論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨 お よ び 担 当 者

報告番号	※　　　第　　　号

氏　　　名　　金　鍾明

論　文　題　目

A freeness criterion for spherical twists

（球面捻りに対する自由性判定法）

論文審査担当者

主　査　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（理学）
伊　山　　修

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　博士（数理科学）
太　田　啓　史

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　教授　理学博士
金　銅　誠　之

委　員　名古屋大学大学院多元数理科学研究科　准教授　博士（理学）
柳　田　伸　太　郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

結論： 学位を授与する。

リーマン面の単純閉曲線に沿う古典的な Dehn twist は、リーマン面の写像類群の元を定め写像類群の研究にとって基本的かつ重要である。特に、与えられたいくつかの単純閉曲線に沿う Dehn twists が生成する部分群を決定することはきわめて基本的な問題である。Dehn twist は現在ではいろいろな方向に一般化されているが、本論文で扱うのは三角圏における spherical twist である。Homological Mirror Symmetry の文脈の中で M. Kontsevich のアイデアに基づき、P. Seidel-R. Thomas は三角圏における d-spherical object(d は正の整数) に沿う spherical twist と呼ばれる autoequivalence を定義した。spherical twist は圏論的に定義されるが、古典的な Dehn twist と類似の性質をもつことがいくつも観察されている。例えば、Seidel-Thomas は $d \geq 2$ のとき、2 つの d-spherical objects の間の Hom が 0 次元であればそれらに沿う spherical twists は可換であり、1 次元であれば組紐関係式を満たすことを示し、spherical objects が Dynkin 図の A 型の configuration をもてば、それらに沿う spherical twists が生成する autoequivalence 群の部分群は組紐群と同型になることを示した。これはリーマン面の Dehn twist に関する古典的な事実の圏論的類似である。

本論文で扱うのは、Seidel-Thomas の場合と補完的な状況である。すなわち、spherical twists の自由性に関する結果である。まず、リーマン面の Dehn twist に関して A. Ishida により、2 つの単純閉曲線の幾何学的交叉数が 2 以上であればそれらに沿う Dehn twists の生成する写像類群の部分群は階数 2 の自由群と同型であることが知られている。A. Keating はこの結果のシンプレクティック幾何における深谷圏での類似を考察し、$d \geq 2$ のとき 2 つの d 次元ラグランジアン球面の間の Floer cohomology が 2 次元以上であればそれらに沿う Lagrangian Dehn twists の生成する群は階数 2 の自由群と同型であることを示した。

一方、S.Humphries はより一般にリーマン面の有限個の単純閉曲線の集合 C に対し、C の complete partition という概念（$C = \bigsqcup_\mu C_\mu$ が C の complete partition であるとは、$\gamma_i, \gamma_j \in C_\mu$ $(i \neq j)$ ならば γ_i, γ_j の幾何学的交叉数は 0 であり、$\gamma_i \in C_\mu, \gamma_j \in C_\nu$ $(\mu \neq \nu)$ ならば γ_i, γ_j の幾何学的交叉数は 2 以上であるときをいう）を導入し、リーマン面 Σ の単純閉曲線でアイソトピー類が互いに異なるものたちの集合 $C = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ が complete partition $C = \bigsqcup_{\mu=1}^{\alpha} C_\mu$ をもち、かつ $\Sigma \setminus \cup_i \gamma_i$ が disk 成分を持たないならば、γ_i に沿う Dehn twist τ_{γ_i} で生成される写像類群の部分群は、自由アーベル群の自由積 $\mathbb{Z}^{m_1} * \cdots * \mathbb{Z}^{m_\alpha}$ に同型であることを示していた（ただし $m_\mu = |C_\mu|$, $\mu = 1, \ldots, \alpha$）。

本論文では、この Humphries の結果の三角圏における類似を考察する。以下、三角圏 $\mathcal{D}$ は Bondal-Kaplanov の意味で dg enhancement $\mathcal{A}$ をもつものとする。$C = \{E_1, \ldots, E_m\}$ は $\mathcal{D}$ の d-spherical objects E_i $(d \geq 2)$ の集合で E_i たちは互いに up to shift で同型でないとする。このとき、spherical objects の集合 C が complete partition をもつ、ということ

をまず圏論的に定式化する必要があるが、それはSeidel-Thomasと同じく幾何学的交叉数をHomの次元に置き換えることによって定義する。次に、「$\Sigma \setminus \cup_i \gamma_i$ がdisk成分を持たない」ことの圏論的類似を、次の‘null-triangular条件’として定式化する。

(null-triangular条件)　互いに相異なる i, j, k に対して次の合成はゼロ。

$$\mathrm{Hom}^\bullet(E_i, E_j) \otimes \mathrm{Hom}^\bullet(E_j, E_k) \to \mathrm{Hom}^\bullet(E_i, E_k).$$

以上の下で本論文の主結果は次である。

主定理： dg enhancement $\mathcal{A}$ をもつ三角圏 $\mathcal{D}$ において、$C = \{E_1, \ldots, E_m\}$ は互いにup to shiftで同型でない d-spherical objects $(d \geq 2)$ の集合でnull-triangular条件をみたし、かつcomplete partition $C = \bigsqcup_{\mu=1}^{\alpha} C_\mu$ をもつと仮定する。更に $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E_1 \oplus \cdots \oplus E_m)$ はformalと仮定する。このとき、T_{E_i} を E_i の沿うspherical twistとし $m_\mu = |C_\mu|$ $(\mu = 1, \ldots, \alpha)$ とおくと

$$\langle T_{E_1}, \ldots, T_{E_m} \rangle \cong \mathbb{Z}^{m_1} * \cdots * \mathbb{Z}^{m_\alpha} < \mathrm{Auteq}\,(\mathcal{D})$$

が成り立つ。

　最終的に組み合わせ群論におけるある古典的な補題に帰着させる点はHumphriesと同じであるが、そこに至る道筋は、Dehn twistsに関するHumphriesによる幾何学的な証明をすべて圏論的に定式化しやり直すことによって行われる。既存の大きな結果を用いるというより、一から証明を再構築する必要がある。先のnull-triangular条件のように幾何学的状況から適切な圏論的命題を抽出し、幾何学的な議論を圏論的な議論で証明していく力が必要となる。特に、spherical objectsからそれに直交する対象を、J. Rickardによるやや異なる状況の場合の代数的議論をヒントにしつつ、Dehn twistsを繰り返し施すという幾何学的アイデアを元に構成するところは証明の中で重要なステップであり、申請者のアイデアと努力が見られるところである。なお、$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E_1 \oplus \cdots \oplus E_m)$ がformalという仮定は、議論のいくつかの部分を単純化するのに使われるが、やや強すぎる印象を受ける。より弱く自然な条件の下で証明することおよび証明の簡明化は今後の課題であろう。

　本論文は付加条件が課せられているものの、古典的なDehn twistに関する結果を圏論的にとらえ直して得られた結果は十分に興味深く、当該研究にとって意義ある結果と考えられる。2018年2月23日に学位の公開審査セミナーを行ったが、背景から始めて主結果とその証明のあらすじが非専門家にも伝わるように工夫されたものであり、また質問に対する応対も的確なものであった。以上により、審査委員会は学位を授与するべきであるものと判断する。