別紙 4

報告番号	※　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Tilting objects over preprojective algebras associated to Coxeter groups

(前射影代数上のコクセター群に付随する傾対象)

氏　　名　木村　雄太

論　文　内　容　の　要　旨

代数の表現論において, 代数の導来圏や自己移入的代数の加群圏の安定圏などを例に持つ三角圏は, 多くの研究がなされている基本的対象の一つである. これら三角圏を研究する手法の一つに傾理論がある. Keller は, 三角圏 $\mathcal{T}$ がある代数 A の有限生成射影加群のなす圏上のホモトピー圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}A)$ と三角圏同値となる必要十分条件は, $\mathcal{T}$ が傾対象を持つことであると証明した. ここで A は, 傾対象の自己準同型代数として与えられる. よって, 与えられた三角圏に傾対象が存在するか否か, また存在した場合はその自己準同型代数を研究することは重要である.

本論文の内容はある三角圏における傾対象の存在およびその自己準同型代数の研究に関するものであり, 三部から構成される. 有限非輪状クイバーが一つ与えられると, そこから前射影代数とコクセター群が定義される. 第一部および第二部では前射影代数とコクセター群の元から構成される三角圏を扱い, それぞれ異なる傾対象の存在を示し, その傾対象の研究を行う. 第三部では遺伝的代数の安定圏から得られる導来圏を扱う. これは, 遺伝的代数が有限表現型の場合の Iyama-Oppermann のある結果を受け, その無限表現型遺伝的代数への拡張を行ったものである. 以下, 各部の内容を詳しく述べる.

第一部および第二部で扱われる三角圏は, Fomin-Zelevinsky の団代数の加法的圏化を行う際に扱われる, 2-Calabi-Yau 三角圏 (以下, 2-CY 三角圏) の研究が出発点となる. Buan-Iyama-Reiten-Scott (以下, BIRS) らは, 前射影代数 Π とコクセター群の元 w を用いて 2-CY 三角圏 $\underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi(w)$ を構成し, かつその圏が団傾対象 $T(w)$ を持つことを証明した. 前射影代数はクイバーの向きから決まる自然な次数付き代数の構造を持ち, これにより BIRS の三角圏の構成に次数を考慮した三角圏 $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w)$ が得られる. 第一部および第二部では, 三角圏 $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w)$ に傾対象を構成する. この研究の問題意識は, 次に説明する Amiot-Reiten-Todorov らの結果から着想を得た.

2-CY 三角圏のクラスの一つに, Amiot による団圏 (クラスター圏) がある. 大域次元 2 以下の有限次元代数 A の団圏 $\mathsf{C}(A)$ は, 導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}A)$ から構成され, 自然な関手 $\pi : \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}A) \to \mathsf{C}(A)$ が存在する. また, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}A) \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}A)$ の傾対象 A の π による像は, $\mathsf{C}(A)$ の団傾対象となることが知られている. 二つのクラスの 2-CY 三角圏 $\underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi(w)$ と $\mathsf{C}(A)$ の関係は, Amiot-Reiten-Todorov らによって研究された. 即ち, コクセター群の任意の元 w に対して, 大域次元 2 以下のある代数 $A(w)$ が存在して, その団圏 $\mathsf{C}(A(w))$ と $\underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi(w)$ は三角圏同値となる. 一方で, 次数を忘却する関手 $f : \underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w) \to \underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi(w)$ が考えられる. そこで傾対象 $A(w)$ の π による像が団傾対象となることに対応して, $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w)$ の傾対象 $M(w)$ であって $f(M(w)) = T(w)$ となるものが存在すると予想される. 更に, $M(w)$ の自己準同型代数は $A(w)$ と同型であることが期待される.

