

別紙 4

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

主 論 文 の 要 旨

論文題目 Mean values and various analytic properties of multiple zeta-functions
(多重ゼータ関数の平均値および種々の解析的性質)

氏 名 宮川 貴史

論 文 内 容 の 要 旨

Riemann ゼータ関数をはじめとする様々なゼータ関数の解析的性質は、解析的整数論において非常に重要な研究テーマの一つとされている。また、近年ではゼータ関数の和を多重級数版として拡張させた“多重ゼータ関数”が導入され、その解析的性質の研究や、整数点に着目した“多重ゼータ値”などが盛んに研究されるようになった。本論文では、Barnes 型と呼ばれる多重ゼータ関数を中心にその平均値の挙動や種々の解析的性質に関して、先行研究および申請者の研究成果について論述する。

第1章では、Riemann ゼータ関数および Dirichlet の L 関数の歴史的背景や素数との関連についての内容に触れ、Riemann ゼータ関数のオーダー評価や平均値定理など重要な解析的性質について簡潔に述べる。他方、Riemann ゼータ関数の無限級数表示の多重級数版として導入された、多重ゼータ関数や多重 L 関数についても近年では顕著な研究成果が得られており、その一部について紹介する。また、申請者の導入した多重ゼータ関数・ L 関数とその基本性質について述べる。

第2章では、Barnes 2重ゼータ関数

$$\zeta_2(s, \alpha; v, w) := \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + vm + wn)^s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 2)$$

に着目して、絶対収束領域 $\operatorname{Re}(s) > 2$ と領域 $3/2 < \operatorname{Re}(s) \leq 2$ において、申請者の得た2乗平均値の結果とその証明について述べる。多重ゼータ関数の平均値を研究する試みは、松本氏、津村氏らの共同研究によって初めて見いだされ、Euler-Zagier 型と呼ばれる2重ゼータ関数についての2乗平均値の結果が得られている。その後、池田氏、松岡氏、永田氏ら3人によって松本氏、津村氏の結果が改良され、より詳細な結果が得られている。さらに岡本氏、小野塚氏らによって Mordell-Tornheim 型2重ゼータ関数についての結果も得られている。これらはいずれも多変数複素関数であるが、その平均値オーダーは一つの変数に着目したものであった。一方、申請者の着目した Barnes 2重ゼータ関数は1変数の多重ゼータ関数であり、Riemann ゼータ関数との類似性が強く現れるのではないかと期

待できる。このことを示唆するものとして、Barnes 多重ゼータ関数の特別な場合である Hurwitz 多重ゼータ関数

$$\zeta_r(s, \alpha) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + m_1 + \cdots + m_r)^s} \quad (\operatorname{Re}(s) > r)$$

の平均値についての結果を与える。Hurwitz 2 重、3 重ゼータ関数に対して、それぞれ $\operatorname{Re}(s) = 3/2, \operatorname{Re}(s) = 5/2$ の line 上の平均値に対して「 $T \log T$ 」を主要項にもつ漸近公式を得ることができ、これらは Riemann ゼータ関数の Critical line $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ における平均値と同等の主要項を持つことから、平均値の観点から多重版の Critical line に相当していることが期待できる。一般の Hurwitz r 重ゼータ関数に対しても $\operatorname{Re}(s) = r - 1/2$ 上の平均値の主要項が「 $T \log T$ 」となる結果が得られ、Critical line に対応する箇所を特定できたことは一つの大きな成果である。

第 3 章では、Hurwitz 型、Lerch 型ゼータ関数に関する近似関数等式についての結果を述べる。もともと、Riemann ゼータ関数のオーダー評価や平均値の挙動を研究する際に、有限和による近似を用いて考察する手法が扱われてきたが、近似関数等式はその有限和のより精度の高い近似である。Hurwitz 型、Lerch 型ゼータ関数の近似関数等式は先行結果として Riemann-Siegel の公式と呼ばれるタイプの近似関数等式がすでに得られているが、申請者が Barnes 2 重ゼータ関数の近似関数等式の研究(次章)の過程で、Riemann-Siegel 公式とは異なるタイプの近似関数等式を得た。Riemann-Siegel 公式の方が精度は高いが、申請者の得た近似関数等式を用いることにより、Hurwitz 型、Lerch 型ゼータ関数の平均値の計算において主要項が容易に導出できる。

第 4 章では、Barnes 2 重ゼータ関数の近似関数等式についての結果を紹介する。Barnes 2 重ゼータ関数の $\operatorname{Re}(s) = 3/2$ における平均値を研究するにあたり、鞍点法とよばれる手法を用いて、精密な近似和公式として近似関数等式の証明を試み、その一部を得ることができた。完全な結果を得ることができれば、Barnes 2 重ゼータ関数の $\operatorname{Re}(s) = 3/2$ における 2 乗平均値の結果を得られることが期待できる。