partial_{\bar{w}}) \Delta_0 = 0 \tag{11}$$

となる. この解 Δ_0 に Bäcklund 変換を l 回施して得られる R_l に属する解は以下のように Quasideterminant で極めて簡明に表される³：

$$\begin{aligned} p_l &= \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}, & q_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}^{-1}, \\ r_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}, & s_l &= \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

³なお p_l と q_l は実は同じものであるが, 非可換化すると区別される.

行列の要素として現れたスカラー関数 $\Delta_i(x)$ は以下の関係式により, Δ_0 から逐次求まる :

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial z} = -\frac{\partial \Delta_{i+1}}{\partial \tilde{w}}, \quad \frac{\partial \Delta_i}{\partial w} = -\frac{\partial \Delta_{i+1}}{\partial \tilde{z}}, \quad -l \leq i \leq l-1 \quad (l \geq 2). \quad (13)$$

R'_l に属する解も同様の美しい形をしている.

証明は, (Quasi)determinant の恒等式のみを駆使して与えられる. 例えば, γ_0 変換 $q_l^{-1} = p'_l - r'_l q_l^{-1} s'_l$ は具体的には,

$$\begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \cdots & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Delta_1 & \cdots & \Delta_{2-l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\Delta_l} & \cdots & \Delta_1 \end{vmatrix} \left\| \begin{vmatrix} \boxed{\Delta_0} & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \Delta_{-1} & \cdots & \boxed{\Delta_{-l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{l-2} & \cdots & \Delta_{-1} \end{vmatrix} \right\|$$

と等価であるが, これはまさに QuasiJacobi 恒等式そのものである! (コーナーの4成分に着目して QuasiJacobi 恒等式を適用すればよい.) β 変換の証明も, (Quasi)determinant の恒等式を駆使することで示される [9]. したがって「Bäcklund 変換は (Quasi)determinant の恒等式そのものである」と言い表すこともできるが, これは低次元可積分系でよく知られた事実である. (非可換化しても通用する.)

線形方程式 (Laplace 方程式) (11) を解くことは難しくない. 例えば, Euclid 計量では基本解として $\Delta_0 = 1 + \sum_{i=1}^k (\lambda_i / (z\tilde{z} - w\tilde{w}))$ (λ_i は定数) が取れるが, これはインスタントン解を与える. また, 次のような解 $\Delta_0 = 1 + c \exp(az + b\tilde{z} + aw + b\tilde{w})$ (a, b, c は定数) は「非線形平面波」解 [4] と呼ばれるソリトン解を与える. これらは局所解であり多様な解が含まれる. D ブレーン解釈も興味深い問題である.

6 Penrose-Ward 変換

反自己双対 Yang-Mills 方程式の可積分性について詳しい議論を行うため線形系 (1) について補足をする. 非自明なゲージ場を得るには, φ は $\zeta = \infty$ で正則であってはならない. したがって $\tilde{\zeta} = 1/\zeta$ の座標変換を施し $\tilde{\zeta} = 0$ の付近では別の線形系を考える :

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} D_w \tilde{\varphi} - D_{\tilde{z}} \tilde{\varphi} &= 0, \\ \tilde{\zeta} D_z \tilde{\varphi} - D_{\tilde{w}} \tilde{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

両立条件から反自己双対 Yang-Mills 方程式が出る. (このとき $\tilde{\varphi}$ は $N \times N$ 行列.)

φ と $\tilde{\varphi}$ をそれぞれ ζ と $\tilde{\zeta}$ について原点の周りで展開したときの 0 次の部分がそれぞれ (前節で J を分解したときに定義した) $h(x)$ と $\tilde{h}(x)$ である. 線形系 (1) において $\zeta = 0$ とおくと $D_z h = 0, D_w h = 0$ より, (8) の第 1 行目の式が得られ, 線形系 (14) において $\tilde{\zeta} = 0$ とおくと (8) の第 2 行目の式が得られる.

さて、ここからツイスター理論の枠組みと解構成法である Penrose-Ward 変換を議論する (詳しくは参考文献 [5, 12, 16] 参照). **Penrose-Ward 変換**とは、4次元空間上の反自己双対 Yang-Mills 方程式の解と実6次元ツイスター空間上の正則ベクトル束との1対1対応を与える変換のことである.

