報告番号	※甲　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　Quantum Adiabatic/Game-theoretic Control from Continuous-/Discrete-time Perspectives

（連続・離散時間の視点からの量子系の断熱的・ゲーム論的制御）

氏　　名　　三嶋　宏章

論 文 内 容 の 要 旨

制御とは我々が世界と繋がる手段の一つである．直接的にしろ間接的にしろ，我々は日頃から無意識に身の回りのものを制御している．例えばキャッチボールはボールの制御により成立する遊びである．またPCゲームではキーボードとマウスを正確にタイピングすることでモニター画面を制御している．同時に，PC内部では数多の電子部品が緻密に制御されている．宇宙探査においては，例えば地球上の一室から間接的にロボットを制御して月面などの状態を知ることができる．

最も簡単な制御の一つとして対象（物体）の「移動」を考えよう．ボールをA地点からB地点へ「持って行ってそこに置く」または「投げる」といった手段で移動させるとする．しかし，我々は同種の制御が通用しない対象があることを知っている．もしボールをシャボン玉に置き換えたらどうなるだろうか？我々がそれに触れた途端，シャボン玉は割れてしまい，制御すべき対象が壊れてしまうだろう．我々は対象の性質を考慮して，制御の仕方を選ばなければならない．

さて，制御する対象がミクロな物体，例えば原子や電子といった「量子系」ならばどうなるだろうか？我々はこれらを直接触ることができない．ましてや見ることすらできない．量子系は，前述のシャボン玉の比ではないほどに繊細で脆い対象である．そもそも「見る」行為は対象に電磁波（光）を当てて，その応答を受け取ることである．量子系にとって光のエネルギーは非常に大きいため，この「見る」行為でさえ，量子系を著しく乱してしまう．制御の目的は「与えられた状態を所望の状態に移す」ことである．ただ移すのではなく，可能な限り素早く，かつ頑強な制御を実現したい．

量子制御技術は微視的なスケールの世界を設計し，観測することを可能にする．我々が制御したいミクロな対象の多くは原子，電子，光子などだが，それらは他の系と相互作用して状態が乱されてしまう．一般に，量子系は敏感で脆弱である．環境との相互作用に抗って，量子系を安定的に制御したいと考えるのは自然ななりゆきである．

そんな中，90年代から量子系の性質を計算に利用するという考えが広がりを見せてきた．一つの大きな契機はShorによる因数分解のアルゴリズムの発見である．最近では量子系を制御して計算機として利用する方法がいくつか提案されている．例えば，組み合わせ最適化問題を解くアルゴリズムとしての量子アニーリングが挙げられる．アニーリングとはすなわち焼きなましであり，金属を加熱してゆっくりと冷ますことによって格子欠陥の少ない状態に緩和させ，金属全体を軟化させることを言う．転じて，エネルギーの高い準安定状態にあった系を，真の基底状態に緩和させることをアニーリングと言う．量子系に外場を印加した初期状態を用意して，外場をゆっくりと除去することによって所望の基底状態に到達するのが量子アニーリングである．力学では制御パラメタをゆっくりと変化させるプロセスを断熱過程というが，この意味で量子アニーリングは断熱過程を用いた量子系の制御，すなわち断熱制御である．

このように，量子系の状態をなるべく乱さないように変化させたいという動機が近年強くなっている．理論的には，物理系の時間発展を定める役割を果たすハミルトニアンの外部パラメタを十分ゆっくり時間変化させれば所望の制御ができるはずだが，「十分ゆっくり」という条件が重要である．素早い操作は対象の状態を乱してしまうからである．スピードを求められる計算機として量子系を利用したいという場面において，断熱過程のゆっくりと操作しなければならないという制約は障害となる．

幸いにも近年，この制約を取り払って，短時間で量子系の所望の制御を達成する理論的方法が何通りか提案されている．それらはshortcuts to adiabaticity (STA)と総称されている．例えば，transitionless tracking (TT) algorithmと呼ばれる方法は，所望の状態変化からのずれを打ち消して，あるべき状態に戻すような制御ハミルトニアン項を付加することで，どんなに速く外部パラメタを動かしても，所望の状態変化を実現できる．

STAの古典系への適用も考えられているが，応用は限定的なものであり，量子系の場合との関係も不明瞭である．断熱過程の成立を保証する断熱定理は前期量子論において重要な役割を果たし，断熱定理は量子力学版と古典力学版があるが，定理の定式化も証明も大きく異なるため，これらの関係は決して自明ではない．古典系の断熱定理の帰結として現れる断熱不変量は，前期量子論において量子と古典の繋がりを理解するのに重要な役割を果たしてきたが，STAの枠組みでの役割ははっきりしていない．

量子力学と古典力学のアナロジーは幾つかあるが，特に量子調和振動子において，量子系の時間発展を対応する仮想的な古典系で読み替える「伏見の方法」が提案されている．これは，量子調和振動子の時間発展を特徴付けるプロパゲータを古典調和振動子の線形独立な2つの解を用いて厳密に求める方法である．さらに，このプロパゲータを用いて量子調和振動子の遷移確率の母関数を解析的に計算することができ，所望の状態遷移の成功の度合いを特徴付けるパラメタQ_t^*が得られる．量子調和振動子の遷移確率はこのパラメタの関数として表され，$Q_t^* = 1$ならば所望の状態遷移が100%成功している．このパラメタは「伏見の断熱制御パラメタ」と呼ばれ，量子熱機関の効率に関する研究に応用例がある．

