

学位論文

スカラー場による双重力理論と高階微分重
力理論の関係性の解明に向けた研究

赤木聡

主論文の概要

一般相対性理論は、現在、重力現象を精度よく記述する理論として広く用いられている。一方で、観測、理論の双方における動機から、一般相対性理論に修正を加えた修正重力理論は、一般相対性理論の発見当時から多くの研究がなされてきた。

一般相対性理論に修正を施して、繰り込み可能化することや、特異点を回避することのためには、高階微分重力理論が必要になることは良く知られている。ところが、高階微分の理論は、一般には、ゴーストと呼ばれる負の運動項の場を持つため、量子論における確率の保存則を破る。2015年、Hassanらは、双重力理論と呼ばれる二階微分の模型から、ある操作によって高階微分重力理論を構築する手法を提唱した。この模型には元の理論のモード（物理的モード）に加えてゴーストが存在するが、彼らは適切な補助条件のもとで除去可能であると予想した。しかしながら、彼らのゴーストの除去可能性の根拠となる解析は、線形近似のもとでのみ行われている。ゴーストの除去可能性を証明するためには、非線形項を保った模型を調べる必要がある。そこで本論では、2つのスカラー場が非微分相互作用する二階微分の模型を立て、対応する高階微分理論のゴーストの除去可能性を検証した。

まず、具体的な相互作用項を与え、散乱振幅を計算することで、摂動の低次のツリーレベルダイアグラムの構造を調べた。その結果、すべての外線を物理的なモードに取ったダイアグラム（物理的散乱振幅）のうち、中間状態にゴーストが飛ぶものは、オンシェル条件のもとでゼロになる構造を発見した。このことから、「高階微分理論における物理的なモードから物理的なモードへのオンシェル散乱振幅は、元の理論の対応するオンシェル散乱振幅と一致する」という予想を立てた。

次に、一般の非微分相互作用項を仮定した模型から、変数変換によって「ゴーストを含み、物理的散乱振幅に寄与し得る項」を消去することを考えた。その結果、オンシェル散乱振幅を不変に保つ変数変換によって、摂動の低次において、これらの項を除去可能であることが分かった。そして、変数変換を任意回行った作用を仮定し、任意のオーダーにおけるゴーストの除去可能性を数学的帰納法で証明した。

最後に、以上のスカラー場の解析を双重力理論に適用可能であるか調べるために、双重力理論に対応する高階微分重力理論を導出し、変数変換による手法を適用した。その結果、摂動の低次において、スカラー場の場合と同様に、ゴーストを除去するための構造が存在することが明らかとなった。

目次

第 1 章	導入	4
第 2 章	高階微分理論と ghost	8
2.1	高階微分理論の例	8
2.2	ghost の正準量子化と二種類の解釈	9
第 3 章	Fierz-Pauli 模型	13
3.1	有限質量スピン 2 の場の線形模型	13
3.2	Hamilton 解析	14
3.3	ハミルトニアンの正定値性	16
3.4	Fierz-Pauli 模型	20
第 4 章	高階微分重力理論	21
4.1	曲率の 2 次補正	21
4.2	R^2 重力理論	25
第 5 章	Higher derivative gravity from Bigravity	26
5.1	双重力理論 (bigravity)	26
5.2	Higher derivative gravity from Bigravity	28
第 6 章	スカラー場による双重力理論と高階微分重力理論の関係性の解明に向けた研究	31
6.1	スカラー場の模型	31
6.2	具体例と散乱振幅の一致	33
6.3	一般証明	38
6.4	まとめ	46
付録 A	$g^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}$ の性質	48
付録 B	経路積分による方法	50
付録 C	高階微分重力理論のゴースト除去可能性	53

目次	3
付録 D 非線形スカラー場の例 1 ～massless-massive 粒子が decouple している系	57
D.1 高階微分理論の構築と tree-level ファインマン図の恒等式	57
D.2 補助場での書き換え	59
付録 E 非線形スカラー場の例 2 ～massless-massive 粒子が couple している系	61
E.1 運動方程式の導出と作用の不在	61
E.2 運動方程式の形式的摂動解	63
E.3 まとめ	67
参考文献	69

第 1 章

導入

動機

本論では、近年考案された統合的な高階微分重力理論を構築するための手法について検証を行う。ニュートンが質点の運動方程式を構築して以来、多くの力学系の運動方程式は時間に関して 2 階微分の方程式として記述されてきた。その理由には、「初期条件として力学変数の 0 階微分と 1 階微分を与えることで、観測結果を予測できる」という実験事実に加えて、純粹に理論的な理由も存在する。実際、作用が存在する場合、運動方程式が 2 つより多い時間微分を含む系は、特別な場合を除いて、負の運動項を持つ力学変数 (ghost) が存在する。古典論においては、ghost の存在はエネルギーの下限をなくし、系を不安定にしてしまう。そのため、模型構築の段階で高階微分の理論が考えられることは少ない。

ところが、重力理論において、予期せず高階微分理論が現れることや、補正項として必要となることはしばしば存在する。例えば、一般相対性理論の 1 ループ有効作用を計算すると、発散項は曲率に関して 2 次の項となる。そのため、物理的に意味のある有効作用を得るためには、2 次の曲率項を付け加えることで一般相対性理論を修正しなければならない。面白いことに、曲率に関する 2 次の一般項を付け加えた模型は、4 次元時空において、任意のループオーダーで繰り込み可能であることが証明されている。しかし、曲率は時間の二階微分を含むため、曲率の二乗を含む理論の運動方程式は 4 階微分となる。よって繰り込み可能化された理論は、高階微分理論となり、ユニタリティを破るのである。そのほかにも、ブラックホールの特異点を回避するための修正項や、ひも理論の低エネルギー有効理論など、実に様々な場面で高階微分重力理論が現れる。しかしながら、その多くの模型は、ghost を含み、ユニタリティを破るのである。このように、長年、高階微分重力理論はその重要性にも関わらず、ghost の問題に悩まされてきた。

ところが、近年、双重力理論 (bigravity) と呼ばれる理論が構築されたことを機に、これまで非整合であると考えられてきた高階微分重力理論を適切に修正することで、ghost-free な模型を得られる可能性が生まれた。bigravity は二階微分の理論であるが、“ある操作”を行うことで、bigravity と等価な高階微分重力理論を得ることができる可能性が提起されたのである。得られた理論では、ghost を含むものの、“ある条件”の下で ghost を取り除くことができる。しかしながら、この議論

には、不満足な点が存在する。本論では、上記のすでに知られていた高階微分理論について、より詳しく解析し、ghost 除去の可能性を議論する。以降の節で、より詳しい背景と研究目的を述べる。

有限質量の重力理論と双重力理論

bigravity とは、時間に関する二階微分の理論であり、二つの計量が相互作用する ghost-free な模型である。実は、二つの計量が相互作用する模型を適当に書き下すことは容易にできる。しかしながら、その多くの場合、模型には ghost が存在してしまう。bigravity は二階微分の理論なので、この ghost は、高階微分が起因するものとは異なる。この ghost が現れる原因や、なぜ近年になるまで ghost-free な bigravity が得られなかったのかを説明するために、以下では、bigravity が発見されるまでの歴史を振り返ることにする。

bigravity は、重力子が有限の質量をもちうるかという素朴な疑問に答えようとする流れから発見された。「重力子は微小な質量を持ち得るか」という問いかけは、非常に長い間続けられてきた。一般相対性理論の発見後、関係する研究が盛んに行われた時期は、主に三つの時期に分けられる。第一期は、相対論的量子力学の黎明期である 1930 年代であろう。この時代には、任意のスピン粒子を記述する“波動方程式”の導出が試みられ、特別な場合として有限質量スピン 2 の粒子を記述する Fierz-Pauli 模型も得られた。第二期は、第一期に得られた Fierz-Pauli 模型を“古典的に解釈”して重力理論とみなせるか追求された 1970 年代である。この時期は、観測と整合する模型を構築することは困難であるという結論によって終結した。第三期は、第二期における困難を解決する dRGT 模型が得られた 2010 年以降である。現在に至っても、有限質量の重力理論に関する研究が盛んに行われている。以下では、特に第二期と第三期について詳しく述べる。

