論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　　　第　　　　号

氏　　　　　名　　　亀山　昌也

論　文　題　目

Refined Large N Duality and Positivity Conjecture of Refined Chern-Simons Invariants

（Refined Large N 双対性と Refined Chern-Simons 不変量の正整数予想）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
菅　野　浩　明

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
粟　田　英　資

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
白　水　徹　也

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（数理科学）
川　村　友　美

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文の主結果は，結び目や絡み目のホモロジー的量子不変量に関連する Refined Chern-Simons 不変量から，それと等価な情報をもつ不変量 (refined reformulated invariants) の定義を与え，位相的 D ブレイン配位に対する BPS 状態の数え上げの物理的考察に基づいて，この不変量が正整数を係数とするローラン多項式となるという予想を提案したことである．さらに Mathematica を用いた計算機実験により，この予想の検証を行っている．

3次元多様体（とくに3次元球面 S^3）内の結び目や絡み目を分類するために，結び目や絡み目の様々な不変量が考えられてきた．1989 年に Witten は位相的場の理論である3次元 Chern-Simons 理論におけるループ演算子の期待値が，結び目や絡み目の量子不変量を与えることを提唱した．この方法では Chern-Simons 理論のゲージ群 G とループ演算子に与える G の表現 R を指定することにより様々な量子不変量が定まる．例えば $SU(2)$ に対して2次元表現を考えた場合が Jones 多項式である．本申請論文ではゲージ群 $SU(N)$ に対してヤング図 λ から定まる $SU(N)$ 既約表現を考えており，対応する不変量は色付き HOMFLY-PT 多項式と呼ばれている．色付き HOMFLY-PT 多項式は変数 $q, a = q^N$ のローラン多項式として計算されるが，その係数は常に整数となることが観察されていた．この事実に関して 1999 年に Khovanov は結び目 K に対して2重複体を構成し，そのホモロジー $\mathcal{H}^{i,j}(K)$ のポアンカレ多項式

$$Kh(K;\mathbf{q},\mathbf{t}) = \sum_{i,j} \mathbf{t}^i \mathbf{q}^j \dim \mathcal{H}^{i,j}(K)$$

が結び目の不変量となることを示した．このオイラー標数（$\mathbf{t} = -1$ を代入）が Jones 多項式を与えることから，その係数の整数性が説明される．Khovanov の結果を色付き HOMFLY-PT 多項式に対して拡張する試みがなされているが，一般の表現に対して具体的に不変量が計算できるホモロジー理論を構成する問題は未解決なままである．

これに対して3次元 Chern-Simons 理論と位相的弦理論の立場から Khovanov によるホモロジー理論と等価な理論を構成しようとする試みが，精密化 (Refined) Chern-Simons 理論である．1970 年代に 't Hooft により $SU(N)$ をゲージ群とするゲージ理論は $N \to \infty$ において弦理論によって記述されるという指導原理が提唱された．これをラージ N 双対性という．この原理を Chern-Simons 理論に適用することにより 1999 年に Gopakumar-Vafa は S^3 上の $SU(N)$ Chern-Simons 理論の分配関数が $N \to \infty$ において3次元（トーリック）Calabi-Yau 多様体 $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \to \mathbf{P}^1$ 上の位相的弦理論の分配関数と一致することを示した．その後 Chern-Simons 理論のラージ N 双対性は Labastida-Mariño- Ooguri-Vafa らによってループ演算子に対応する D ブレイン（ラグランジュ部分多様体）を含む場合に拡張され，位相的弦理論の分配関数として結び目や絡み目の量子不変量（LMOV 不変量）を計算する処方箋が確立された．以上の先行研究の下で 2012 年に Aganagic-Shakirov は3次元 Chern-Simons 理論の精密化 (Refined Chern-Simons theory) を定義し，ループ演算子の期待値が結び目のホモロジー的量子不変量を再現すると予想した．彼らの定義では，期待値の不変性を保証するために結び目に対する $U(1)$ 作用を仮定する必要があり，結び目はトーラス結び目 $T_{m,n}$ に制限されるが，ヤング図 λ から定まる任意の $SU(N)$ 既約表現に対して不変量が計算できるという利点を持っている．Khovanov ホモロジーと精密化 Chern-Simons 不変量がともに計算されている場合では両者の一致が確認されているが，長方形でないヤング図に対応する表現に対して精密化 Chern-Simons 不変量 $\overline{\mathrm{rCS}_\lambda}(T_{m,n};a,q,t)$ を計算すると，その係数に負の整数が現れ，このままではホモロジー的不変量と見なせないという問題点があった．

