別紙4

報告番号	※　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Measures and *K*-Theory on the Boundary of Trees
(樹木の境界上の測度と K 理論)

氏　　名　松岡　勇気

論　文　内　容　の　要　旨

完全不連結空間 X 上の加法群 M に値を持つ測度とは, 開かつ閉な X の部分集合に M の元を対応させる関数であって, 有限加法性をみたし, 全空間 X での値が 0 になるもののことをいう. この測度は例えば X が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ で, M が $\mathbb{C}_p$ の場合において p 進ゼータ関数の研究に用いられる他, モジュラー群 $\mathrm{PSL}_2(Z)$ に付随する樹木の境界を X としたときに, 古典的なモジュラー・シンボルと対応するなど, 数論的な文脈で用いられることが多い.

本学位論文においては, この完全不連結空間上 X の測度を, 特に X が樹木の境界として現れる場合に, 幾何的および非可換幾何的な観点から研究を行った.

幾何的な側面からの研究としては, 半等質樹木 $\mathcal{T}$ に対して有理端点のなす集合 $\partial_R\mathcal{T}$ を定義し, 樹木の境界 $\partial\mathcal{T}$ 上の測度の Alexander-Spanier 1-コサイクルとしての表示を得た:

定理 1. 半等質樹木 $\mathcal{T}$ と加法群 M に対して, $\mathcal{T}$ の境界を $\partial\mathcal{T}$, 有理端点のなす集合を $\partial_R\mathcal{T}$ とするとき, 群としての同型

$$\mathrm{Meas}(\partial\mathcal{T}, M) \cong Z^1_{AS}(\partial_R\mathcal{T}, M)$$

が存在する. ここで $\mathrm{Meas}(\partial\mathcal{T}, M)$ は $\partial\mathcal{T}$ 上の M に値をもつ測度全体のなす群を表し, $Z^1_{AS}(\partial_R\mathcal{T}; M)$ は $\partial_R\mathcal{T}$ 上の M に係数をもつ Alexander-Spanier 1-コサイクルのなす群を表す.

また樹木に対して群 G が作用している場合, その作用が有理端点を保つような作用であれば, 上述の定理の G-同変版が得られる. すなわち, G-加群 M に対して, $\mathrm{Meas}_G(\partial\mathcal{T}, M)$ で G-同変な測度全体を表し, $Z^1_{AS,G}(\partial_R\mathcal{T}; M)$ で G-同変な 1-コサイクルのなす群を表すとき, 同型

$$\mathrm{Meas}_G(\partial\mathcal{T}, M) \cong Z^1_{AS,G}(\partial_R\mathcal{T}, M)$$

が存在する. また, この定理の応用として, $\mathrm{Meas}_G(\partial\mathcal{T}, M)$ から群コホモロジー $H^1(G; M)$ への射を得ることができる.

有理端点を保存するような群作用の例として, 有限巡回群の自由積の作用がある. 半等質樹木の次数を (q, ℓ) とするとき, 隣接する二つの頂点 v, w で v の次数が q, w の次数が ℓ となるものを考える. このとき $\mathbb{Z}_{q+1}$ および $\mathbb{Z}_{\ell+1}$ の作用を各々の生成元 τ, σ が定める回転で定義すると, これらの群の自由積 $\mathbb{Z}_{q+1} * \mathbb{Z}_{\ell+1}$ は樹木に作用し, しかも有理端点を保存する作用となる. この作用から定まる同変 1-コサイクルのなす群, 従って同変測度の全体は次の形に表すことができる:

定理 2. $G = \mathbb{Z}_{q+1} * \mathbb{Z}_{\ell+1}$ の次数 (q, ℓ) の半等質樹木への作用を上述の様に定める．G-加群 M から $M \times M$ への射 $(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$ を

$$(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) : m \longmapsto (m + \tau m + \cdots + \tau^q m,\ m + \sigma m + \cdots + \sigma^\ell m)$$

で定義するとき, 以下の同型が成り立つ

$$\mathrm{Meas}_G(\partial\mathcal{T}, M) \cong Z^1_{AS,G}(\partial_R\mathcal{T}, M) \cong \ker(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}).$$

これら樹木の境界における結果の応用として, 古典的な $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ に対するモジュラー・シンボルの理論を Hecke 三角群 G_q に一般化することができる．Hecke 三角群 G_q は Fuchs 群の一種であり, 群として $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$ と同型である．このとき G_q が自然に作用する次数 $(q-1, 1)$ の半等質樹木 $\mathcal{T}_q$ を構成することができ, しかも作用は有理端点を保つものになる．さらにこの樹木の有理端点全体は, G_q の一次分数変換による無限遠点 ∞ の軌道 $G_q(\infty)$ と自然に対応し, $G_q(\infty) \times G_q(\infty)$ 上の関数として定義されるモジュラー・シンボルが有理端点上の Alexander-Spanier 1-cocycle のなす群と対応する:

定理 3. Hecke 三角群 G_q とその指数有限な部分群 $\Gamma \subset G_q$ に対して, Γ-加群 M に値をもつ Γ に対するモジュラー・シンボルの全体を $\mathbb{M}_\Gamma(M)$ で表す. このとき自然な同型

$$Z^1_{AS,G}(\partial_R\mathcal{T}_q, M) \cong \mathbb{M}_\Gamma(M)$$

が存在する.