1930 年代末期、高階スピンの場を表す手段は、Dirac によって与えられたスピノル場の直積によって表すものであった [1]。これに対し、M. Fierz と W. Pauli は、有限質量のスピン 2 の場を、2 階の対称テンソルによって記述する方程式を導いた [2, 3]。今日、有限質量スピン 2 の場を表す線形模型は、多くの場合、彼らの導出した Fierz-Pauli 模型で記述される。彼らの研究は場の理論的動機に基づいていたが、ある否定的な観点から、重力子質量の有無に関する議論が始まる。1970 年、H. van Dam と M. J. G. Veltman は、Fierz-Pauli 模型によって計算された解のゼロ質量極限が、線形化 Einstein-Hilbert 作用によって計算された解と一致しないことを示した。つまり、ゼロ質量極限と運動方程式を解く操作は可換ではないのである。この事実は、V. I. Zakharov によっても独立に示され、今日では vDVZ 不連続性と呼ばれる。vDVZ 不連続性の発見によって、重力子が有限の質量を持つ可能性は潰えたかに思われた。一方で、1972 年、A. I. Vainshtein は、Einstein-Hilbert 作用に Fierz-Pauli 質量項を付け加えた重力理論を考え、その球対称解はゼロ質量極限の不連続性を持たないことを示した [5]。この機構は、Vainshtein 機構と呼ばれ、観測と整合的な有限質量の重力理論を構築する上で必須とみなされる。しかしながら、この非線形化にもさらなる問題が生じてしまう。D.G.Boulware と S.Deser は、広いクラスの有限質量スピン 2 の場の非線形模型に対して、有限質量スピン 2 の自由度に加えて、一つのスカラー場の自由度が存在することを指摘した [6]。このスカラー場は、負符号の運動項を持ち、一般には系のユニタリティを壊し

てしまう。このように、負符号の運動項を持つ場は一般に ghost 場と呼ばれ、特に Fierz-Pauli 模型の非線形化によって生じるものは BD ghost と呼ばれる。Vainshtein 機構と BD ghost-freeness の要請は非常に強く、両立する模型は長い間構築されなかった。

ところが、2010 年になって、この状況は一変した。Vainshtein 機構と BD ghost-freeness を両立することが期待される模型が提唱されたのである。C. de Rham らは、一般の非微分相互作用項を仮定し、高エネルギー極限におけるを要請することで、摂動の低次における相互作用項を同定した [7]。さらに、彼らは後に、この模型の完全非線形化である dRGT 模型を導出した [8]。de Rham らの BD ghost-freeness に関する解析は、未だ完全非線形レベルで行われていたわけではなかったが、S.F.Hassan と R.A.Rosen によって、全次数で BD ghost が出ないことが示された [9, 10]。一方で、彼らは、dRGT 模型を拡張する試みも行っていた。dRGT 模型は有限質量スピン 2 の場の非線形模型の一つであるため、一般座標不変性がない。一般座標不変性を破るためには、力学変数であるメトリック $g_{\mu\nu}$ に加えて、ある固定された基準計量を導入する必要がある。当初、dRGT 模型は、平坦時空上の Fierz-Pauli 模型の拡張として得られたため、基準メトリックとして平坦時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ を含む模型として与えられた。Hassan らは、この平坦時空の計量を一般の基準計量 $f_{\mu\nu}$ に置き換えられる可能性を考えた [11]。そして、この論文によって、一般的な基準計量 $f_{\mu\nu}$ に対して、BD ghost が出ないことが示されるに至った。さらに、彼らは、このアイデアをもう一段階掘り下げた。dRGT 模型の基準メトリック $f_{\mu\nu}$ を力学変数とみなし、 $f_{\mu\nu}$ に対応する運動項 $\sqrt{-f}R(f)$ を付け加えた模型を提唱したのである [10]。こうして、2つのメトリック $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ が互いに相互作用する bigravity 模型が誕生した。そして、bigravity にはいかなる ghost も含まれず、ゼロ質量スピン 2 のモードと有限質量スピン 2 のモードが 1 つずつ含まれることが明らかにされた [10, 12]。

高階微分重力理論

一方で、ゼロ質量スピン 2 のモードと有限質量スピン 2 のモードが一つずつ含まれる模型は、高階曲率理論の文脈においても既に知られていた。曲率の 2 次までを含む模型は、一般には、ゼロ質量スピン 2 のモードに加え、スカラーモードと有限質量スピン 2 のモードがひとつずつ含まれる。そのうちスカラーモードが伝搬しないように特定のパラメータを選んだものを R^2 重力理論と呼ぶことにする [13]。bigravity と R^2 重力理論はどちらも同種のモードを含むが、両者には大きな違いが存在する。bigravity が ghost を含まないことに対して、 R^2 重力理論はゼロ質量モードと有限質量モードの運動項の相対符号が逆なのである。したがって、 R^2 重力理論に含まれるどちらか一方のモードは必ず ghost となり、一般の次元においてはユニタリティを破る。唯一の例外は、3次元においてゼロ質量モードが ghost、有限質量モードが正符号となるように選んだ模型である。3次元においては、ゼロ質量モードは自由度 0 であるため、伝搬しない。一方で、有限質量モードは自由度 2 を持ち、伝搬する。そこで、伝搬しないゼロ質量モードが ghost となるように全体の符号を選ぶことで、伝搬する有限質量モードは正符号となり、S 行列のユニタリティが保たれる [14]。この模型は特別に New Massive Gravity と呼ばれる。また、その他の高階微分重力理論の近年の

発展には、例えば [15, 16] がある。

双重力理論と高階微分理論の関係性

このような背景から、bigravity 発見当時から、bigravity と R^2 重力理論の関係性は興味を持たれて来た。とくに dRGT 模型発見の功績者の一人である Tolley らは、任意の次元で、bigravity の適切なパラメータの極限は R^2 重力理論に一致することを示した [17]。この研究では、3 次元における New Massive Gravity を一般化した模型を得られた。そして、bigravity の発見者である Hassan らは、パラメータの極限を取ることなく、bigravity と R^2 重力理論の関係性を明らかにしようと試みた [18]。彼らは、bigravity と等価な力学を表し得る高階微分重力理論を提唱した。この高階微分理論には、依然、ghost が存在する。しかし、彼らは線形近似の解析を根拠に、ghost を取り除くことができるだろうと予想した。そして、その高階微分重力理論の低曲率近似が R^2 重力理論に一致することを示した。彼らは、このような議論から、 R^2 重力理論に適切な高階曲率・高階微分項を加えていけば、理論は ghost-free になると予想した。この解析はのちに、Weyl Gravity と Partially Massless Gravity [20, 21, 22, 23, 24, 25] の文脈において、より高階の曲率、微分の次数に拡張されている [19]。

研究目的

[18] において、Hassan らが「高階微分重力理論が ghost-free である」と予想した根拠は、線形近似における解析に基づいている。より正確には、線形近似の高階微分理論へ適切なソース項を導入したグリーン関数は、bigravity のグリーン関数と一致することを示した。しかしながら、より一般には、線形近似を用いることなく対応を示さなければ、高階微分理論から ghost を取り除くことができるかわからない。そこで、本論では、相互作用するスカラー場の Toy Model に対して、彼らの手法を適用し、高階微分理論を構築した。そして、その散乱振幅を調べることで、高階微分理論と元の理論の対応関係を調べた。彼らの議論では、両者にはグリーン関数の対応関係があることが予想されていた。しかし実際には、グリーン関数は一般には一致せず、外線の on-shell 条件を課した散乱振幅の間に対応関係があることが分かった。さらに、摂動の全次数で、この対応関係を証明するために、変数変換によって、対応が自明となる力学変数を探した。その結果、一般の非微分相互作用項を持つスカラー場の模型において、摂動の全次数で、高階微分理論と元の理論の散乱振幅が一致することを示した。また、bigravity と対応する高階微分重力理論の場合にも、摂動の低次において、散乱振幅が一致する構造が存在することを示した。

第 2 章

高階微分理論と ghost

相対論的な場の模型を構築するとき、その模型の満たすべき最も基礎的な要請の一つに ghost が存在しないこと (ghost-freeness) の要請がある。この章では、高階微分理論に ghost が現れる例と、ghost がなぜ問題とされるのかを見る。

2.1 高階微分理論の例

相対論的場の理論の模型を構築するとき、決まって 2 階微分の仮定を置く。この要請が満たされていないとき、どのような問題が生じるのか見てみよう。例として、ゼロ質量と有限質量 m^2 のスベクトルを持つ高階微分理論、

$$S \equiv \int d^D x \frac{1}{2m^2} \phi \square (\square - m^2) \phi \quad (2.1.1)$$

を考えよう。この模型は、補助場 ψ を導入した以下の作用と等価である。

$$S' \equiv \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \phi \square \phi + \psi \square \phi - \frac{m^2}{2} \psi^2 \right] \quad (2.1.2)$$

