

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 松井 紘樹

論 文 題 目

Classification theory of subcategories around commutative algebra

(可換環論の周辺の部分圏の分類理論について)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
行 者 明 彦

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
高 橋 亮

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
柳 田 伸 太 郎

論文審査の結果の要旨

松井氏の研究の動機. 多元環 A 上の直既約加群の同型類を分類することは、極めて困難であり、少し粗い分類を考えることが大切になる。例えば、有限生成 A -加群の有界導来圏 $D^b(A\text{-mod})$ の中で、有限生成 A -加群 M から、何らかの意味で生成された部分圏 $\langle M \rangle$ たちや、それらを含む「良い」部分圏たちを分類することが自然に考えられる。

この問題を少し一般化して考えると、例えば、Hopkins-Neeman 1992 の結果を念頭に置くと、ネーター可換環 R に対して

(*) $\{D^b(R\text{-mod})$ の thick な三角部分圏たち $\}$ の分類

が自然に問題となる。

しかるに Balmer 2005 は、可換なテンソル三角圏 \mathcal{T} の三角部分圏について「thick \otimes -イデアル」「素 thick \otimes -イデアル」なる概念を定義し（以下、「 \otimes -イデアル」「素 \otimes -イデアル」と略す）、環付き空間 $\text{Spec } \mathcal{T}$ を構成し、

$\{\mathcal{T}$ の radical な \otimes -イデアルたち $\}$

が（構造層を忘れた）位相空間 $\text{Spec } \mathcal{T}$ で記述されることを示した。

この Balmer の研究を用いるためには、(*) を少し修正して

(*)' $\{D^-(R\text{-mod})$ の \otimes -イデアルたち $\}$ の分類

を考えなければならない。これが松井氏と高橋亮氏の、一連の共同研究の動機である。

松井氏は、高橋亮氏との共同研究で、以下を含む多くの結果を得た。

定理 B. 次の自然な一対一対応がある。

$\{(*)'\}$ のうち有界複体で生成される \otimes -イデアルたち $\} \leftrightarrow \{\text{Spec } R$ の閉集合の和集合たち $\}$

これで $\text{Spec } R$ が、 $\text{Spec } D^-(R\text{-mod})$ を部分的に記述していることが分かった。両者を比較するのが次の定理 C である。

定理 C. (1) 次のような写像が構成できる： $\text{Spec } D^-(R\text{-mod}) \xrightleftharpoons[\mathcal{S}]{\mathcal{S}} \text{Spec } R$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = 1$.

(2) 次は同値。

(i) \mathcal{S} は、その像への同相写像。

(ii) $\dim R \leq 1$ 、かつ、 R の極大イデアルは有限個。

(3) 次は同値。

(i) \mathcal{S} は同相写像。

(ii) $\dim R = 0$ 。

さらに、松井氏は、単著論文で、以上のような結果から、テンソルの構造を捨てることを試みて、次のような結果を得た。

定理 G. 必ずしもテンソル構造を持たない三角圏 \mathcal{T} に対して、位相空間 X が存在して、

論文審査の結果の要旨

自然な一対一対応

$$\{T \text{ の thick な部分三角圏たち} \} \leftrightarrow \{X \text{ の閉集合の和集合たち} \}$$

があれば、そのような X は同相を除いて一意である。

松井氏は、この結果の応用として、例えば、quasi-affine スキーム X に対して、完全複体の三角圏 $D^{\text{perf}}(X)$ が、(構造層を忘れた) 位相空間 X を一意に定めることを示した。松井氏は、他にも、モジュラー表現論や、特異点の幾何学においても、定理 G の、興味深い応用を見出した。

以上のように、松井氏から提出されたものは、学位論文として十分な内容を持つものである。2018年2月8日に学位の公開審査セミナーを行ったが、松井氏は、問題の背景や、主結果とその意義が、非専門家にもよく分かるように講演された。以上により学位審査委員会は松井氏に学位を授与するべきであると判断する。