

## 論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 徳増 孝信

論 文 題 目

Operator splitting for dispersion-generalized Benjamin-Ono equations

(分散項を一般化した Benjamin-Ono 方程式系に対する作用素分割)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士(理学)  
杉 本 充

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(数理科学)  
津 川 光 太 郎

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士  
木 村 芳 文

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士(理学)  
加 藤 淳

## 論文審査の結果の要旨

微分方程式の近似解を数値計算する手法のひとつとして、splitting method とよばれる方法論が知られている。これは、時間発展する偏微分方程式の初期値問題において、その主要部のみの方程式とその他の部分のみの方程式に「split」し、それぞれを小時間分割ごとに交互に時間発展させることにより近似解を構成する方法であり、時間分割のスケールに対して1次の近似が可能な Godunov 近似と、より精密に2次の近似が可能な Strang 近似などがよく用いられている。

一方、様々な水面波の方程式を代表例とする分散型方程式に対する非線形初期値問題に関する研究は、いくつもの新しい手法の開発とともにこの30年の間に飛躍的な進展をとげており、それらの手法が適用される方程式の範囲を広げつつ精力的な研究が世界的に行われている。KdV 方程式や Benjamin-Ono 方程式などは、このような解析が有効に働く典型例である。特に初期値の空間として Sobolev 空間  $H^s$  を取るときに、できるだけ小さい正則性の指数  $s$  に関してその適切性（すなわち解の存在・一意性・初期値への連続依存性）を導く問題において、1993年に Bourgain が開発した Fourier 制限ノルム法を用いてアプローチしたことを端緒として、この  $s$  に対する制約が様々な状況において大幅に改良されることとなった。

以上の経緯を踏まえるならば、分散型方程式に対する近似解を数値計算する際において、初期値の空間  $H^s$  として小さい  $s$  をとった場合であっても、前述の splitting method により近似解が数値計算されることを数学的に正当化できるかという問題意識は自然である。実際、これを KdV 方程式に対して試みた研究として、Holden-Karlsen-Risebro-Tao (2011) の結果が知られているが、これによれば、 $s$  が5以上の奇数の場合には Godunov 近似が、17以上の奇数の場合には Strang 近似が正当化される。また、Benjamin-Ono 方程式に関する結果としては、Dutta-holden-Koley-Risebro (2015) により、 $s$  が  $5/2$  の場合に Godunov 近似が、 $9/2$  の場合に Strang 近似が正当化されている。

徳増孝信氏の学位論文はこのような状況を背景としたものであり、主な成果は以下の通りである：

- (1) KdV 方程式に対して  $s$  が  $9/2$  より大きい実数の場合に Godunov 近似を、 $21/2$  より大きい実数の場合には Strang 近似 をそれぞれ正当化した。これは、Holden-Karlsen-Risebro-Tao の結果において  $s$  が奇数であるという制約を取り除き、さらには非整数の場合も許容したのみならず、より小さい  $s$  に対してまで結果を拡張したことに相当する。
- (2) KdV 方程式、(一般化) Benjamin-Ono 方程式、Whitham 方程式などの分散型方程式、さらには分散型ではない Burgers 方程式 などをも特殊な場合として含む一般的な方程式に対して考察し、(1) をひとつの具体例とする統一的な結果を与えた。これは、Dutta-holden-Koley-Risebro の結果を一般的な立場から捉え直したことに相当する。

以上の成果においてその鍵となった議論は、主たる論法であるエネルギー評価において、Kato-Ponce 型の交換子評価を導く事により、素朴な部分積分の方法を回避した点にある。Kato-Ponce の交換子評価はもともとは Euler 方程式、Navier-Stokes 方程式などの非線形評価のために見いだされたものであるが、このような新しい応用方法を見いだした点もひとつの意義深い貢献であろう。

このように、徳増孝信氏の研究成果は先行研究における結果を改良・一般化して偏微分方程式論の数値解析的な側面における新しい知見を与えており、学位論文として十分な内容を持つものであると認められる。また、審査委員会は2018年2月23日に

## 論文審査の結果の要旨

公開による学位審査セミナーを行ったが、その場において申請者はそれぞれの問題の背景や意義や証明の基本的なアイデアについての明快な説明を行ない、さらには質疑に対して的確に応答するなど、この分野における申請者の十分な学識が確認された。

以上により、本学位審査委員会は、申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する。