

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 堀内 遼

論 文 題 目

Observations on the Sphere Spectrum

(球面スペクトラムの観察)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (数理科学)
藤 原 一 宏

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 Ph.D.
森 吉 仁 志

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 理学博士
齊 藤 博

委 員 University of Copenhagen Department of Mathematical
Sciences Associate Professor Ph.D.
Fabien Mehdi Pazuki

論文審査の結果の要旨

申請者はこの申請論文において、数論とホモトピー論の境界領域における研究を行っている。その中でも特に可換環やスキームなど数論幾何の対象に対してホモトピー論的に定義される一連の一般コホモロジー論を考察し、特に考えている対象がベキ零元を持つ場合に二つの新しい結果を得ている。以下、具体的に説明をする。

一般コホモロジー論はホモトピーの対象である spectra により表現されるが、環 R に対して代数 K -理論 $K(R)$ 、位相的巡回ホモロジー $TC(R)$ 、周期的位相的巡回ホモロジー $TP(R)$ 、位相的 Hochschild ホモロジー $THH(R)$ の四つの代表的な spectra が定まる。申請者による第一の主結果はこのうち TP に関するものである。

Theorem 0.1. (*Non-nil-invariance*) 写像

$$TP_*(\mathbb{F}_p[x]/(x^k)) \rightarrow TP_*(\mathbb{F}_p)$$

は同型でない。(どのぐらいの差があるかを表す相対ホモロジー $TP_*(\mathbb{F}_p[x]/(x^k), (x))$ も具体的に記述される.)

TP は多くの良い性質を持つことが知られているが、位相的なホモロジー論では nil-invariance が成立することが多いため、この結果は TP がベキ零元の情報より繊細な不変量であることを示していることになる。

TP は THH を経由して定義されるため、ホモトピー的計算により Hesselholt-Madsen による相対 THH の記述に帰着することで証明が行われる。

もう一つの結果は代数 K -群に関するもので

Theorem 0.2. 複素種類の剰余標数 p の perfectoid 付値環 \mathcal{O} に対し、相対代数 K -群 $K_*(\mathcal{O}/p\mathcal{O}, m/p\mathcal{O})$ が具体的に表示される (m は \mathcal{O} の極大イデアル)

ことが示されている。ここでは truncated polynomial ring の相対代数 K -群 $K_*(A[x]/(x^n), (x))$ が n を動かした時どう変化するかを記述することが重要になる。その解析は TC や THH を経由して行われるが、その際必要な写像 (Verschiebung map) を構成し、基本性質を調べることが定理の証明の鍵となっている。名前の通り、これは Witt vector に対する Verschiebung map に相当するものであり、基本的な写像である。

以上のように、二つの定理の趣は異なるものの、ホモトピー的手法で 4 つの一般コホモロジー理論を関連させて調べていく部分、また相対コホモロジー理論を効果的に使う点など、共通点は多い。先行結果に依存する部分も多いが、ベキ零元が増えていく際の記述に工夫が見受けられる。関連する結果も種々含まれている。

また、この論文ではサーベイの部分が充実しており、G. Segal による Γ -空間の概念に基づいたホモトピー論を最近の Connes-Consani 理論を踏まえて取り扱っている。この記述は積の描写に優れ、Connes-Consani の視点では Γ -空間を経由することで代数構造がより自然に捉えられる。申請者は球面 spectra や上記 4 つの一般コホモロジー理論をホモトピー圏における環 spectra として捉え、中でも球面 spectra を \mathbb{N} や \mathbb{Z} より基本的な代数として位置付けている (“球面 spectra 上の代数” は通常の代数で取り扱わない対象を含んでいる)。さらに最後の節ではホモトピー的な半環の理論が発展する可能性を申請者による問題提起を含め議論しており、サーベイとしてオリジナリティを評価できるものとなっている。

このように申請者によって与えられている結果は先行研究に依存しているが、結果は新しく、特に K -群の計算は p -進理論への応用も期待される。サーベイの部分も今後の新しい方向性を提示するものとして十分評価できる。

本論文に関する公開学位審査セミナーが 2018 年 1 月 30 日に行われ、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有する事を確認した。以上により、学位審査委員会は申請者には名古屋大学において博士の学位が授与される資格があると判断する。