時空の座標 $(z, \tilde{z}, w, \tilde{w})$ とツイスター空間の局所座標 (λ, μ, ζ) とは以下の付帯関係式で結ばれている:

$$\lambda = \zeta w + \tilde{z}, \quad \mu = \zeta z + \tilde{w}. \quad (15)$$

これよりツイスター関数 $f(\lambda, \mu, \zeta)$ は以下を満たすことが分かる:

$$\begin{aligned} lf(\lambda, \mu, \zeta) &:= (\partial_w - \zeta \partial_{\tilde{z}})f(\lambda, \mu, \zeta) = 0, \\ mf(\lambda, \mu, \zeta) &:= (\partial_z - \zeta \partial_{\tilde{w}})f(\lambda, \mu, \zeta) = 0. \end{aligned}$$

ツイスター空間は2枚の局所座標で覆うことができ、正則ベクトル束は1種類の変換関数 P から記述される. この P から反自己双対ゲージ場を構成する方法は以下の通り. まず Birkhoff の分解定理により、以下を満たす $N \times N$ 行列 $\varphi, \tilde{\varphi}$ が存在する:

$$P(\zeta w + \tilde{z}, \zeta z + \tilde{w}, \zeta) = \tilde{\varphi}^{-1}(x; \zeta) \varphi(x; \zeta).$$

この $\varphi, \tilde{\varphi}$ は線形系 (1), (14) を満たすことが分かり、 $\zeta, \tilde{\zeta}$ 展開の0次部分から h, \tilde{h} を取り出すことで、反自己双対ゲージ場を (8) のように構成できる.

7 Atiyah-Ward 仮設解

再びゲージ群は $GL(2, \mathbb{C})$ とし、具体解を構成しよう. このとき 変換関数を以下の形に取るのが便利である:

$$P_l(x; \zeta) = \begin{bmatrix} 0 & \zeta^{-l} \\ \zeta^l & \Delta(x; \zeta) \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

これを l 次の **Atiyah-Ward 仮設** と呼ぶ⁴. これに対応するゲージ場の解が5節の Bäcklund 変換で生成された解 (12) と一致することを示す.

ここで、変換関数がツイスター関数: $P_l = P_l(\zeta w + \tilde{z}, \zeta z + \tilde{w}, \zeta)$ であることに注意しよう. $\Delta(x; \zeta)$ を以下のように ζ について Laurent 展開する:

$$\Delta(x; \zeta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta_i(x) \zeta^{-i}.$$

$(\partial_w - \zeta \partial_{\tilde{z}})\Delta = 0$, $(\partial_z - \zeta \partial_{\tilde{w}})\Delta = 0$ の ζ の各べきから係数 $\Delta_i(x)$ に関する関係式 (13) が出てくる.

⁴通常は ζ^l, ζ^{-l} を非対角ではなく対角に取るが、後述の Bäcklund 変換の議論で使いやすい形にした. (本質は不変)

次に分解問題 (Riemann-Hilbert 問題) $\tilde{\varphi}P_l = \varphi$ を解こう :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{11} & \tilde{\varphi}_{12} \\ \tilde{\varphi}_{21} & \tilde{\varphi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \zeta^{-l} \\ \zeta^l & \Delta(x; \zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix},$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{12}\zeta^l &= \varphi_{11}, & \tilde{\varphi}_{22}\zeta^l &= \varphi_{21}, \\ \tilde{\varphi}_{11}\zeta^{-l} + \tilde{\varphi}_{12}\Delta &= \varphi_{12}, & \tilde{\varphi}_{21}\zeta^{-l} + \tilde{\varphi}_{22}\Delta &= \varphi_{22}. \end{aligned} \quad (16)$$

φ と $\tilde{\varphi}$ をそれぞれ ζ と $\tilde{\zeta} = \zeta^{-1}$ で展開し, (16) の第 1 行目の式に代入すると, $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \tilde{\varphi}_{12}, \tilde{\varphi}_{22}$ が有限項で切れることが分かる. それを (16) の第 2 行目の式に代入すると, $\zeta^0, \zeta^{-1}, \dots, \zeta^{-l}$ の係数から, h と \tilde{h} の各成分を含む線形関係式が得られる :

$$\begin{aligned} (h_{11}, *, \dots, *, \tilde{h}_{12})D_{l+1} &= (-\tilde{h}_{11}, 0, \dots, 0, h_{12}), \\ (h_{21}, *, \dots, *, \tilde{h}_{22})D_{l+1} &= (-\tilde{h}_{21}, 0, \dots, 0, h_{22}), \\ \text{ただし } D_{l+1} &:= \begin{bmatrix} \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{-l} \\ \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

こうして自己双対性の非線形問題が線形問題に帰着した. あとは, D_{l+1} の逆行列を右から掛ければ, 第 $1, l+1$ 列目から h と \tilde{h} だけの 4 つの関係式が得られる. ここで J の分解を以下のようにゲージ固定すれば未知変数は 4 個となって, (12) の形の解が得られる⁵ :

$$\begin{bmatrix} p - rq^{-1}s & -rq^{-1} \\ q^{-1}s & q^{-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & q \end{bmatrix}}_{\tilde{h}^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} p & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}}_h.$$

したがって 5 節の Bäcklund 変換で生成される解は Atiyah-Ward 仮設解と呼ばれるべきものである.