このとき, 有理関数全体を $\mathbb{C}(z)$ で表すと, Hecke 三角群 G_q に対する有理周期関数全体が $\mathbb{C}(z)$ に値をもつモジュラー・シンボル全体 $\mathbb{M}_\Gamma(\mathbb{C})$ と一致することが, 樹木への群作用に関しての定理から導かれる.

なお有理端点のなす集合 $\partial_R\mathcal{T}$ は樹木の境界の一部分だけを取り出したものであるが, 実はこれら有理端点を単位円に稠密に埋め込むことにより (このような埋め込みは常に存在する), 元の樹木の境界 $\partial\mathcal{T}$ を復元することができる.

定理 4. $\Phi : \partial_R\mathcal{T} \to S^1$ を有理端点のなす集合から単位円への像が稠密な単射とする． このとき $\Phi(\partial_R\mathcal{T})$ に対する S^1 の不連結化 $D_{\Phi(\partial_R\mathcal{T})}$ が定まり, $\partial_R\mathcal{T}$ と $D_{\Phi(\partial_R\mathcal{T})}$ は同相となる.

この定理で用いられる不連結化は J.Spielberg による Fuchs 群の S^1 への作用から定まる接合積 C^* 環の研究で導入された．ここで Fuchs 群の作用は一次分数変換で定められるが, この作用は S^1 上で稠密になる軌道を持ち, 特に商空間 S^1/G 上の関数を考えると, それは定数関数しか存在しないことが分かる．従って関数環を通してみればこの商空間は一点と区別できないことになり, 当然そこには興味深い不変量は期待できない．そのような空間を扱う一つの方法といて, 接合積 C^* 環を商空間上の関数環とみなすというアイデアが A.Connes により提唱された．特に上述の Fuchs 群の作用の様に, 群が作用している空間が他の空間の境界として見做せる場合が興味深く, 境界の接合積の研究として非可換幾何学の一つの研究の流れを作っている.

本学位論文では, このような研究の一環として, 樹木の境界に自由群 Γ が作用している場合の接合積の K 理論の研究を行った．完全不連結コンパクト Hausdorff 空間 X についての K 理論は X 上の局所定数関数全体と一致することが知られており, この事実と自由群の作用に対する Pimsner-Voiculescu 完全系列を用いることにより, 接合積 $C(X) \rtimes_r \Gamma$ の K-ホモロジー $K^0(C(X) \rtimes_r \Gamma)$ と Γ 不変な $\mathbb{Z}$ に値をもつ X 上の測度全体 $\mathrm{Meas}(X, M)^\Gamma$ が同型となることが分かる．このとき $\mathrm{Meas}(X, M)^\Gamma$ は群コホモロジー $H^0(\Gamma; \mathrm{Meas}(X, M))$ と見ることができ, 特に Γ が数論的部分群となる場合に, Hecke 作用素 $T_g : H^0(\Gamma; \mathrm{Meas}(X, M)) \to H^0(\Gamma; \mathrm{Meas}(X, M))$ が得られる．一方で接合積 C^* 環の K 理論に対する Hecke 作用素 $T_g : K^0(C(X) \rtimes_r \Gamma) \to K^0(C(X) \rtimes_r \Gamma)$ が最近 B.Mesland と H.Sengun により定義されたが, 本論文ではこれら Hecke 作用素が上述の同型と両立することを示した:

定理 5. 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} K^0(C(X) \rtimes_r \Gamma) & \xrightarrow{T_g} & K^0(C(X) \rtimes_r \Gamma) \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{Meas}(X;\mathbb{Z})^\Gamma & \xrightarrow{T_g} & \mathrm{Meas}(X;\mathbb{Z})^\Gamma \end{array}$$

また, 群コホモロジーに対して定まる Hecke 作用素とモジュラー・シンボルに対して定まる Hecke 作用素は自然な同型に対して可換である. 従って上述の定理から, K 理論における Hecke 作用素とモジュラー・シンボルに対する Hecke 作用素が自然に対応することも分かる.

K 理論における Hecke 作用素の研究は最近始められたばかりであり, 基本的な性質や定義の妥当性の確認が行われている段階である. 本論文の結果は B.Mesland と H.Sengun による Hecke 作用素の定義の正当性を支持するものだといえる.