

別紙 4

報告番	※	第
-	-	

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Observations on the Sphere Spectrum
(球面スペクトラムの観察)

氏 名 堀内 遼

論 文 内 容 の 要 旨

位相的ホックシルトホモロジー (THH) に端を発する、環スペクトラムのホモロジー論と呼ばれる理論がある。大掴みにはそれは基礎環を \mathbb{Z} から球面スペクトラム \mathbb{S} まで降ろして展開されたホモロジー論だと思える。特に任意の環は環スペクトラムであり、そのホモロジー論を考えることができる。正標数のものに対しては、環スペクトラムのホモロジー論は従来のものの精密化と思える。例えば \mathbb{Q} 代数に対し THH とホックシルトホモロジー (HH) は一致し、正標数のものに対しては THH は HH よりも多くの情報を拾い出す。基礎環を \mathbb{Z} からさらに \mathbb{S} まで降ろすというこの考えは、80年代にヴァルドハウゼンにより提案された。これら環スペクトラムのホモロジー論が p 進ホッジ理論等にも有用であるということがヘッセルホルトラによってわかってきている。

これらの流れを汲んで、可換環スペクトラムのホモロジー論に関する2つの結果を紹介した。それぞれ副論文としてまとめられている。1つ目では周期的位相的巡回ホモロジー (TP) と呼ばれる可換環スペクトラムのホモロジー論が冪零不変性を持たないというものである。より正確に言えば、正準的な射影に誘導されるスペクトラムの射

$$\mathrm{TP}(\mathbb{F}_p[x]/(x^n)) \rightarrow \mathrm{TP}(\mathbb{F}_p)$$

のファイバーを計算し、 p の逆元を添加しても、0にはならないということを示した。TP は周期的巡回ホモロジー (HP) の環スペクトラム的類似であり、標数0の代数に対して HP は冪零不変性を持つ。従ってその意味でこの結果は予想されていなかった事柄である。TP は滑らかで固有なスキームに対してキュネス公式が成り立つことが知られており、さらにハッセ-ヴェイユゼータ関数との関係も見つかっている。この結果は TP という重要なホモロジー論の基本的な性質を明らかにしたことになる。2つ目の結果はある正標数代数 A に対し、

$$A[x]/(x^k) \rightarrow A[x]/(x^{kn}), \quad x \mapsto x^n$$

という射で誘導される代数的 K 理論の射

$$K(A[x]/(x^k), (x)) \rightarrow K(A[x]/(x^{kn}), (x))$$

に関するものである。まずはこの射が THH の、 A が正則な時はドラムウィット複体の、ファシーボン射に対応するということを示した。つまり、ヘッセルホルトとマドセンによって構成された代数的 K 理論と THH ないしドラムウィット複体のなす長完全列があるが、その系列の間の射をファシーボン射と上記の射によって構成した。そしてその帰結として、 $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})^\wedge$ や $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})^\wedge$ などを含む特定の擬完全体の整数環の剰余環の相対 K 群を決定した。

上記の結果の背景や用語の準備のために、まずはスペクトラムの理論やヴァルドハウゼンのアイデアを整理し安定ホモトピー論のさわりに触れた。その後ヘッセルホルトらの結果を紹介し、それが上の2つの結果とどう関連するのか述べた。最後にこれからの方向性として、自然数のなす半環 \mathbb{N} と \mathbb{S} の関係について考えた。