最後に Bäcklund 変換 β, γ_0 の起源も説明しよう. これらは変換関数 P への以下の作用として理解される⁶ :

$$\begin{aligned} \beta : P_{\text{new}} &= B^{-1}PB, & \gamma_0 : P_{\text{new}} &= C_0^{-1}PC_0, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^{-1} & 0 \end{bmatrix}, & C_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\beta \circ \beta = id, \gamma_0 \circ \gamma_0 = id$ は明らかであり, これらの合成が l 次の Atiyah-Ward 仮設を $(l+1)$ 次の Atiyah-Ward 仮設にうつすこともすぐに分かる: $A := BC_0$ として $\alpha : A^{-1}P_lA = P_{l+1}$. なお, γ_0 変換は C_0 の代わりに任意の定数行列 C を用いた形 (γ 変換) に容易に拡張することができる: $\gamma : P_{\text{new}} = C^{-1}PC$. β 変換と γ 変換全体はループ群の作用 $LGL(2)$ を与える. これがすべての解を生成するかどうかは未解決である.

⁵符号のずれる部分があるが, Bäcklund 変換の再定義で吸収される.

⁶正確には B の作用は $\varphi, \tilde{\varphi}$ へのある特異ゲージ変換と合わせて定義される [9].

8 低次元可積分系との関わり

5~7節での反自己双対 Yang-Mills 方程式の解構成法はリダクションを通じてそのまま低次元に応用される。Yang の方程式 (7) を素朴に次元還元すると Ward のカイラル模型・調和写像の方程式が得られる。非自明なものとしては、例えば Ernst 方程式へのリダクションがある。($z = x + it, w = re^{i\theta}$ として $X = \partial_t, Y = \partial_\theta$ の方向に次元還元する。) これらに同様の解構成法が適用可能である。Ernst 方程式は 4次元 Einstein 方程式の定常軸対称な真空解を与えるため、5節の Bäcklund 変換を適用してブラックホール解を生成することができる。4節 (a) の3つの例については Penrose-Ward 変換が逆散乱変換そのものとなる。

反自己双対 Yang-Mills 方程式階層も定義することができ、低次元の可積分階層に帰着する。Drinfeld-Sokolov 階層の方程式系を導くこともできる(4節の KdV, Boussinesq へのリダクションはその一例である)。そこに現れるさまざまな可積分系としての要素にツイスター理論の解釈が与えられる。

場の理論の枠組みからははずれるが、1次元(常微分方程式)へのリダクションにおいても美しい結果がある。特に、4次元の共形変換群に3次元の可換な部分群が5つあることに着目し、それらを生成する3つのベクトル場の方向に次元還元すると、5つの部分群に対応して、Painlevé 方程式 $P_{I,II}, P_{III}, P_{IV}, P_V, P_{VI}$ が見事に導出される [12]。

このようにさまざまな種類の可積分性の起源がツイスター理論からある程度統一的に理解される。ただ、説明のつかない話題もあり、佐藤理論の中心的存在である KP 方程式はいまだにリダクションの例が知られていない⁷。

9 その他の話題と今後の展望

このストーリーのさらなる展開や今後の展望は、高次元化、非可換化も含め Ward 氏の解説 [13] の最後にまとめられている。ツイスター対応が適用できる範囲で4次元時空を一般化する方向性もある [1]。

反自己双対 Yang-Mills 方程式の高次元化については昔から議論がある。最近の興味深い話題として、Cherkis 氏が、8次元の「反自己双対な」Yang-Mills 方程式を 3,5,7次元に単純な次元還元を施し、それらの方程式同士に Nahm 変換的な双対関係を予想している [2]。ツイスター理論に収まれば、(もしかしたら KP 方程式も含むような)非自明なりダクションからより壮大な枠組みが提供されるかもしれない。

非可換化については2000年頃から研究が活発である [11]。(非可換な可積分系としては例えば従属変数が四元数に値をとる設定をイメージすればよい。)Ward 予想の非可換版も