実際、作用 S' を ψ に関して変分を取った方程式を用いて、場 ψ を消去すれば、作用 S を得る。さらに、変数変換

$$\phi \longrightarrow \phi + \psi \quad (2.1.3)$$

を行えば、 S' は以下のように書き換えられる。

$$S' = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi (\square - m^2) \psi \right] \quad (2.1.4)$$

ϕ, ψ の両場の運動項の符号はちょうど逆符号であることが分かる。今のノーテーションでは、運動項の正常な符号は、 ψ の方であり、 ϕ の運動項は通常とは逆の符号を持っている。このように、負符号の運動項を持つ場は ghost と呼ばれる。ghost 場を持つ系は、古典論においては、負のエネルギーを持つ。今の場合は、正エネルギーを持つ ϕ と負エネルギーを持つ ψ の間に相互作用が存在しないため、両方の場は (古典的には) 安定な力学を記述する。

ところが、ghost 場と正常な場が互いに相互作用する系では、エネルギーを一定に保ったまま両粒子の振動数をいくらでも上げることができるため、その系は不安定になってしまう。そのため、微分相互作用項などが存在して ghost が正常化する場合を除いて、ghost の存在する系は電磁場などの物理的な場を表しえない。このように、高階微分理論は、一般には、ghost を持つために模型構築の段階で排除されるのである。

上記は古典論における ghost の解釈である。一方で量子論においては、ghost が存在する系の真空の定義の仕方が二通り存在し、どちらの真空を選ぶかで問題となる事実は異なる。そこで、次節で、ghost の正準量子化を行う。

2.2 ghost の正準量子化と二種類の解釈

ここでは、負の運動項を持つ場 (ghost) の正準量子化を考えよう。はじめから古典論として ghost 場を取り扱ったとき、ghost 場と正常な粒子を結合させた系では、エネルギーを一定に保ったまま両粒子の振動数をいくらでも上げることができるため、その系は不安定であると解釈される。一方量子論では、真空の定義の仕方によって、二つの解釈が存在する。このことを簡単に見てみよう。

スカラー ghost 場の線形模型

$$S_g[\phi] = \int d^D x \left[\frac{\epsilon}{2} \phi (\square - m^2) \phi \right], \epsilon \equiv -1 \quad (2.2.1)$$

を考えよう。ここで計算課程の負符号依存性をあらわにするために $\epsilon \equiv -1$ とおいた。この理論のみでは自明な線形スカラー場であるが、正常な粒子 χ と相互作用している系 $S[\phi, \chi]$ における ϕ 粒子の漸近場が従う作用であると解釈することにする。まず、 ϕ の正準共役運動量 π は

$$\pi \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}} = \epsilon \dot{\phi} \quad (2.2.2)$$

となる。ただし、 $\dot{}$ は時間微分を表す。このとき、ハミルトニアンは、

$$H = \int d^{D-1} x \frac{\epsilon}{2} [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (2.2.3)$$

となる。 $\epsilon = -1$ なので負定値であるように思えるが、以下で見るようにエネルギー固有値の符号は真空の取り方によって異なってくる。この理論の古典解は ϵ によらず定まるため、演算子 $a(\vec{k})$ を導入することで、場の演算子 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}} \sqrt{2w_{\vec{k}}}} \left[a(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \right] \quad (2.2.4)$$

と表せる。ここで、 $w_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ 、 $k \cdot x \equiv -w_{\vec{k}} t + \vec{k} \cdot \vec{x}$ である。一方で、正準共役運動量は

$$\pi(x) = \epsilon \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}} \sqrt{2w_{\vec{k}}}} \left[-i w_{\vec{k}} a(\vec{k}) e^{ik \cdot x} + i w_{\vec{k}} a^\dagger(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \right] \quad (2.2.5)$$

となり、全体に因子 ϵ がかかることに注意しよう。ここに同時刻交換関係

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^{D-1}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.2.6)$$

を用いれば、 $a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})$ の交換関係は符号が反転し、

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{p})] = \epsilon\delta^{D-1}(\vec{k} - \vec{p}) \quad (2.2.7)$$

となる。ここで我々は二種類の真空を定義することができる。一つは $a(\vec{k})$ を用いて $a(\vec{k})|\Omega_1\rangle = 0$ と定義される真空、もう一つは $a^\dagger(\vec{k})$ を用いて $a^\dagger(\vec{k})|\Omega_2\rangle = 0$ と定義される真空である。この二つの真空のうちどちらを採用するかで、物理的な解釈は全く異なる。

(1) 真空 $|\Omega_1\rangle$

まずは真空 $|\Omega_1\rangle$ から見てみよう。本論で用いる ghost の解釈はこちらの真空において定義されたものである。この真空での 1 粒子状態 $|\vec{k}\rangle \equiv a^\dagger(\vec{k})|\Omega_1\rangle$ のノルムを計算すると、

$$\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle = \epsilon\delta^{D-1}(\vec{k} - \vec{p}) \quad (2.2.8)$$

となり、負ノルムであることが分かる。一般に n 粒子状態に対して、

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_n | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_n \rangle = \epsilon^n \sum_{i_1 \cdots i_n} \delta^{D-1}(\vec{k}_1 - \vec{p}_{i_1}) \cdots \delta^{D-1}(\vec{k}_n - \vec{p}_{i_n}) \quad (2.2.9)$$

となる。ここで和はありうるすべての順序の和を取ることを意味する。したがって、奇数個の粒子を含む状態に関して、負ノルム状態は現れる。このような負ノルム状態の存在は、確率解釈ができないことを意味する。例えば初期で正ノルムな状態 $|\Psi\rangle$ を入射したとき、終状態がいくつかの正ノルム状態 $|P_i\rangle$ といくつかの負ノルム状態 $|N_a\rangle$ の重ね合わせ状態であったとしよう。すなわち、

$$S|\Psi\rangle = \sum_i C_i^P |P_i\rangle + \sum_a C_a^N |N_a\rangle \quad (2.2.10)$$

S は S 行列である。このとき、終状態の各状態となっている確率の内訳は、

$$1 = \sum_i |C_i^P|^2 - \sum_a |C_a^N|^2 \quad (2.2.11)$$

となる。よって、正ノルム状態である確率が 1 を超えてしまい、確率解釈は破たんする。

もう一つの重要な性質は、ハミルトニアン固有値が正定値になることである。今考えている系の数密度演算子は、

$$N(\vec{k}) \equiv \epsilon a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), \quad \int d^{D-1}k N(\vec{k}) |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_n\rangle = n |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_n\rangle \quad (2.2.12)$$

で与えられる。よって、正規順序は $a^\dagger a$ の順である。これを用いて、ハミルトニアンを正規順序化する、

$$\begin{aligned} H &= \int d^{D-1}x \left[\pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] = \epsilon \int d^{D-1}x \pi^2 \\ &= \epsilon \int d^{D-1}k w_k a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \text{Vac} \\ &= \int d^{D-1}k w_k N(\vec{k}) + \text{Vac} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

ここで Vac は真空のエネルギーである。真空のエネルギーを手で落とし、 n 粒子状態に対するエネルギー固有値を計算すると、

$$H|\vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_n\rangle = \sum_{i=1}^n w_{\vec{k}_i} |\vec{k}_1 \vec{k}_2 \cdots \vec{k}_n\rangle \quad (2.2.14)$$

となり正定値である。このことは、ghost のエネルギー正常な粒子のエネルギーの和が 0 以上となり、不安定性が現れないことを意味する。実際、正振動の因子に消滅演算子が対応することから、通常の粒子を χ 、ghost 場を ϕ とするとき、不変規格化における LSZ 簡約公式は、

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_n) \chi(\vec{k}_{n+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{n+m}); \text{out} | \phi(\vec{p}_1) \cdots \phi(\vec{p}_N) \chi(\vec{p}_{N+1}) \cdots \chi(\vec{p}_{N+M}); \text{in} \rangle \\ &= \Pi_{a,b,c,d} \int d^{D-1}x_a e^{-ik_a \cdot x_a} (+i)(\square_{x_a} - m_\phi^2) \int d^{D-1}x_b e^{-ik_b \cdot x_b} (-i)(\square_{x_b} - m_\chi^2) \\ &\int d^{D-1}y_c e^{ip_c \cdot y_c} (+i)(\square_{y_c} - m_\phi^2) \int d^{D-1}y_d e^{ip_d \cdot y_d} (-i)(\square_{y_d} - m_\chi^2) \\ &\langle \Omega_1 | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \chi(x_{n+1}) \cdots \chi(x_{n+m}) \phi(y_1) \cdots \phi(y_N) \chi(y_{N+1}) \cdots \chi(y_{N+M})) | \Omega_1 \rangle \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