この問題に関して，申請論文では Macdonald 対称関数 $P_\lambda(x;q,t)$ とそのノルム $g_\lambda(q,t)$ を用いて精密化 Chern-Simons 不変量 $\overline{\mathrm{rCS}_\lambda}(T_{m,n};a,q,t)$ の生成母関数（以下の左辺）を導入し

$$\sum_\lambda \overline{\mathrm{rCS}_\lambda}(T_{m,n};a,q,t) g_\lambda(q,t) P_\lambda(x;q,t) = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} \sum_\mu \frac{1}{d} \frac{f_\mu^q(T_{m,n};a^d,q^d,t^d)}{q^{\frac{d}{2}} - q^{-\frac{d}{2}}} s_\mu(x^d)\right)$$

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

の関係式により $f^q_\mu(T_{m,n};a,q,t)$ を定義した．ここで右辺の $s_\mu(x)$ は Schur 対称関数である．この等式は物理的にはラージ N 双対性の精密化を与える分配関数の一致を意味しており，$f^q_\mu(T_{m,n};a,q,t)$ の定義は M 理論における位相的ブレイン配位の BPS 状態（安定対象）の数え上げの考察を Macdonald 関数の Cauchy 公式と比較することで発見したものである．また，違う種類の位相的ブレインを考えることにより $f^q_\mu(T_{m,n};a,q,t)$ と類似の量として $f^{\bar{t}}_\mu(T_{m,n};a,q,t)$ も定義される．このとき申請論文が提唱する予想は，ある正則行列 $M_{\mu\rho}(z)$ を用いて，これらは共通の多項式 (refined reformulated invariants) $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ により

$$f^q_\mu(a,q,t) = \sum_\rho M_{\mu\rho}(t)\widehat{f}_\rho(a,q,t), \qquad f^{\bar{t}}_\mu(a,q,t) = \sum_\rho M_{\mu\rho}(q^{-1})\widehat{f}_\rho(a,q,t),$$

と表すことができ，さらに $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ は正整数を係数とする q,t のローラン多項式となるという主張である．ここで係数の正整数性は不変量が BPS 状態（安定対象）の数え上げに由来することによる物理的に自然な予想である．論文では簡単なトーラス結び目 $T_{2,3},T_{2,5}$ やトーラス絡み目 $T_{2,2}$ で予想を具体的に確かめている．とくに長方形でないヤング図 $\rho=(2,1)$ に対しても $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ の係数に負の整数が現れないことは，精密化 Chern-Simons 不変量に比べて優れた点である．

本論文は縄田氏との共同研究による副論文に基づくものである．問題の定式化は共同研究者に負うところが多いものの $\widehat{f_\lambda}(T_{m,n};a,q,t)$ の定義は申請者自身の発見であり，計算機実験による予想の確認は申請者が実行したものであることを確認している．本論文は結び目や絡み目のホモロジー的量子不変量に関して位相的場の理論・弦理論による示唆的な定式化が与えられており，トーラス結び目に限定されている点や予想の証明といった課題が残されているものの， 今後の研究の発展に寄与すると期待される．本論文に関する公開審査会を 2018 年 3 月 5 日に行った．公開審査会では Chern-Simons ゲージ理論と位相的弦理論のラージ N 双対性を含む先行研究とその問題点の紹介の後，申請論文で新たに定義した $\widehat{f_\lambda}(T_{m,n};a,q,t)$ と係数の正整数性に関する予想の確認状況について説明がなされた．質問に対する受け答えも特に問題はなく，申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した．以上により，学位審査委員会は，申請者には博士（数理学）の学位が授与される資格があるものと判断する．