論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　名　　門田　慎也

論　文　題　目

A Study on the Relations for Special Values of Some Multiple Zeta Functions
（様々な多重ゼータ関数の特殊値の関係式についての研究）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
岡　田　聡　一

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
松　本　耕　二

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
津　川　光　太　郎

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
古　庄　英　和

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Euler–Zagier 型多重ゼータ関数

$$\zeta_r(s_1,\dots,s_r)=\sum_{1\le n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}}\quad(s_1,\dots,s_r\in\mathbb{C})\tag{1}$$

に対して，絶対収束領域内にある整数点での値 $\zeta_r(k_1,\dots,k_r)$ $(k_1,\dots,k_{r-1}\in\mathbb{Z}_{\ge1},\ k_r\in\mathbb{Z}_{\ge2})$ を多重ゼータ値 (MZV) という．多重ゼータ値の研究は，古くは Euler にまで遡るが，1990 年代に入ってモチーフ理論，結び目理論，数理物理学など諸分野との関係が見出されるようになると急速に多くの研究者の注目を集め活発に研究されるようになった．その中でも中心的なテーマが，多重ゼータ値の間に成り立つ種々の関係式の追求である．申請者の学位申請論文もこのテーマを扱っているが，Euler–Zagier 型の場合の特殊値にとどまらず，より広い枠組みで考察を進めている点が 1 つの特徴である．

この論文は，歴史的な流れや先行研究に関するサーベイ (Section 1) を除くと，

(A) 多重ゼータ値および多重ゼータスター値に対するパラメータつきの重みつき和公式を扱った部分 (Section 2, 3),

(B) ルート系のゼータ関数やその一般化に対する parity result を扱った部分 (Section 4, 5)

の 2 つに分けることができる．

まず，(A) について，重み付き和公式は，多重ゼータ値の間に成り立つ関係式の一種で，大野–Zudilin による

$$\sum_{k_1+k_2=k-1}2^{k_2+1}\zeta_2(k_1,k_2+1)=(k+1)\zeta(k)$$

の発見を契機として，さまざまな一般化や類似物が見出されてきた．申請者は，Eie–Liaw–Ong による大野–Zudilin の和公式の一般化に注目し，それをさらに大きく一般化したパラメーターつきの重みつき和公式（多重ゼータ値のある種の母関数の間の関係式）を見出し証明を与えている (Section 2)．また，多重ゼータスター値（(1) において和の条件に現れる不等号を等号つき不等号に置き換えた場合の特殊値）に対してもその類似物を得ている (Section 3)．このような結果を得るには巧妙で複雑な積分計算が必要であるが，申請者は明確な見通しを持ってその計算を完遂している．

次に，(B) について，parity results とは，depth r と weight $k_1+\cdots+k_r$ の偶奇が異なるとき $\zeta_r(k_1,\dots,k_r)$ が depth $r-1$ 以下の多重ゼータ値で書ける，というタイプの結果である．Euler–Zagier 型多重ゼータ値については既に一般的に証明されているが，類似の性質がより一般の多重級数についても成り立つのではないか，という問題も近年になって注目され研究が開始されている．小森–松本–津村は，Euler–Zagier 型ゼータ関数の一般化であるルート系のゼータ関数の研究の中で，G_2 型のルート系に付随するゼータ関数の特殊値

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

$$\zeta_2(k_1,\ldots,k_6;G_2)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{k_1}n^{k_2}(m+n)^{k_3}(m+2n)^{k_4}(m+3n)^{k_5}(2m+3n)^{k_6}}$$

に対して，$k_1+\cdots+k_6$ が奇数ならばその値が Riemann ゼータ関数の特殊値と 3 を法とする Dirichlet L 関数の特殊値で書けるのではないか，という予想を提示した．申請者は，Tronheim 型 2 重級数に対する parity result というより一般的な結果を証明し，その特別な場合と岡本による先行研究を合わせることによって，上記の小森–松本–津村の予想を完全に解決している (Section 4)．ここでは，岡本による先行研究の方針を踏襲しながらも，2 重ポリログ関数の性質を巧妙に用いたより精密な解析を行うことによって結論に到達している．さらに，申請者は，ルート系のゼータ関数の枠組みをさらに超えたより一般の多重級数

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}(m_1y_1+\cdots+m_ry_r)}}{m_1^{h_1}\cdots m_r^{h_r}(a_{11}m_1+\cdots+a_{1r}m_r)^{k_1}\cdots(a_{l1}m_1+\cdots+a_{lr}m_r)^{k_l}}$$

を導入し，この級数に対する一般的な parity result を定式化し証明を与えている (Section 5)．この parity result は，すでに知られているいくつかの parity results を特殊な場合として含むだけではなく，いくつかの新しい場合にも適用できる．また，証明方法も，Section 4 の論法とは大きく異なり，超平面配置上の格子和に関する小森–松本–津村の結果を援用する新しいものである．このような一般的な枠組みにおいても parity result が定式化できることを見抜いたことには独創性が認められる．

なお，Section 4 は，岡本卓也氏，田坂浩二氏との共著論文に基づくものであるが，研究方針が決まる以前の試行錯誤の段階から申請者が中核的な立場で活躍し論文の成立に大きく貢献していることを，学位審査委員会で確認している．

上述のように, この論文において得られている結果は，当該分野において意義のある重要な貢献であり，新規性も備えている．また，2018 年 2 月 26 日に本論文に関する公開学位審査セミナーを行い，歴史的な背景を含めた明快な講演と的確な質疑応答を通じて，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．

以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．