となる。重要なのは、ghost 場の終状態に付与される位相因子が $e^{-ik \cdot x}$ 、始状態に付与される位相因子が $e^{ik \cdot x}$ となり、通常の粒子と同じ付与のされ方をしている点である。位相因子は、エネルギー-運動量保存則を表すデルタ関数と対応しているので、上記の S 行列要素は、一般に

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_n) \chi(\vec{k}_{n+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{n+m}); \text{out} | \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_N) \chi(\vec{k}_{N+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{N+M}); \text{in} \rangle \\ &= -i(2\pi)^D \mathcal{M}_{k,p} \delta^D \left(\sum_{a=1}^n k_a + \sum_{b=n+1}^{n+m} k_b - \sum_{c=1}^N p_c - \sum_{d=N+1}^{N+M} p_d \right) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

の形を取る。デルタ関数の構造から、充分低いエネルギースケール $E \ll m_\phi$ で ghost が励起しないことが分かる。そこで、このエネルギースケールにおいて確率解釈することになると、真空が有限確率で崩壊するといったことは起こらず、安定であることが分かる。

(2) 真空 $|\Omega_2\rangle$

本論で用いるものではないが、もう一方の $a^\dagger(k)|\Omega_2\rangle = 0$ で定義される真空を採用した正準量子化を考えよう。こちらは確率解釈は壊れないが、真空は不安定となる。すなわち、古典的解釈に準拠した量子化であると考えられる。まず、今 $a(\vec{k})$ を生成演算子、 $a^\dagger(\vec{k})$ を消滅演算子とみ

なしているので、交換関係

$$[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{p})] = -\epsilon\delta^{D-1}(\vec{k} - \vec{p}) \quad (2.2.17)$$

は通常の生成消滅演算子の交換関係とみなせる。したがって、 n 粒子状態は正ノルムとなり、確率解釈が可能である。

ハミルトニアンエネルギー固有値は負となることも自明に理解できる。ハミルトニアンには a, a^\dagger が対称な形で現れるので、今の正規順序 aa^\dagger の形で正規順序化を行っても全体の符号は不変である。ハミルトニアンにはもともと負符号因子 ϵ がついているため、エネルギー固有値は負定値となる。

したがって、こちらの解釈では、確率解釈は可能であるが真空は不安定であると考えられる。こちらの解釈ではエネルギースケールによらず、ghost が励起することに注意しよう。なぜなら、いかに低エネルギーの粒子を入射しても、例え真空でさえ、終状態では正常な粒子と ghost 場がいくらか大きなエネルギーの絶対値を取ることができるからである。したがって、いかなるエネルギースケールにおいても、この真空は有限時間で崩壊し、その寿命を超えて摂動論を考えることはできない。

実際、こちらの理論では、不変規格化における LSZ 簡約公式は、

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_n) \chi(\vec{k}_{n+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{n+m}); out | \phi(\vec{p}_1) \cdots \phi(\vec{p}_N) \chi(\vec{p}_{N+1}) \cdots \chi(\vec{p}_{N+M}); in \rangle \\ &= \Pi_{a,b,c,d} \int d^{D-1} x_a e^{-i\vec{k}_a \cdot x_a} (+i)(\square_{x_a} - m_\phi^2) \int d^{D-1} x_b e^{-i\vec{k}_b \cdot x_b} (-i)(\square_{x_b} - m_\chi^2) \\ & \int d^{D-1} y_c e^{i\vec{p}_c \cdot y_c} (+i)(\square_{y_c} - m_\phi^2) \int d^{D-1} y_d e^{i\vec{p}_d \cdot y_d} (-i)(\square_{y_d} - m_\chi^2) \\ & \langle \Omega_2 | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \chi(x_{n+1}) \cdots \chi(x_{n+m}) \phi(y_1) \cdots \phi(y_N) \chi(y_{N+1}) \cdots \chi(y_{N+M})) | \Omega_2 \rangle, \\ & k_\mu \equiv (\omega_k, \vec{k}), \quad \bar{k}_\mu \equiv (-\omega_k, \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

の形をとり、ghost 粒子の位相因子の振動数の符号は正常な粒子の符号と逆符号である。したがって、

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_n) \chi(\vec{k}_{n+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{n+m}); out | \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_N) \chi(\vec{k}_{N+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{N+M}); in \rangle \\ &= -i(2\pi)^D \mathcal{M}_{k,p} \delta^D \left(\sum_{a=1}^n \bar{k}_a + \sum_{b=n+1}^{n+m} k_b - \sum_{c=1}^N \bar{p}_c - \sum_{d=N+1}^{N+M} p_d \right) \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

の形をとるため、系は不安定となる。実際、真空の崩壊確率振幅は、

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\vec{k}_1) \cdots \phi(\vec{k}_n) \chi(\vec{k}_{n+1}) \cdots \chi(\vec{k}_{n+m}); out | \Omega_2 \rangle \\ &= -i(2\pi)^D \mathcal{M}_{k,\Omega_2} \delta^D \left(\sum_{a=1}^n \bar{k}_a + \sum_{b=n+1}^{n+m} k_b \right) \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

となり、 $\sum_a \omega_{\vec{k}_a}^\phi = \sum_b \omega_{\vec{k}_b}^\chi$ かつ $\sum_a \vec{k}_a + \sum_b \vec{k}_b = 0$ を満たすすべての三次元運動量をもつ終状態に対して、有限の崩壊確率を持つ。したがって、真空 $|\Omega_2\rangle$ を採用した理論は、古典論と同様に、真空が不安定であると解釈できる。

第 3 章

Fierz-Pauli 模型

この章では、良く知られているゼロ質量スピン 2 の場を記述する線形化 Einstein-Hilbert 作用に、適切な質量項を付け加えることで有限質量スピン 2 の場の線形模型を導出する。2 階の対称テンソル場から作られる場に関して 2 次のスカラー量は、二項存在する。この模型に対し、(a)ghost が存在しないこと、または (b) 有限質量スピン 2 のモードのみが伝搬することを要請することで、相対係数は一意に決まる。この相対係数が固定された模型が Fierz-Pauli 模型である。ここでは、上記の (a) または (b) の条件から、Fierz-Pauli 模型を同定することを目標とする。

3.1 有限質量スピン 2 の場の線形模型

ある整数スピンを持つ場のゼロ質量の作用が与えられたとき、適切な質量項を加えて有限質量化することを考える。スピン 0 やスピン 1 の場の質量項は、ローレンツ不変性の要請から、一意に定義することができるが、2 以上のスピンを持つ場の質量項の組み方は一意ではない。本論では、主に ghost-freeness を指導原理とすることを目標としているので、ここでは、有限質量化後の模型の ghost-freeness を要請することで、有限質量スピン 2 の場の質量項が一意に決まることを見る。

よく知られているように、Einstein-Hilbert 作用の線形摂動は、ゼロ質量のスピン 2 の場を記述する。Einstein-Hilbert 作用の平坦時空周りでの摂動 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ の線形近似は以下で与えられる。

$$S_{\text{E-H}} = M_P^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} R \approx M_P^{D-2} \int d^D x \frac{1}{4} \eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} \partial_{\mu_1} h_{\mu_2\nu_2} \partial_{\nu_1} h_{\mu_3\nu_3} \quad (3.1.1)$$

ここで、一般に、テンソル $\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_n\nu_n}$ を n 個の平坦計量の直積 $\eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2}\cdots\eta^{\mu_n\nu_n}$ の ν_i に関する完全反対称化として定義する。例えば、

$$\begin{aligned} \eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} &\equiv \eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2} - \eta^{\mu_1\nu_2}\eta^{\mu_2\nu_1} \\ \eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} &\equiv \eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2}\eta^{\mu_3\nu_3} + \eta^{\mu_1\nu_2}\eta^{\mu_2\nu_3}\eta^{\mu_3\nu_1} + \eta^{\mu_1\nu_3}\eta^{\mu_2\nu_1}\eta^{\mu_3\nu_2} \\ &\quad - \eta^{\mu_1\nu_2}\eta^{\mu_2\nu_1}\eta^{\mu_3\nu_3} - \eta^{\mu_1\nu_3}\eta^{\mu_2\nu_2}\eta^{\mu_3\nu_1} - \eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_3}\eta^{\mu_3\nu_2} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

