

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 伊藤 康介

論 文 題 目

Analysis of finite-size effects in quantum thermodynamics  
of multiple conserved quantities beyond i. i. d. regime

(複数保存量の量子熱力学における有限効果の独立同一分布を超えた解析)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
永 尾 太 郎

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)  
林 正 人

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
菅 野 浩 明

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)  
南 和 彦

## 論文審査の結果の要旨

本論文では、量子力学的な熱機関の最適性能が議論されている。特に、熱浴の大きさが有限であることによる効果と、エネルギーに限らず複数の保存量をもつ熱機関が扱われていることが特徴である。熱浴の有限性の効果については、Tajima and Hayashi による最近の先行研究において、独立同分布 (i.i.d.) に従う  $n$  個の粒子から成る熱浴が扱われており、熱機関の最適効率に対する熱浴の有限性 (粒子数  $n$  の有限性) の効果が評価されている。本論文の特徴は、このような i.i.d. に従う熱浴の議論に留まらず、より一般化された熱浴が導入されていることである。また、複数の保存量がある場合に熱機関の仕事量の上限を与える一般化 Carnot 限界 (GCB) に対して、熱浴の有限性による補正を施したもの (Fine-grained GCB) を導出し、補正項に保存量間の相関が現れることを明らかにした。このように、熱浴の有限性について、保存量間の相関との関係を表す新しい式が導かれていることが、本論文の主な成果である。さらに、性質のよい熱浴に対しては、仕事量の上限を達成する手続きが構成できることも示されていて、その証明のために、一般化された強い大偏差原理と情報幾何学の手法を取り入れた漸近解析がなされている。最後に、一般化された熱浴のいくつかの例が挙げられ、具体的な説明がなされている。

まず、漸近的示量性の概念を用いて、一般化された熱浴について解説する。熱浴は、それぞれの保存量に対応する逆温度によって特定される熱状態にあるとする。スケールパラメータを  $\lambda$  とし、熱浴の自由エントロピーを  $\varphi_\lambda$  とする。 $\lambda \rightarrow \infty$  の極限が、熱力学的極限 (粒子数無限大の極限) に対応する。漸近的示量性をもつ熱浴においては、

$$\varphi_\lambda = \lambda\varphi + o(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

をみたく漸近密度  $\varphi$  が存在する。 $\varphi_\lambda$  および  $\varphi$  の逆温度についての 3 次までの偏微分係数の間にも、同様の漸近関係が成立する。これらは、i.i.d. に従う熱浴においては自明に成り立つことである。本論文では、このような一般化された熱浴を含む熱機関についての考察がなされている。

次に、本論文の主な成果である Fine-grained GCB (FGCB) について述べる。2 つの熱浴 1, 2 と 2 つの保存量 A, B をもつ熱機関を考える。熱浴  $j$  の逆温度のうち保存量 A に対応するものを  $\beta_j$ 、保存量 B に対応するものを  $\gamma_j$  とする ( $j = 1, 2$ )。また、熱機関の循環過程は、熱浴  $j$  から保存量 A に関する熱量  $\Delta Q_{A,j}$  と保存量 B に関する熱量  $\Delta Q_{B,j}$  を受け取り、保存量 A に関する仕事  $\Delta W_A$  を生じる。本論文では、このとき、FGCB

$$\begin{aligned} \Delta W_A \leq & \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \Delta Q_{A,2} - \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{\beta_1} \Delta Q_{B,j} - C_{AA} \frac{(\Delta Q_{A,2})^2}{\lambda} \\ & - \sum_{j=1}^2 C_{AB}^j \frac{\Delta Q_{A,2} \Delta Q_{B,j}}{\lambda} - \sum_{j,\ell=1}^2 C_{BB}^{j,\ell} \frac{\Delta Q_{B,j} \Delta Q_{B,\ell}}{\lambda} \end{aligned}$$

## 論文審査の結果の要旨

が成り立つことが示された。この不等式は、 $\lambda \rightarrow \infty$  のときに漸近的に成り立つものである。右辺の  $1/\lambda$  を含まない項のみを残した関係は既知であり、一般化 Carnot 限界 (GCB) と呼ばれる。FGCB は、GCB に熱浴の有限性による補正を施したものである。これらの補正項の係数  $C_{AA}$ ,  $C_{AB}^j$ ,  $C_{BB}^{j,\ell}$  は、保存量間の相関を用いて定義される。すなわち、FGCB には、GCB と異なり、逆温度だけでなく保存量間の相関にも依存するという特徴がある。

また、本論文では、示量性からのずれが小さい、すなわち、 $\phi_\lambda = \lambda\phi + O(\lambda^\alpha)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  となる  $\alpha < 1/2$  が存在するなどのいくつかの付加的な条件の下で、FGCB によって与えられる仕事量の上限を達成する手続きが構成できることが、一般化された強い大偏差原理と情報幾何学的手法を取り入れた漸近解析により、示されている。ここで、保存量が互いに非可換である場合についても適用可能な議論がなされていることに、注目すべきである。さらに、1次元イジングスピン系や理想気体などいくつかの熱浴の例が取り上げられ、熱機関としての最適性能を得るための条件が導かれるなど、具体性のある結果にまで到達している。特に、理想気体に対しては、i.i.d. に従う熱浴とは本質的に異なる扱いが必要となる。

本論文の内容は、指導教員との共著の副論文 (arXiv:1612.04047) と重なる部分が多い。しかし、この副論文は、情報幾何学の適用の部分について指導教員の助言がなされていることなどを除き、ほとんどが学位申請者の貢献によるものであることを、学位審査委員会では確認している。本論文の内容に含まれる新しい知見は、量子熱力学における従来の成果を踏まえたものであり、今後の発展に寄与すると見込まれる。

本論文に関する公開審査会は、2018年1月16日に開催された。講演および質疑応答を通じて、学位審査委員会は、学位申請者が博士の学位を取得するに足る十分な学識を有することを確認した。以上により、学位審査委員会は、学位申請者には博士(数理学)の学位を授与される資格があるものと判断する。

学位審査委員会

菅野 浩明

永尾 太郎 (主査)

林 正人 (指導教員)

南 和彦