第一部の内容は [Ki14] に従う．第一部では，w が c-sortable と呼ばれる元のときを扱う．c-sortable 元はクイバーの道代数の表現論と深く関わっていることが知られている．その事実を用いて，$\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w)$ に傾対象 $N(w)$ を構成する．更に，$N(w)$ の自己準同型代数と道代数上の相対安定 Auslander 代数との同型を与えことにより，自己準同型代数の大域次元が 2 以下であることを示す．構成された傾対象は $f(N(w)) = T(w)$ を満たすが，その自己準同型代数と $A(w)$ は一般には同型とならないことがわかる．

第二部の内容は [Ki16] に従う．第一部で構成された傾対象の自己準同型代数は一般には $A(w)$ とは同型にならない．この点を解消するために，c-sortable より一般の元を扱う．第二部ではまずはじめに，コクセター群の任意の元 w に対して，$\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w)$ が準傾対象 $M(w)$ を持つことが示される．ここで準傾対象とは，傾対象を変異の観点から一般化した対象で，三角圏を研究する上では欠かせない概念である．この準傾対象 $M(w)$ が傾対象となる十分条件として，w に c-starting および c-ending という概念を導入する．w が c-starting または c-ending のとき，傾対象 $M(w)$ の自己準同型代数の大域次元は 2 以下であることがわかる．更に，w が c-ending のとき，$M(w)$ の自己準同型代数は $A(w)$ と同型となり，よって $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi(w)$ と $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}A(w))$ の三角圏同値が得られる．最後に，この同値が Amiot-Reiten-Todorov らの与えた 2-CY 三角圏間の同値と自然な関手による可換図式をなすことが示される．

第三部の内容は [Ki17] に従う．第三部では，有限次元遺伝的代数 H から構成される三角圏を扱う．一般に加法圏 $\mathcal{C}$ から Abel 群のなす圏 $\mathcal{Ab}$ への反変関手 $M : \mathcal{C} \to \mathcal{Ab}$ を $\mathcal{C}$ 上の加群と呼び，$\mathcal{C}$ 上有限表示な加群全体のなす圏を $\mathsf{mod}\,\mathcal{C}$ で表す．$\mathcal{C}$ が三角圏の場合，$\mathsf{mod}\,\mathcal{C}$ は Frobenius 圏となることはよく知られており，よってその安定圏 $\underline{\mathsf{mod}}\,\mathcal{C}$ は三角圏となる．特に，三角圏 $\underline{\mathsf{mod}}\,\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}H)$ が得られる．第三部では，傾理論を使うことで，この三角圏が H から得られるある Abel 圏の導来圏と三角圏同値であることを示す．

H が有限表現型遺伝的代数のとき，三角圏 $\underline{\mathsf{mod}}\,\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}H)$ は H の相対 Auslander 代数 Γ_H の導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}\Gamma_H)$ と三角圏同値であることが Iyama-Oppermann により示された．ここで相対 Auslander 代数の定義から圏同値 $\mathsf{mod}\Gamma_H \simeq \mathsf{mod}(\underline{\mathsf{mod}}\,H)$ が導かれることがわかる．H が無限表現型の場合，相対 Auslander 代数は存在しないが，安定圏 $\underline{\mathsf{mod}}\,H$ 上の加群圏は常に定義される．そこで H が無限表現型のとき，$\underline{\mathsf{mod}}\,\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}H)$ と $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}(\underline{\mathsf{mod}}\,H))$ が三角圏同値となることが期待される．この三角圏同値を示すために，本論文では Happel の定理として知られる反復代数の安定圏と導来圏の同値を，圏上の加群圏に拡張する．また，遺伝的代数 H の導来圏と H の安定圏の反復圏の同値を示す．

References

[Ki14] Y. Kimura, *Tilting theory of preprojective algebras and c-sortable elements*, arXiv:1405.4087v4.

[Ki16] Y. Kimura, *Tilting and cluster tilting for preprojective algebras and Coxeter groups*, Int. Math. Res. Not., rnx265, https://doi.org/10.1093/imrn/rnx265.

[Ki17] Y. Kimura, *Singularity categories of derived categories of hereditary algebras are derived categories*, arXiv:1702.04550v1.