などである。本論を通して、 $g^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}, \delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n}$ に関しても同様の定義を用いることにする。このように定義された基本的な性質を付録 A にまとめた。

そこで、以下では、ゼロ質量スピン2の場のラグランジアンとして、

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} \partial_{\mu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \partial_{\nu_1} h_{\mu_3 \nu_3} \quad (3.1.3)$$

を採用しよう。

このラグランジアンに、対称テンソル $h_{\mu\nu}$ の質量項を加えることを考えるとき、ローレンツ不変性の要請を満たす項は以下の2種存在する。

$$h^2, \quad h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (3.1.4)$$

そこで、一般にこの二項の線形結合を加えた作用、

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_0 + \frac{m^2}{2} \{ (1+a)h^2 - h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \} \quad (3.1.5)$$

を考えよう。ただし、簡単のため、 $h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ が含まれない場合は除外する。この理論は、 $a \neq 0$ の場合の自由度と $a = 0$ の場合の自由度間に不連続性を持つ。次の章で、このことを示す。

3.2 Hamilton 解析

3.1.5 が $a \neq 0$ の場合の自由度と $a = 0$ の場合の自由度間に不連続性を持つを示すために、共変形式の解析を用いることは説得力に欠ける。そこで、Hamilton 解析によって自由度を勘定してみよう。

(1) $a = 0$ の場合

まずは、 $a = 0$ の場合から考えた方が分かりやすい。(3.1.5) で記述される理論で $a = 0$ とした作用を、時間0成分と空間 i 成分で分解すれば、

$$\begin{aligned} S &= \int d^D x \mathcal{L} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} \partial_{\mu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \partial_{\nu_1} h_{\mu_3 \nu_3} + \frac{m^2}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} h_{\mu_1 \nu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \right] \\ &= \int d^D x \left[\eta^{i_1 j_1 i_2 j_2} \left\{ -\frac{1}{2} \dot{h}_{i_1 j_1} \dot{h}_{i_2 j_2} - 2h_{i_1 0} \partial_{j_1} \dot{h}_{i_2 j_2} + \partial_{i_1} h_{0 j_2} \partial_{j_1} h_{i_2 0} + h_{00} \partial_{i_1} \partial_{j_1} h_{i_2 j_2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \eta^{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3} \partial_{i_1} h_{i_2 j_2} \partial_{j_1} h_{i_3 j_3} + m^2 \left\{ -h_{00} h_{ii} + h_{0i}^2 + \frac{1}{2} \eta^{i_1 j_1 i_2 j_2} h_{i_1 j_1} h_{i_2 j_2} \right\} \right] \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

となる。共役運動量は、

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{h}_{ij}} = -\eta^{ij i_1 j_1} h_{i_1 j_1} + 2\eta^{(ij) i_1 j_1} \partial_{j_1} h_{i_1 0} \quad (3.2.2)$$

で与えられる。そこで、 $\eta^{(i_1 j_1) i_2 j_2}$ の逆行列を $\eta_{i_1 j_1, i_2 j_2}^{-1}$ で定義する。すなわち、

$$\eta_{i_1 j_1, i_2 j_2}^{-1} \eta^{(i_2 j_2) i_3 j_3} = \delta_{(i_1}^{i_3} \delta_{j_1)}^{j_3}, \quad \eta_{i_1 j_1, i_2 j_2}^{-1} \equiv \frac{1}{D-2} \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 (i_2} \delta_{j_2) j_1} \quad (3.2.3)$$

である。これより、 \dot{h}_{ij} は

$$\dot{h}_{ij} = -\eta_{ij,i_1j_1}^{-1} \pi^{i_1j_1} + 2\partial_{(i} h_{j)0} \quad (3.2.4)$$

と表され、これを作用に代入することで

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{h}_{ij} \pi^{ij} - \left[\mathcal{H} - 2h_{0i} \pi^{ij}{}_{,j} - m^2 h_{0i}^2 + h_{00} \phi^{(1)} \right] \\ &= \dot{h}_{ij} \pi^{ij} - \left[\mathcal{H} + \frac{(\pi^{ij}{}_{,j})^2}{m^2} + h_{00} \phi^{(1)} \right] \\ \mathcal{H} &\equiv -\frac{1}{2} \eta_{i_1j_1, i_2j_2}^{-1} \pi^{i_1j_1} \pi^{i_2j_2} - \frac{1}{2} \eta^{i_1j_1 i_2j_2 i_3j_3} \partial_{i_1} h_{i_2j_2} \partial_{j_1} h_{i_3j_3} - \frac{m^2}{2} \eta^{i_1j_1 i_2j_2} h_{i_1j_1} h_{i_2j_2} \\ \phi^{(1)} &= -\eta^{i_1j_1 i_2j_2} \partial_{i_1} \partial_{j_1} h_{i_2j_2} + m^2 h_{ii} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

を得る。ここで \mathcal{L} の 1 行目から 2 行目への変形では、 h_{0i} の運動方程式を h_{0i} について解き、ラグランジアンへ再代入した。1 次拘束条件 $\phi^{(1)}$ の整合性条件より、2 次拘束条件

$$0 \approx \dot{\phi}^{(1)} = -\partial_i \partial_j \pi^{ij} - \frac{m^2}{D-2} \pi^{ii} \equiv -\phi^{(2)} \quad (3.2.6)$$

を得る。これより、 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ の Poisson 括弧を計算すると、

$$\left\{ \phi^{(1)}(t, \vec{x}), \phi^{(2)}(t, \vec{y}) \right\} = \frac{D-1}{D-2} m^4 \delta^{D-1}(x-y) \quad (3.2.7)$$

なので、 $\det\{\phi^{(a)}(x), \phi^{(b)}(y)\} \neq 0$ となり、これ以降の整合性条件はラグランジュ未定乗数を定める式となり、これ以上の拘束条件は出てこない。

この理論の自由度を勘定しよう。まず、 $D-1$ 次元対称テンソル h_{ij} 及び π^{ij} は、それぞれ $\frac{D(D-1)}{2}$ 個の成分を持つ。そこへ、計 2 つの拘束条件がかかるので、力学を決定するために必要な初期条件の数は、 $D(D-1)-2 = (D+1)(D-2)$ である。したがって、自由度は $(D+1)(D-2)/2$ である。表現論との整合性に関しては、有限質量粒子の場合、スピンの既約表現は $SO(D-1)$ の既約表現によって特徴づけられる。特に $D=4$ である $SO(3)$ の既約表現の成分数は、よく知られているように、スピンを s として $2s+1$ で表される。したがって、 $s=2$ の場合、自由度 5 を持つはずであり、これは今得た結果とちょうど一致する。よって、 $a=0$ の場合には、表現論との整合性が保たれていることが分かる。

(2) $a \neq 0$ の場合

次に、 $a \neq 0$ の場合に自由度を数えよう。 $a \neq 0$ の場合、作用 (3.2.1) は、

$$\begin{aligned} S &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu_1\nu_1 \mu_2\nu_2 \mu_3\nu_3} \partial_{\mu_1} h_{\mu_2\nu_2} \partial_{\nu_1} h_{\mu_3\nu_3} + \frac{m^2}{2} \eta^{\mu_1\nu_1 \mu_2\nu_2} h_{\mu_1\nu_1} h_{\mu_2\nu_2} \right. \\ &\quad \left. + a \frac{m^2}{2} (-h_{00} + h_{ii})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

と変更される。このとき、共役運動量 (3.2.2) は不変なので、 h_{0i} を消去したのちの (3.2.5) は、

$$\mathcal{L} = \dot{h}_{ij}\pi^{ij} - \left[\mathcal{H} + \frac{(\pi^{ij})^2}{m^2} + h_{00}\phi^{(1)} - a\frac{m^2}{2}(-h_{00} + h_{ii})^2 \right] \quad (3.2.9)$$

となる。ところが、 a に比例する項が h_{00} に関して 2 次であるため、 $\phi^{(1)}$ はもはや拘束条件ではない。 h_{00} は補助場であり、 h_{00} に関する変分方程式によって、 h_{00} 自身を消去することができる。したがって、この理論には、拘束条件は存在せず、 h_{ij} の成分の数だけの自由度が存在する。すなわち、 $a \neq 0$ の場合の自由度は $D(D-1)/2$ となり、 $a = 0$ の場合に比べて 1 自由度だけ多いことになる。上で説明したように、 $a = 0$ の場合の自由度は、純粋な有限質量スピン 2 の場の自由度であった。したがって、 $a \neq 0$ の場合には、有限質量スピン 2 の場に加えて、一つの余剰な自由度が存在するのである。実は、この場は ghost-like なスカラー場であり、ユニタリティを破る。実際に次節で、 $a = 0$ の場合はハミルトニアンが正定値になり、 $a \neq 0$ の場合はハミルトニアンに下限がないことを見よう。