⁷ゲージ場の要素に微分作用素を許すようなりダクションからは導かれるが、ツイスター対応がなく Ward 予想の一例とはみなされない。

主要な具体例は出揃っている⁸。解構成においては5節で述べた Quasideterminant が大いに活躍する。非可換な場合も Quasideterminant の具体的な表式を書き下すことができ、5節で紹介した恒等式だけでなく非可換 Plücker 恒等式など興味深い関係式が存在する [7]。非可換対称関数とのつながりもある [8]。これらは実際の計算に非常に有用であり、可換な場合より (普通の行列式を用いる場合より) 簡単に証明が完結する。例えば、非可換な場合の Atiyah-Ward 仮設解は Quasideterminant を用いた表記 (12) が答えである⁹。Yang の行列は、(12) を (9) に代入すれば求まるが、5節で紹介した恒等式を用いると以下のような非常に簡明で見通しの良い形にすぐにたどりつく [9]：

$$J_l = \begin{vmatrix} \boxed{0} & -1 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{0} \\ 1 & \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-l} & \Delta_{-l} \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-l} & \Delta_{1-l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta_{l-1} & \Delta_{l-2} & \cdots & \Delta_0 & \Delta_{-1} \\ \boxed{0} & \Delta_l & \Delta_{l-1} & \cdots & \Delta_1 & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}.$$

ボックスが4個あるように見えるが、4隅の要素を 2×2 行列として一つのボックスで囲っているつもりである。(要素として非可換なものも許されるので行列が入っても構わない。) Quasideterminant はもともと非可換行列式の統一的理解のために定義されたものであるが、非可換ソリトンの記述にぴったりはまっているように思える。低次元可積分系でも活躍することが分かっており [6, 10] 可積分系のより本質的な新しい定式化が予感される。

対称性という観点に戻ってみると、反自己双対 Yang-Mills 方程式の時空対称性やゲージ対称性は、低次元可積分系へのリダクションの分類指標を与えているが可積分性の直接の起源ではない。時空対称性が共形対称性まで大きくなったことでツイスター理論の取扱いが可能になったのが一つの理由である。リダクションの過程でツイスター対応がつぶれないことも条件である。この意味で高い時空の対称性が、ツイスター理論を経由して可積分性に関わっている。対称性と可積分系の関係はもっと直接見えなだろうか？

不定値計量の反自己双対 Yang-Mills 方程式は実は (世界面の超対称性が通常の2倍ある) $N=2$ 弦理論 [15] と深く関わっている¹⁰。理解の鍵は可積分系・ツイスター理論の弦理論的解釈にあるのかもしれない。

⁸4節の非線形 Schrödinger 方程式の例は順序をあえて区別して記載しており、実はこのまま非可換版の例になっている。ゲージ場のトレース部分 (ゲージ群の $U(1)$ 部分) が生じていることに注意。($\text{Tr} A_z = \bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi} \neq 0$.)

⁹実は5節の議論は、Quasideterminant を用いた非可換での結果 [9] の可換極限である。

¹⁰ $N=2$ 弦理論の標的空間は不定値計量の4次元空間であり、その上の弦の場の理論の運動方程式 (BPS 方程式ではない) が反自己双対 Yang-Mills 方程式などを与える。

References

- [1] D. Calderbank, SIGMA **10** (2014) 034.
- [2] S. Cherkis, Lett. Math. Phys. **105** (2015) 641.
- [3] E. Corrigan, D. Fairlie, R. Yates and P. Goddard, Comm. Math. Phys. **58** (1978) 223.
- [4] H. de Vega, Comm. Math. Phys. **116** (1988) 659.
- [5] M. Dunajski, *Solitons, Instantons, and Twistors*, (Oxford UP, 2010).
- [6] P. Etingof, I. Gelfand and V. Retakh, Math. Res. Lett. **4** (1997) 413.
- [7] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh and R. Wilson, Adv. Math. **193** (2005) 56.
- [8] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, J. Thibon, Adv. Math. **112** (1995) 218.
- [9] C. Gilson, M. Hamanaka and J. Nimmo, Proc. Roy. Soc. Lond. A **465** (2009) 2613.
- [10] C. Gilson and J. Nimmo, J.Phys.A **40** (2007) 3839.
- [11] M. Hamanaka, AIP Conf. Proc. **1212** (2010) 122; Phys. Scripta **89** (2014) 038006.
- [12] L. Mason and N. Woodhouse, *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (Oxford UP, 1996).
- [13] N. J. Hitchin, G. B. Segal and R. S. Ward, *Integrable systems: Twistors, loop groups, and Riemann surfaces*. (Oxford UP, 1997).
- [14] 松下泰雄, 鎌田博行, 中田文憲, 「4次元微分幾何学への招待」, (サイエンス社, 2014).
- [15] 大栗 博司 (武部尚志記), 「N=2 弦理論」, 無限可積分系レクチャーノート:重点領域研究 231; No. 6 (1993).
- [16] 高崎 金久, 「ツイスターの世界」 (2007, 共立出版).
- [17] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.
- [18] R. Ward and R. Wells Jr, *Twistor Geometry and Field Theory*, (Cambridge UP, 1991).
- [19] V. Zakharov, *What is integrability?*, (Springer, 1991).