別紙４

報 告 番 号	※ 第 号

主 論 文 の 要 旨

論 文 題 目 Classification theory of subcategories around commutative algebra
(可換環論の周辺の部分圏の分類理論 について)

氏 名 松井 紘樹

論 文 内 容 の 要 旨

部分圏の分類理論は代数幾何、環論、モデュラー表現論などの分野において盛んに研究されている。ここで部分圏の分類とは、与えられた圏のあるクラスの部分圏の集合と、より分かりやすい集合との間の全単射を見つけることである。これらの分野において、付随するアーベル圏、完全圏や三角圏などの構造を通して元の対象（スキーム、環、群）の性質を調べる手法は非常に重要であるが、一般に圏構造を完全に把握することは難しい問題である。そこで、部分圏の分類を通して圏構造を調べることが重要になる。

三角圏において濃密部分圏の分類がテンソル構造と非常に相性がよいことは Hopkins-Smith, Hopkins, Neeman, Thomason, Benson-Carlson-Rickard らの研究により知られていたが、その事実を一般的な状況で定式化したのが、今世紀初めに Balmer により創始されたテンソル三角幾何学である。Balmer は対称なテンソル積を持つ三角圏（以下テンソル三角圏）$\mathcal{T}$ において、そのテンソル積を可換環における積とみなすことで、イデアル、素イデアルの類推として、濃密テンソルイデアル、素濃密テンソルイデアルの概念を導入した。さらに Zariski スペクトラムの類推で、濃密テンソル素イデアルのなす集合 $\mathsf{Spec}\,\mathcal{T}$ 上に位相を導入した。この位相空間を Balmer スペクトラムと呼ぶ。テンソル三角幾何学とは、Balmer スペクトラム $\mathsf{Spec}\,\mathcal{T}$ を通して、可換環論的、代数幾何的な手法によりテンソル三角圏 $\mathcal{T}$ について調べるものである。Balmer によって得られた一つの集大成は、$\mathcal{T}$ の根基濃密テンソルイデアルの分類は Balmer スペクトラム $\mathsf{Spec}\,\mathcal{T}$ の構造と同値である、という事実である。

本論文では、可換環論（及びその周辺分野）における部分圏の分類理論について主に以下の内容

(1) 右有界導来圏のテンソル三角幾何学

(2) 部分圏の分類と、分類空間の復元について

(3) 完全圏の稠密部分圏の分類

について議論している。以下これらの内容について詳しく述べていく。

(1) 右有界導来圏のテンソル三角幾何学

可換環論において、種々の導来圏は重要な研究対象であるが、その構造は一般によく分かっているとは言えない。例えば、部分圏の分類に関しては Hopkins, Neeman により可換ネーター環 R 上の完

全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ と、非有界導来圏 $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}\,R)$ の場合にそれぞれ濃密部分圏、局所化部分圏が分類されているのみであり、その他の場合には完全に分類されているとは言えない。私は本論文において、与えられた可換ネーター環 R 上のコホモロジーが右に有界な有限生成加群の複体のなす導来圏（以下右有界導来圏）$\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ 上のテンソル三角幾何学について考察した。$\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ は可換環論で特に重要な完全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ や、コホモロジーが有界な有限生成加群の複体のなす導来圏 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\,R)$ を含む比較的大きな導来圏であり、導来テンソル積によって自然にテンソル三角圏構造を持つ。

まず第一に、$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\,R)$ の対象で生成された $\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ の濃密テンソルイデアルを $\mathsf{Spec}\,R$ の特殊化閉集合を用いて分類した。このことは、Hopkins-Neeman による結果の一般化となっている。実際、この主張の証明の鍵は Hopkins-Neeman によって完全複体に対して示された Smash nilpotence 定理を右有界な複体に拡張することである。

次に、この分類結果を用いて $\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ の Balmer スペクトラムの構造について考察した。すでに述べたように、Balmer スペクトラムの位相構造を調べることは濃密テンソルイデアルの分類に関して本質的な情報をもたらす。従って Balmer スペクトラムの構造を調べることは非常に重要な問題である。このために、本論文では $\mathsf{Spec}\,\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ と $\mathsf{Spec}\,R$ の間に写像

$$\mathcal{S} : \mathsf{Spec}\,R \rightleftarrows \mathsf{Spec}\,\mathsf{D}^{-}(R) : \mathfrak{s}$$