3.3 ハミルトニアンの正定値性

ここでは、 $a = 0$ の場合、すなわち Fierz-Pauli 模型が正定値エネルギーを持つことを示すために、ハミルトニアンの対角化を行う。 $P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta}$ 、空間次元 $d \equiv D - 1$ として、モード分解

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \left[\left[P_{(i}^k P_{j)}^l - \frac{1}{d-1} P_{ij} P^{kl} \right] + \frac{2}{\Delta} \partial_{(i} P_{j)}^{(k} \partial^{l)} + \frac{1}{\Delta^2} \partial_i \partial_j \partial^k \partial^l + \frac{1}{d-1} P_{ij} P^{kl} \right] T_{ij} \\ &= \sum_{\sigma} \epsilon_{ij}^{(\sigma)} T_{(\sigma)} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

を行う。ここで、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{(\sigma_2, 2)}, \quad \partial^i \epsilon_{ij}^{(\sigma_2)} = 0 = \delta^{ij} \epsilon_{ij}^{(\sigma_2)}, \quad \sigma_2 = 1, 2, \dots, \frac{(d-2)(d+1)}{2} \\ \epsilon_{ij}^{(\sigma_1, 1)} = \sqrt{\frac{2}{-\Delta}} \partial_{(i} \epsilon_{j)}^{(\sigma_1)}, \quad \partial^i \epsilon_j^{(\sigma_1)} = 0, \quad \sigma_1 = 1, 2, \dots, d-1 \\ \epsilon_{ij}^{(l)} = \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \\ \epsilon_{ij}^{(t)} = \frac{P_{ij}}{\sqrt{d-1}} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

であり、 $T_{(\sigma)} \equiv \epsilon^{(\sigma)ij} T_{ij}$ とした。これらのモードは直交し、さらに、正定値ノルム +1 を持つ。すなわち、

$$\int d^D x \epsilon^{(\sigma)ij} f(x) \epsilon_{ij}^{(\rho)} g(x) = \delta^{\rho\sigma} \int d^D x f(x) g(x) \quad (3.3.3)$$

である。そこで、添え字 (σ) が上付きか下付きかは区別する必要はない。 $D = 4, d = 3$ のとき、(3.3.2) は各ヘリシティモードへの分解に対応する。すなわち、 $\epsilon^{(\sigma_2, 2)}$ はヘリシティ ± 2 モード、

$\epsilon^{(\sigma_1,1)}$ はヘリシティ ± 1 モード、 $\epsilon^{(l)}$, $\epsilon^{(t)}$ はヘリシティ 0 モードを表す。また、この“モード分解”を h_{ij}, π^{ij} に適用したものは、正準変換、

$$(h_{ij}, \pi^{ij}) \longrightarrow (h^{(\sigma)}, \pi^{(\sigma)}) \quad (3.3.4)$$

を表していることに注意しよう。なぜなら、この変換のもとで、運動項は、

$$\dot{h}_{ij}\pi^{ij} \longrightarrow \sum_{\sigma} \dot{h}^{(\sigma)}\pi^{(\sigma)} \quad (3.3.5)$$

と変換を受けるからである。

このモード分解の下で、各モードに関する作用を求めよう。すなわち、

$$S = S_2 + S_1 + S_0 \quad (3.3.6)$$

として、 S_2 は $(\sigma_2, 2)$ 成分部分、 S_1 は $(\sigma_1, 1)$ 成分部分、 S_0 は l, t モードに関する部分と分解して考える。恒等式

$$\begin{aligned} & [-\eta^{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3} \partial_{i_3} \partial_{j_3} + m^2 \eta^{i_1 j_1 i_2 j_2}] \epsilon_{i_2 j_2}^{(\sigma_2, 2)} = (\Delta - m^2) \epsilon^{(\sigma_2, 2) i_1 j_1}, \\ & -\eta^{i_1 j_1 i_2 j_2 i_3 j_3} \partial_{i_3} \partial_{j_3} \epsilon_{i_2 j_2}^{(\sigma)} = 0, \quad \sigma = (\sigma_1, 1), l \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

に注意すれば、 S_2, S_1 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int d^D x \sum_{\sigma_2} \left[\dot{h}^{(\sigma_2, 2)} \pi_{(\sigma_2, 2)} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\pi^{(\sigma_2, 2)} \right)^2 + \left(\partial_i h^{(\sigma_2, 2)} \right)^2 + m^2 \left(h^{(\sigma_2, 2)} \right)^2 \right\} \right] \\ S_1 &= \int d^D x \sum_{\sigma_1, 1} \left[\dot{h}^{(\sigma_1, 1)} \pi_{(\sigma_1, 1)} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\pi^{(\sigma_1, 1)} \right)^2 + \frac{1}{m^2} \left(\partial_i \pi^{(\sigma_1, 1)} \right)^2 + m^2 \left(h^{(\sigma_1, 1)} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

S_1 に関しては、正準変換

$$h^{(\sigma_1, 1)} \longrightarrow -\frac{\pi^{(\sigma_1, 1)}}{m}, \quad \pi^{(\sigma_1, 1)} \longrightarrow m h^{(\sigma_1, 1)} \quad (3.3.9)$$

によって、 S_2 と同じ形に変形できる。

$$S_1 = \int d^D x \sum_{\sigma_1} \left[\dot{h}^{(\sigma_1, 1)} \pi_{(\sigma_1, 1)} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\pi^{(\sigma_1, 1)} \right)^2 + \left(\partial_i h^{(\sigma_1, 1)} \right)^2 + m^2 \left(h^{(\sigma_1, 1)} \right)^2 \right\} \right] \quad (3.3.10)$$

次に S_0 は、

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^D x \left[\dot{h}^{(l)} \pi_{(l)} + \dot{h}^{(t)} \pi_{(t)} - \left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ -\frac{d-2}{d-1} \left(\pi^{(l)} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{d-1}} \pi^{(t)} \pi_{(l)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (d-2) \left(\partial_i h^{(t)} \right)^2 + m^2 \left((d-2) \left(h^{(t)} \right)^2 + 2\sqrt{d-1} h^{(t)} h^{(l)} \right) \right\} - \frac{\left(\partial_i \pi^{(l)} \right)^2}{m^2} \right] \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

拘束条件は、

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} &= -\sqrt{d-1}\Delta h^{(t)} + m^2(h^{(l)} + \sqrt{d-1}h^{(t)}) \\ \phi^{(2)} &= \Delta\pi^{(l)} + \frac{m^2}{d-1}(\pi^{(l)} + \sqrt{d-1}\pi^{(t)})\end{aligned}\quad (3.3.12)$$

で与えられる。拘束条件 $\phi^{(a)} = 0$ を作用に代入して、整合的な正準理論を得るためには、拘束条件を正準変数に取る正準変換を施す必要がある。すなわち、正準変換、

$$(h^{(l)}, \pi^{(l)}), (h^{(t)}, \pi^{(t)}) \longrightarrow (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}), (Q, P) \quad (3.3.13)$$

を施し、 $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}), (Q, P)$ は、条件

$$\{\phi^{(1)}, Q\} = 0, \quad \{\phi^{(2)}, Q\} = 0, \quad \{\phi^{(1)}, P\} = 0, \quad \{\phi^{(2)}, P\} = 0, \quad \{Q(x), P(y)\} = \delta^D(x-y) \quad (3.3.14)$$

を満たさなければならない。拘束条件同士の Poisson 括弧は、 $\{\phi^{(1)}(x), \phi^{(2)}(y)\} = \frac{D-1}{D-2}m^4\delta^D(x-y)$ であり、正準変数となっていないが、規格化 $\phi'^{(a)} \equiv \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{D-2}{D-1}}\phi^{(a)}$ に対して、上記の条件 (3.3.14) は不変であるため、拘束条件の規格化を気にする必要はない。