本論文では量子系の具体例として，量子調和振動子と量子ビット系に焦点を当て，各々に異なる制御方法を適用する．前者には量子断熱制御を連続時間の観点から適用する．後

者には量子エラー訂正を念頭にした制御を離散時間（ステップ）の観点から適用する．後者は断熱制御とは無関係である．

前者において，STAの一つであるTT algorithm由来の制御ハミルトニアン項が付加された量子調和振動子を考え，その普遍的性質を調べた．(1) この量子調和振動子は任意の時間依存性を持った角振動数を含むため，運動の解析解は一般に得られないが，筆者は伏見の方法を応用してこの量子調和振動子におけるプロパゲータを厳密に求めた．同時に，この量子調和振動子に対応する古典調和振動子を導出した．(2) 筆者は，この仮想的な古典調和振動子に正準変換を施すと，TT algorithmの古典版の一つであるclassical dissipation-less drivingが達成された古典調和振動子と完全に一致することを示した．(3) 量子調和振動子の遷移確率の母関数をプロパゲータを用いて解析的に計算し，TT algorithmを特徴付ける2つの新しいパラメタ（Q_t^{TT}と$\bar{Q}_t^{TT}$）を得た．これらのパラメタはTT algorithmの性質を反映しており，所望の終状態への制御を100%の成功率で達成することが示された．(4) 筆者はこの新しいパラメタの背後にロンスキアンやErmakov-Lewis(EL)不変量といった力学的不変量が存在していることを示した．同時に，古典的な断熱不変量の値と一致する特徴的な量が存在することから，量子系の断熱遷移が実現している背後で，対応する古典系では所望の終状態で必ず断熱不変量の値と一致する量が存在することを示した．(5) 筆者は伏見の方法に由来した古典系での解析のアナロジーから，量子ロンスキアンを導入することでTT algorithmが適応された量子調和振動子系におけるEL不変量の量子版を構成した．この不変量はSTAの他の手法に現れるLewis-Riesenfeld(LR)不変量そのものである．この量子版のEL不変量は古典調和振動子の断熱不変量（エネルギーと角振動数の比）の量子版に対応する．筆者は本研究が，量子系と古典系を同一の枠組みで解析することでミクロとマクロを繋ぐ普遍的な制御の探索に貢献することを期待する．

後者において，離散時間の量子二準位系として量子ビットを考え，その時間発展を量子ゲームのフローとして定式化する．ゲームの状況設定（ルール）は以下の通りである．我々と外部の第三者が同一の量子ビットを持っているとする．我々はまず量子ビットの始状態を安全な別の中間状態に移し，必要に応じて状態を復元したい．第三者はこの中間状態を乱して復元の可能性を絶ちたい．我々が任意の$U(2)$ユニタリ操作を行使できる場合，第三者が持つユニタリ操作がどのような場合に，我々は所望の終状態を確実に達成できるだろうか？この状況設定は「終状態を始状態と一致させたい」という点で，先ほどの断熱制御（STA）とよく似ている．筆者は離散時間で量子ビットの状態を制御する方法を提案する．STAと異なり，如何なる補助量子ビット（アンシラ）も仮定しない．量子もつれの性質も一切用いない．アンシラによって量子もつれを用いれば自由度が増し，所望の終状態を実現する方法が幾つか生まれるであろう．しかし，ここでは最小限の（単一の）量子系でどこまで可能かという問題に挑んだ．この状況はMeyerが提案した量子コイン・フリップゲームに置き換えられる．Meyerのゲームでは第三者は互いに可換な2つのユニタリ操作を持っている．すなわち，同時固有状態が存在する．Meyerはこの性質を用いて第三者を完全に打ち負かすようなユニタリ操作の組（必勝戦略）を発見した．一方，Chappellらは幾何学的な代数的解析を用いることで，すべて必勝戦略を得ている．(i) 筆者はまず状態を乱そうとする第三者の操作の可換性を捨て，同時固有状態が存在しない場合にゲームを拡張した．(ii) 2つの非可換なユニタリ操作を持つ第三者に対しても，量子ビットの状態空間を表したBloch球の描像から，必勝戦略を見出した．同時に，Chappellらの方法を応用してすべて

の必勝戦略を得た．(iii) 筆者はこの第三者が持つ操作に課せられた制限を段階的に緩和し，必勝戦略が存在する条件を探索した．具体的には，第三者が位相変化を伴う操作，そして任意の操作を持つ場合にゲームを拡張した．いずれの拡張においても然程強くない条件が課せられるが、すべての必勝戦略が導かれた．(iv)最後に，第三者が持つ操作の個数制限を取り払った．しかし，この拡張に対する必勝戦略の存在には非常に強い条件が課せられてしまうことを示した．筆者は本研究が，量子エラー訂正におけるアンシラの節約に寄与することを期待する．

38 字×23 行