論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　　第　　　　　号

氏　　　　　名　　　松岡　勇気

論　文　題　目

Measures and K-Theory on the Boundary of Trees

（樹木の境界上の測度と K 理論）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理学）

植　田　好　道

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　Ph.D.

森　吉　仁　志

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士

納　谷　　　信

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）

松　尾　信　一　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

非可換幾何学とは，群作用の商空間として現れる特異な空間のように，標準的な数学手法では歯が立たない幾何学的空間に対して有効な新しい方法論の総称であり，その視野は極めて広い．また，非可換幾何学の流儀には様々なものがあるが，本論文に至る申請者の研究は，1980 年頃に A. Connes により提唱された非可換幾何学を背景としている．Connes による非可換幾何学は（しばしば特異な空間が現れる）葉層構造に対する指数定理がその出発点と見なせるが，当初，非可換トーラスと呼ばれる C^*-環として具体的に実現される例を出発点に C^*-環に対する K-理論を武器にした位相幾何的な研究が先行した．その後，素粒子論の標準模型に題材を探すなど，極めて広範な発展を遂げた．そのような広範な発展の最近のものの一つとして整数論との関連研究がある．整数論との関連研究も複数あるようだが，本論文の題材は整数論に動機付けられた非可換幾何学に関する最近の Y. Manin と M. Marcolli の研究から見出された．

本論文は四章からなり，第一章は樹木とその境界の概念，Alexander–Spanier コサイクル，群コホモロジー，C^*-環の K-理論から必要なことをまとめている．第二章で四つの主定理のうち三つを証明する．第三章では第二章で得られた結果を用いて G. Wiese の Hecke 三角群に対する既知の結果に新しい説明を与えている．第四章はそれまでの二つの章とは独立で，C^*-環の K-理論に最近導入された Hecke 作用素の意味付けについて一つの注意を与えるのが目的である．なお，第四章で与えられた結果はその前の章で得られた結果とは独立であるが技術的には関連がある．以下，本論文で与えられた申請者の研究成果をその価値判断を加えつつ概説する．

Manin と Marcolli はモジュラーシンボルと呼ばれる整数論研究に由来する数学的対象をモジュラー群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ に関連して取り扱った．特に，彼らは $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ から自然に得られる樹木の境界上の測度と $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ に対するモジュラーシンボルが対応することを発見した．ここで，樹木の境界とは樹木上の一点を固定し，そこから無限遠方を眺めて見える風景を数学的に厳密に定式化したものであり，具体的には固定した一点を始点とする無限路全体の適当な商空間として得られる完全不連結空間である．また，ここでいう測度とは，完全不連結空間内の開かつ閉な部分集合全体を定義域とする加法群に値を取る有限加法的集合関数であって全空間の値が 0 となるものである．申請者は上述の Manin と Marcolli の発見に着目し研究を進めた．すなわち，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ に加え Hecke 三角群をも取り扱える半等質樹木の境界上の測度を研究した．申請者の発見は樹木の境界上の測度は 1-コサイクルに他ならないという洞察である．この洞察に基づき，本論文の一つ目の主定理が得られる．すなわち，半等質樹木の境界上の測度全体と半等質樹木の有理端点のなす空間上の Alexander–Spanier 1-コサイクルの空間の間に具体的な同型写像が存在することを示した．なお，適当な条件の下でこの定理の主張の同変版も成立することを指摘している．ここで半等質樹木の有理端点の空間は，境界を閉区間 $[0,1]$ の対応物とみなした時に $[0,1]$ 内の有理数全体のようなものと考えられる．実際，このことは三つ目の主定理およびそれに至る議論により合理化される．その証明は Fuchs 群による接合積 C^*-環の J. Spielberg の解析に現れる技術を使ったものであり，申請者の非可換幾何学に対する広い知識が役立っている．また，これまで概説した主定理群の証明中には β-シフトと呼ばれる記号力学系の研究で現れるアイディアに酷似した議論が見出せる．樹木の境界とそれへの群作用を C^*-環で捉える研究は上述の Spielberg も含め，1990 年代以来，多くの作用素環研究者に取り上げられており，それらの研究は多くの重要な知見を作用素環論に提供した．また，背後に記号力学系的な現象がしばしば現れることもよく知られている．他方で，ここでいう整数論に基づく非可換幾何学の研究が作用素環論の文脈での樹木の境界を取り扱う研究に大きな影響を与えているとは言えない．ゆえに，申請者の本論文で展開された研究は今後の研究に示唆を与える可能性を持つと考えられる．以上の定理の他に申請者は本論文において Hecke 三角群を含む自由積群 $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$ の場合に Alexander–Spanier 1-コサイクルの空間の具体的記述を得た．これは Wiese による Hecke 三角群に対するモジュラーシンボルの研究に関連する． 実際，Wiese の仕事に対する申請者の視点からの説明が第三章で与えられている．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

以上の話題とは少し異なる方向の申請者の研究成果が本論文の四つ目の主定理である．そこでは少し設定を変えて自由群 $\mathbb{F}_r$ の完全不連結空間への作用を考察している．この設定の変更は C^*-環の K-理論に対する技術的な制約が理由であるが，その点を除けば一般性のある考察である．具体的には，その境界作用から自然に得られる C^*-環の K-群，K-ホモロジー群を，M. Pimsner と D. Voiculescu による C^*-環に対する K-理論の結果を用いて計算し，特に，K^0-ホモロジー群を整数群 $\mathbb{Z}$ に値を取る上述の意味の測度であって $\mathbb{F}_r$ の作用で不変なもの全体と同一視した．これを用いて，極最近 B. Mesland と M.H. Şegün により導入された C^*-環の K-理論における Hecke 作用素が群コホモロジーのそれと両立することを示している．本論文のこの部分は Mesland とŞegün の仕事を正当化する注意として独立した価値を持ち，短報論文に発展し得るものと考えられる．

本論文で与えられた研究成果の価値判断は上記の通りであり，学位審査委員会としては学位論文としての価値を有すると判断する．また，公開審査会を 2 月 22 日に行い，申請者は本論文の研究内容を丁寧に説明し，樹木の境界とその上の測度の概念，コサイクルおよび Connes の非可換幾何学の基礎の一つをなす C^*-環に対する K-理論についての正確な知識を示し，本論文の繋がる申請者の研究の背後にあった着想を明確に説明することにより学位を授与されるに相応しい学識を示した．

以上により学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．