別紙４

報告番号	※　　　　第　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目 Operator splitting for dispersion-generalized Benjamin-Ono equations

（分散項を一般化した Benjamin-Ono 方程式系に対する作用素分割）

氏　　名　　徳増　孝信

論　文　内　容　の　要　旨

微分方程式に対する splitting method とは，微分方程式の近似解を計算する手法の一つであり，数値計算でよく用いられるものである。具体的には次のような手法である。時間微分を含まないような作用素 C を用いて$\partial_t u = C(u)$と表される微分方程式を考える。作用素 C が，$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$の形で表される時，時間微分を含まない項のうち１個を落とす作業を行うことで，２通りの微分方程式$\partial_t u = A(u)$，$\partial_t u = \mathrm{B}(u)$を新たに作り出すことができる。この２個の微分方程式による方程式系を繰り返し解いたものを近似解とする手法が splitting method である。

２個の微分方程式の組合せ方によって splitting method の近似解の評価は異なる。今回私が扱ったのは Godunov 近似，Strang 近似と呼ばれる２手法である。Godunov 近似による時間幅⊿t の発展は以下の手順で行う。

① 初期値に対し，$\partial_t u = A(u)$を⊿t まで解く。

② ①の時刻⊿t での解を初期値とし，$\partial_t u = \mathrm{B}(u)$を時刻⊿t まで解く。

手順②で得られた解を Godunov 近似の，時間⊿t 後の近似解という。この近似解を次の段階の初期値と考えて手順①②を合計 N 回くり返すと，時刻 T(＝N⊿t)での近似解が得られる。一方，Strang 近似による時間幅⊿t の発展は以下の手順で行う。

① 初期値に対し，$\partial_t u = A(u)$を時刻⊿t/2 まで解く。

② ①の時刻⊿t/2 での解を初期値とし，$\partial_t u = \mathrm{B}(u)$を時刻⊿t まで解く。

③ ②の時刻⊿t での解を初期値とし，$\partial_t u = A(u)$を時刻⊿t/2 まで解く。

手順③で得られた解を Strang 近似の，時間⊿t 後の近似解という。この近似解を次の段階の初期値と考えて手順①－③を合計 N 回くり返すと，時刻 T(＝N⊿t)での近似解が得られる。

今回の私の研究目標は，KdV 方程式や Benjamin-Ono 方程式の線型項を，より広いクラスの Fourier multiplier に拡張し，そのような偏微分方程式に対する splitting method の誤差評価を行うことである。更に，考える関数空間を，非整数次まで含むような Sobolev 空間に拡張して考える。特に，線型項の分散効果が小さい上に非整数次の微分階数を持つような偏微分方程式系（例えば水の表面波のモデルでもある Whitham 方程式）にも適用できるように拡張する点を目標とした。

過去，Tao らにより，KdV 方程式に対しては splitting method の誤差評価が行われている。非線型項に微分が含まれているため，KdV 方程式に対する splitting method の誤差評価は困難であった。例えば非線型項が未知関数 u のべき乗で与えられている非線型 Schrödinger 方程式の場合，Sobolev の埋め込み定理を用いることで容易に誤差評価ができる。Tao らは KdV 方程式の非線型項の微分の損失を，部分積分を用いたエネルギー法で解消し，結果として Godunov 近似では⊿t の 1 乗，Strang 近似では⊿t の 2 乗の誤差評価を得た。私は今回彼らの手法を応用し，KdV 方程式や Benjamin-Ono 方程式の線型項を，より広いクラスの Fourier multiplier に拡張した偏微分方程式に対して splitting method の誤差を評価した。更に，考える関数空間を，非整数次まで含むような Sobolev 空間に拡張した。この場合，Fourier 空間で解析を行うことが必須で，KdV 方程式のエネルギー法をそのまま用いることは出来ない。しかし今回，Tao らが部分積分を行って評価していた部分を，Kato-Ponce の commutator estimate を利用して評価することにより，部分積分を用いた場合と同様の評価を得ることに成功した（Proposition 2.4）。この評価を用いることでより広いクラスの線型項を持つ偏微分方程式，特に分散効果が弱く非整数階の微分を含むような線型項を持つ場合に対する splitting method の誤差評価に成功した。同時に，Tao らの KdV 方程式に対する誤差評価の結果を，初期値の正則性がより弱いものに拡張することにも成功した。

また，多くの splitting method の論文では，近似の微分方程式の可解性についてはほとんどの場合で証明せずに議論を行っている。今回の論文ではその点にも注意し，近似方程式に対する可解性についても，a priori 評価と呼ばれる手法を用い厳密に証明した。