条件 (3.3.14) を満たす正準変数 Q, P を求めよう。今、 $\phi^{(1)}$ は $h^{(t)}, h^{(l)}$ のみの変数に依存しているため、 $\{\phi^{(1)}, *\} = 0$ は Q, P の $\pi^{(t)}, \pi^{(l)}$ に関する依存性しか規定していない。同様に、 $\{\phi^{(2)}, *\} = 0$ は Q, P の $h^{(t)}, h^{(l)}$ に関する依存性しか規定していない。よって、 $\{\phi^{(1)}, f[\pi^{(t)}, \pi^{(l)}]\} = 0, \{\phi^{(2)}, g[h^{(t)}, h^{(l)}]\} = 0$ を満たす汎関数 $f[\pi^{(t)}, \pi^{(l)}], g[h^{(t)}, h^{(l)}]$ を用いて、 Q, P を、

$$Q = af + bg, \quad P = cf + dg \quad (3.3.15)$$

と表すことができる。 a, b, c, d は、正準変数に依存しないものであればよく、一般にはラプラシアン Δ やその逆演算子 Δ^{-1} などを含む演算子である。よって、解くべき方程式は、

$$\begin{aligned}0 &= \{\phi^{(1)}(x), f(y)\} = -\sqrt{d-1}(\Delta_x - m^2)\frac{\delta f(y)}{\delta\pi^{(t)}(x)} + m^2\frac{\delta f(y)}{\delta\pi^{(l)}(x)} \\ 0 &= -\{\phi^{(2)}(x), g(y)\} = \left(\Delta_x + \frac{m^2}{d-1}\right)\frac{\delta g(y)}{\delta h^{(l)}(x)} + \frac{m^2}{\sqrt{d-1}}\frac{\delta g(y)}{\delta h^{(t)}(x)}\end{aligned}\quad (3.3.16)$$

であり、その解は

$$\begin{aligned}f &= A \left[\frac{1}{\sqrt{d-1}(\Delta - m^2)}\pi^{(t)} + \frac{1}{m^2}\pi^{(l)} \right] \\ g &= B \left[\frac{1}{\Delta + \frac{m^2}{d-1}}h^{(l)} - \frac{\sqrt{d-1}}{m^2}h^{(t)} \right]\end{aligned}\quad (3.3.17)$$

である。ただし、 A, B は正準変数を含まない任意演算子である。ここで、 f, g の Poisson 括弧を計算すると、

$$\begin{aligned} \{f(x), g(y)\} &= -A(\Delta_x)B(\Delta_y)\frac{1}{m^2}\left[-\frac{1}{\Delta-m^2}+\frac{1}{\Delta+\frac{m^2}{d-1}}\right](x-y) \\ &= A(\Delta_x)B(\Delta_y)\left[\frac{d}{d-1}\frac{1}{(\Delta-m^2)\left(\Delta+\frac{m^2}{d-1}\right)}\right](x-y) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

となる。そこで、任意演算子を、

$$\begin{aligned} A(\Delta) &= \sqrt{\frac{d-1}{d}}(\Delta-m^2), \quad B(\Delta) = \sqrt{\frac{d-1}{d}}\left(\Delta+\frac{m^2}{d-1}\right) \\ a &= 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

と選ぶと、

$$\begin{aligned} Q = f &= \sqrt{\frac{d-1}{d}}\left\{\frac{1}{\sqrt{d-1}}\pi^{(t)}+\frac{1}{m^2}(\Delta-m^2)\pi^{(l)}\right\}, \\ P = g &= \sqrt{\frac{d-1}{d}}\left\{h^{(l)}-\frac{\sqrt{d-1}}{m^2}\left(\Delta+\frac{m^2}{d-1}\right)h^{(t)}\right\} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

となり、Poisson 括弧

$$\{Q(t, \vec{x}), P(t, \vec{y})\} = \delta^d(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.3.21)$$

を満たす。(3.3.20) で定義された正準変数 Q, P と、拘束条件の正準変数 $\phi'^{(a)} \equiv \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{D-2}{D-1}}\phi^{(a)}$ を、 $h^{(t)}, h^{(l)}, \pi^{(t)}, \pi^{(l)}$ について解くと、正準変換

$$\begin{aligned} h^{(t)} &= \sqrt{\frac{1}{d}}(\phi'^{(1)} - P), \quad h^{(l)} = \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{d-1}{d}}\left[\left(\Delta+\frac{m^2}{d-1}\right)\phi'^{(1)} - (\Delta-m^2)P\right], \\ \pi^{(l)} &= \sqrt{\frac{d-1}{d}}(\phi'^{(2)} - Q), \quad h^{(l)} = \frac{1}{m^2}\frac{d-1}{\sqrt{d}}\left[\left(\Delta+\frac{m^2}{d-1}\right)Q - (\Delta-m^2)\phi'^{(2)}\right] \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

を得る。実際、この変換の下で、運動項は $\dot{h}^{(t)}\pi^{(t)} + \dot{h}^{(l)}\pi^{(l)} = \dot{\phi}'^{(1)}\phi'^{(2)} + \dot{Q}P$ となり、確かに正準変換となっていることが分かる。正準変換後の作用は、

$$S_0 = \int d^D x \left[\dot{\phi}'^{(1)}\phi'^{(2)} + \dot{Q}P - \frac{1}{2}\{Q^2 - P(\Delta-m^2)P + (\text{拘束条件に依存する項})\} \right] \quad (3.3.23)$$

となるので、さらなる正準変換

$$Q \longrightarrow P, \quad P \longrightarrow -Q \quad (3.3.24)$$

を施し、拘束条件 $\phi'^{(1)} = 0 = \phi'^{(2)}$ を代入すれば、拘束面上の正準理論、

$$S_0 = \int d^D x \left[\dot{Q}P - \frac{1}{2}\{P^2 + (\partial_i Q)^2 + m^2 Q^2\} \right] \quad (3.3.25)$$

を得る。よって、ヘリシティ 0 モードも正定値エネルギーを持つことが示された。

一方で、 $a \neq 0$ の場合は、ハミルトニアンに下限が存在しないことはほぼ自明に理解できる。 $a \neq 0$ の場合、 h_{00}, h_{ii} を消去した作用は以下ようになる。

$$S = \int d^D x \left[\dot{h}_{ij} \pi^{ij} - \left[\mathcal{H} + \frac{(\pi^{ij})^2}{m^2} + \frac{1}{2am^2} ((\phi^{(1)})^2 + 2am^2 \phi^{(1)} h_{ii}) \right] \right] \quad (3.3.26)$$

$\phi^{(1)}$ と h_{ii} は、変数として $h^{(l)}, h^{(t)}$ しか含まないので、 $a = 0$ の場合に比べて、 S_0 に関する解析のみが異なる。すなわち、 S_2, S_1 は $a = 0$ の場合と同様であり、 S_0 が、

$$\begin{aligned} S_0 = \int d^D x & \left[\dot{h}^{(l)} \pi_{(l)} + \dot{h}^{(t)} \pi_{(t)} - \left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ -\frac{d-2}{d-1} (\pi^{(l)})^2 + \frac{2}{\sqrt{d-1}} \pi^{(t)} \pi^{(l)} \right. \right. \\ & \left. \left. + (d-2) (\partial_i h^{(t)})^2 + m^2 \left((d-2) (h^{(t)})^2 + 2\sqrt{d-1} h^{(t)} h^{(l)} \right) \right\} - \frac{(\partial_i \pi^{(l)})^2}{m^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2am^2} ((\phi^{(1)})^2 + 2am^2 \phi^{(1)} h_{ii}) \right] \quad (3.3.27) \end{aligned}$$

と変更される。このハミルトニアン部分には、 $\pi^{(t)}$ に関する二次の項は存在せず、1 次の項しか存在しない。したがって、このハミルトニアンに下限は存在しない。また、ハミルトニアンが負になる場合が波数によって制限されていないことから、下限をなくす原因はタキオンによるものではないことが分かる。したがって、 $a \neq 0$ の場合には ghost が存在することが分かる。

3.4 Fierz-Pauli 模型

この章で得られた結論として、ラグランジアン (3.1.5) で記述される理論のうち $a = 0$ としたもの、

$$\mathcal{L}_{FP} \equiv \frac{1}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} \partial_{\mu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \partial_{\nu_1} h_{\mu_3 \nu_3} + \frac{m^2}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} h_{\mu_1 \nu_1} h_{\mu_2 \nu_2} \quad (3.4.1)$$

は、表現論から得られる有限質量スピン 2 の場の自由度を持ち、ハミルトニアンが正定値となることが分かった。そのため、この線形模型は特別に、Fierz-Pauli 模型 [2, 3] と呼ばれる。

一方で $a \neq 0$ の場合の模型は、有限質量スピン 2 の場の自由度に加えて、一つの余剰な自由度を持ち、その自由度は ghost であることを見た。したがって、 $a \neq 0$ のチューニングは許されず、ユニタリティを保つためには、Fierz-Pauli 模型 (3.4.1) を採用しなければならない。

