別紙４

| 報告番号 | ※　　　　第　　　　号 |
|---|---|

# 主　論　文　の　要　旨

論文題目　A Study on the Relations for Special Values of Some Multiple Zeta Functions

（様々な多重ゼータ関数の特殊値の関係式についての研究）

氏　　名　門田　慎也

## 論　文　内　容　の　要　旨


本論文は、多重ゼータ値、等号付き多重ゼータ値およびルート系のゼータ関数について、研究の歴史や現在までに知られている重要な結果および予想を交えながら、自身が得た結果をまとめたものである。第 1 節において、それらの研究の歴史などをまとめて紹介し、残りの第 2, 3, 4, 5 節で自身が得た結果の主張および証明を紹介する構成になっている。

多重ゼータ値とは、自然数 $k_1, \ldots, k_r$ に対して、次の $r$ 重級数で定義される実数値のことである。

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \ldots m_r^{k_r}}.$$

ただし、級数の収束のため、$k_r \geq 2$ とする。多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ に対して、変数の総和 $k_1 + \cdots + k_r$ を weight と呼び、$r$ を depth という。ここで、depth は変数の個数ではなく、多重ゼータ値の定義級数が $r$ 重であることに由来することに注意しておく。多重ゼータ値の研究の始まりは18世紀の Euler によるものだといわれており、彼は関–Bernoulli 数を用いて Riemann ゼータ関数の正の偶数点での値の公式を与えたり、weight が $k \geq 3$ の二重ゼータ値をすべて足し上げると $\zeta(k)$ に等しくなるという関係式を得ている。彼の研究以降、しばらくの間は活発な研究が行われてはいなかったが、1990年代に入り Drinfel'd による量子群の研究や、Zagier による多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元に関する予想などをきっかけに様々な数学や物理との結びつきや、多重ゼータ値の間の関係式の研究が急速に発展してきており、今もなお盛んに研究が行われている。現在では、超幾何関数、mixed Tate motive の理論、結び目理論などを用いて関係式族が得られている。また、モジュラー形式や数論幾何などの問題への応用が知られており、多重ゼータ値の間の関係式の研究は非常に重要なものであると認識されている。例えば、大野–Zudilin(2004)による重み付き和公式というものがある。これは、weight が $k$ で depth が 2 の多重ゼータ値を変数に依存するある因子を掛けてすべて足し合わせたものが $(k+1)\zeta(k)$ に等しいという関係式であり、Euler が示した関係式の類似物になっている。そしてこの関係式は Eie–Liaw–Ong(2013)によりある種の一般化が行われた。筆者は Eie–Liaw–Ong の結果のさらなる拡張になっている「パラメータを重みにもつような重み付き和公式」を得た。第 2 節において、この関係式の具体的な形および証明を与えている。さらに、彼らの関係式が多重ゼータ値の間の関係式の中でどのような位置づけになっているかを初めて解明した。このことについても第 2 節で言及している。

多重ゼータ値の定義級数において真の不等号を等号付き不等号に置き換えた級数で定義される実数値があり、等号付き多重ゼータ値と呼ばれている。多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値は互いに有理数係数の線型結合で書きあらわされることが知られているため、多重ゼータ値と同様に重要な研究対象であると認識されている。ところが、多重ゼータ値の間の関係式が多く知られているにも関わらず、等号付き多重ゼータ値の間の関係式はそれほど多く知られていない。特に、多重ゼータ値の間の関係式の類似物についてはほとんど知られていないのが現状である。第 3 節においては第 2 節で述べた筆者が得た多重ゼータ値の関係式の等号付き多重ゼータ値に対する類似物となっている関係式を紹介および証明している。

Zagier は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および複素変数 $s$ に対して Witten のゼータ関数 $\zeta(s,\mathfrak{g}) = \sum_{\varphi}(\dim\varphi)^{-s}$ を定義した。ただし $\varphi$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}$ 上の有限次元既約表現の同値類全体をわたる。正の整数点における値が Witten が考えていたゲージ理論に登場するある種のモジュライ空間の体積を表していることが知られており、このことからも重要な研究対象であることがわかる。小森–松本–津村は特に $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数である場合に焦点をあて、$\dim\varphi$ に Weyl の次元公式を適用し多変数化したものを定義した。それがルート系のゼータ関数である。ルート系のゼータ関数の特殊値は多重ゼータ値のある種の拡張だとみなすことができる。津村 (2004) や、井原–金子–Zagier (2006) らよって多重ゼータ値は Parity result と呼ばれる次の性質をもつことが証明されている : depth と weight の偶奇が異なる多重ゼータ値は、depth が自身未満の多重ゼータ値を用いて書くことができる。例えば、$\zeta(k_1,k_2)$ は $k_1+k_2$ が奇数の時に Riemann ゼータ値を用いて書けるのである。小森–松本–津村(2015)はいくつもの具体例をもとに、二重級数で定義される $G_2$ 型ルート系のゼータ関数の特殊値に対して次の類似性質を予想した : weight が奇数である $G_2$ 型ルート系のゼータ値は Riemann ゼータ値および Dirichlet の $L$ 関数の特殊値を用いて書くことができるのではないか? 第 4 節では、Tornheim 型二重級数

$$\zeta_{a,b}(k_1,k_2,k_3) = \sum_{m,n>0} \frac{1}{m^{k_1} n^{k_2} (am+bn)^{k_3}}$$

の、$k_1+k_2+k_3$ が奇数であるときの評価を与えた。また、この結果の特殊な場合を考えることで小森–松本–津村による予想を完全解決することができる。

第 5 節では、ルート系のゼータ関数の枠組みを超えた、より一般の多重級数の正の整数点における値に対して、評価を与えた。この結果の系として、weight と depth が異なれば、depth が自身未満の多重級数を用いた表示を与えることができる。これも、Parity result のひとつの一般化である。