を定義し、これらを用いて $\mathsf{Spec}\,\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ について調べた。

私は写像 $\mathcal{S}$ を用いて、$\mathsf{Spec}\,R$ が $\mathsf{Spec}\,\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ に埋め込まれるための必要十分条件、これらが同相になるための必要十分条件を与えた。この結果により、$\mathsf{Spec}\,\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\,R)$ の構造は一般には非常に複雑であることが分かった。このことは、離散付置環の場合の具体的な計算からも分かる。従って、全ての根基濃密テンソルイデアルを分類することはかなり難しいことが Balmer の結果により分かるが、更に特別な根基濃密テンソルイデアルのクラスとしてテイムイデアルの概念を導入し、テイムイデアルが $\mathsf{Spec}\,R$ を用いて分類できること、さらに、この分類が写像 $\mathfrak{s}$、$\mathcal{S}$ を通して Balmer による分類のある種の制限となっていることを示した。さらなる分類の応用としては、Balmer スペクトラムの連結性、既約性、ネーター性の特徴付けがある。

一方で、2010 年の ICM（国際数学者会議）において Balmer によって挙げられた Balmer スペクトラムとテンソル三角圏の中心のスペクトラムの関係について述べた予想に対する反例を右有界導来圏を用いて与えた。

(2) 部分圏の分類と、分類空間の復元について

上で述べたように代数幾何、環論、モデュラー表現論などの分野において、対応する圏を通して元の代数的な対象について調べる手法がよく用いられる。そこで現れる自然な疑問として「対応する圏がどれ位元の対象の情報を持つか」がある。私は与えられた三角圏の濃密部分圏を分類するような位相空間が、同相を除いて一意に決まることを示した。この結果を応用することで、いくつかの事実を得た。

第一に、Takahashi によって与えられた完全交差局所環の特異圏の濃密部分圏の分類を用いて、特異軌跡が特異圏の不変量であることを示した。特異圏の三角同値は環の表現論において重要な役割を果たすことが知られている。しかし、特異圏の三角同値を特徴付けることは一般に難しい問題で、可換環上では具体例として Knörrer の周期性と呼ばれるもののみしか知られていない。この結果は特異圏の三角同値の一つの必要条件を与える。

第二に、この結果をテンソル三角圏に応用することで、あるクラスのテンソル三角圏においては、その Balmer スペクトルがテンソル構造を用いずとも三角圏構造から決定されることを示した。具体

的なテンソル三角圏に適用することで、

• ネーター準アファインスキーム X に対して、X の次元は完全導来圏 $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ の不変量

• p 群 G と、標数が p であるような体 k に対して、G の p 階数が安定加群圏 $\underline{\mathsf{mod}}\, kG$ の不変量

であることを示した。

(3) 完全圏の稠密部分圏の分類

これまで扱って来たのは、直和因子で閉じた加法部分圏（以下加法閉部分圏）である。一方で、対局にある概念として稠密部分圏と呼ばれるものがある。定義からの簡単な帰結で加法圏の任意の加法部分圏は、ある加法閉部分圏の稠密部分圏となることがわかる。従って、加法部分圏を分類するためには加法閉部分圏と稠密部分圏を分類すれば良いことが分かる。三角圏上の稠密部分圏の分類については、Thomason による稠密三角部分圏の分類が知られている。この分類では三角圏 $\mathcal{T}$ の稠密三角部分圏を $\mathcal{T}$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{T})$ の部分群を用いて分類している。

最後に、完全圏における稠密部分圏の分類について考察した。完全圏においてじゅうような部分圏のクラスとして、短完全列に対して 2-out-of-3 条件を満たすような部分圏（以下 2-out-of-3 部分圏）がある。例えば、完全圏の濃密部分圏は加法閉 2-out-of-3 部分圏に他ならない。私は、与えられた完全圏 $\mathcal{E}$ とその生成系（もしくは余生成系）$\mathcal{G}$ に対して、$\mathcal{G}$ を含むような稠密 2-out-of-3 部分圏を Grothendieck 群の部分群で $\mathcal{G}$ の像を含むようなもので分類した。この結果と Thomason の結果を組み合わせることで、完全圏の有界導来圏 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathcal{E})$ の稠密三角部分圏で $\mathcal{G}$ を含むものと、E の稠密 2-out-of-3 部分圏で $\mathcal{G}$ を含むようなものの間の全単射を構成した。この全単射は Krause-Stevenson の結果の類似となっている。