第 4 章

高階微分重力理論

Einstein-Hilbert 作用に曲率に関して二次の項を付け加えた模型の性質は、主に量子重力理論の文脈において研究されてきた。これは、この模型が 4 次元時空において、任意のループオーダーで繰り込み可能であるという著しい性質を持つためである。しかしながら、同時に、この模型には ghost が存在することも同定され、量子重力としての完成はしていない。本論で、回避することを目標としているのは、この ghost である。ここでは、特に $D = 3, 4$ の場合に関して、曲率の 2 次の項を持つ一般の模型が持つモードを特定することを目標とする。

4.1 曲率の 2 次補正

ここでは、曲率の 2 次までを含む重力理論が、一般に持ちうるモードを特定することを目標とする。一般に曲率の 2 次までを含む理論、

$$S = M_P^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} [R + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}] \quad (4.1.1)$$

を考える。この模型でパラメータ a, b をフリーパラメータとみなしたものは、 $D = 3, 4$ の場合に繰り込み可能であることが知られている [13]。ここでは、簡単化のために、時空次元が $D = 3, 4$ の場合に限って議論を行うことにする。 $D = 3, 4$ の場合には、リーマン曲率の 2 次の項を落としても一般性を失わない。その理由を以下に説明する。

まず $D = 3$ の場合、ワイルテンソルが、恒等的にゼロとなり、リーマン曲率は、リッチ曲率とスカラー曲率に従属する。ワイルテンソルとは、リーマン曲率のすべての添え字に関する縮約に対するトレースレス化で、

$$C_{\mu\alpha\nu\beta} \equiv R_{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{2}{D-2}(g_{\mu[\nu}R_{\beta]\alpha} - g_{\alpha[\nu}R_{\beta]\mu}) + \frac{2}{(D-1)(D-2)}Rg_{\mu[\nu}g_{\beta]\alpha} \quad (4.1.2)$$

と表され、 $C_{\mu\alpha\nu\beta}g^{\mu\nu} = C_{\mu\alpha\nu\beta}g^{\alpha\beta} = 0$ 等を満たす。ワイルテンソルが $D = 3$ でゼロであることは、簡単に証明できる。まず、ワイルテンソルと正則変換で結びつけられた量、

$$B^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \quad (4.1.3)$$

を考える。重要なことは、 $D = 3$ においてのみ、この式を $C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}$ に関して解くことができる点にある。付録 A の (A.1) を用いると、

$$B^{\mu\nu} = -E^{\mu\mu_1\mu_2} E^{\nu\nu_1\nu_2} C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \quad (4.1.4)$$

なので、両辺に $E_\mu^{\alpha_1\alpha_2} E_\nu^{\beta_1\beta_2}$ を作用させて、 μ, ν に関する和を取ると、

$$\begin{aligned} E_\mu^{\alpha_1\alpha_2} E_\nu^{\beta_1\beta_2} B^{\mu\nu} &= -g^{\mu_1\alpha_1\mu_2\alpha_2} g^{\nu_1\beta_1\nu_2\beta_2} C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \\ &= -4g^{\mu_1\alpha_1} g^{\mu_2\alpha_2} g^{\nu_1\beta_1} g^{\nu_2\beta_2} C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \\ &= -4C^{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

となる。ここで、1行目の等式では、再び付録 A の (A.1) を、二行目では $g^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}$ の定義式を用いた。これより、(4.1.3) によって定義された二階テンソル $B^{\mu\nu}$ は、 $D = 3$ ではワイルテンソル $C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}$ の正則変換であることが分かった。したがって、 $B_{\mu\nu} = 0$ ならば、 $C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = 0$ である。そこで、 $B_{\mu\nu} = 0$ を示そう。ワイルテンソルが任意の縮約に関してトレースレスである事実と、 $g^{\mu\nu\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}$ の展開公式 (付録 A の (A.5)) をうまく用いれば、

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \\ &= (g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2\mu\nu} + g^{\mu_1\nu_2} g^{\mu_2\nu\mu\nu_1} + g^{\mu_1\nu} g^{\mu_2\nu_1\mu\nu_2}) C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} \\ &= 2g^{\mu_1\nu} g^{\mu_2\nu_1} g^{\mu\nu_2} C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

のように簡単に示すことができる。したがって、 $D = 3$ で、恒等式 $C_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = 0$ が成り立つことが証明された。これより、 $D = 3$ では、リーマン曲率は、リッチ曲率、スカラー曲率に従属するので、 $c = 0$ としても一般性を失わない。

次に $D = 4$ の場合にも、 $c = 0$ として一般性を失わないことを示そう。 $D = 4$ の場合、ガウス-ボンネ項、

$$\mathcal{L}_{\text{GB}} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_4\nu_4} R_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} R_{\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4} \quad (4.1.7)$$

が全微分となり、運動方程式に寄与しない。この事実をガウス-ボンネ項の変分が全微分となることによって簡単に示そう。これを示すためには、多脚場形式を用いると便利である。多脚場 e_μ^a (a は局所ローレンツの足で $e_\mu^a \eta_{ab} e_\nu^b = g_{\mu\nu}$ を満たす) を用いて \mathcal{L}_{GB} を書き直すと、数係数を除いて、

$$d^D x \mathcal{L}_{\text{GB}} \sim R^{a_1 a_2} \wedge R^{a_3 a_4} \wedge e^{a_5} \wedge e^{a_6} \wedge \cdots e^{a_D} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} \quad (4.1.8)$$

と表せる (ここで $D \geq 4$)。ただし、2階フォーム $R^{ab} \equiv R^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2} e_{\mu_1}^a e_{\mu_2}^b dx^{\nu_1} dx^{\nu_2}$ 、及び1階フォーム $e_\mu^a dx^\mu$ を定義した。多脚場 e_μ^a を新たな力学変数とみなし、このラグランジアン密度の変分を取ってみよう。 R^{ab} はスピン接続 $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$ を介してのみ多脚場 e_μ^a に依存しているので、

$$\begin{aligned} \delta (d^D x \mathcal{L}_{\text{GB}}) &\sim 2D \delta \omega^{a_1 a_2} \wedge R^{a_3 a_4} \wedge e^{a_5} \wedge e^{a_6} \wedge \cdots e^{a_D} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} \\ &\quad + (D - 4) R^{a_1 a_2} \wedge R^{a_3 a_4} \wedge \delta e^{a_5} \wedge e^{a_6} \wedge \cdots e^{a_D} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

ただし、ここで、 D は一般座標の足、局所ローレンツの足両方に作用する共変微分 \mathcal{D}_μ のフォーム化である。また、 $\delta\omega$ は、 $\delta\omega = (\delta\omega/\delta e)\delta e$ の略記である。このとき、ビアンキ恒等式、

$$\mathcal{D}R^{ab} = 0 \quad (4.1.10)$$

及び、多脚場仮説 $\mathcal{D}e_\mu^a = 0$ を用いると、左辺第一項は、 $d \equiv \partial_\mu dx^\mu$ として、

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{D}\delta\omega^{a_1 a_2} \wedge R^{a_3 a_4} \wedge e^{a_5} \wedge e^{a_6} \wedge \cdots e^{a_D} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} \\ &= 2d(\delta\omega^{a_1 a_2} \wedge R^{a_3 a_4} \wedge e^{a_5} \wedge e^{a_6} \wedge \cdots e^{a_D} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D}) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

と表せ、全微分項となることが分かる。したがって、ガウス-ボンネ項から運動方程式への寄与は第二項からの寄与しかない。しかし、この項からの寄与は $D = 4$ で 0 であることが分かるので、 $D = 4$ でガウス-ボンネ項は運動方程式に寄与しない。これより、 $D = 4$ の場合にも $c = 0$ としても一般性を失わないことが分かる。

さて、 $D = 3, 4$ の場合に $c = 0$ としても一般性を失わないことが示されたので、時空次元を $D = 3, 4$ に限って、作用

$$S = M_P^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} [R + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}] \quad (4.1.12)$$

の持つモードを調べてみよう。解析の簡単化のために、パラメータ a, b の線形結合を取り直し、

$$S = M_P^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + \alpha R^2 + \beta \left(\frac{D}{4(D-1)} R^2 - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right) \right] \quad (4.1.13)$$

とパラメトライズしよう。すなわち、 $a = \alpha + \beta D/4(D-1)$, $b = -\beta$ である。この模型は、曲率の 2 次の項を含み、曲率は力学変数 $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含むため、運動方程式は 4 階微分方程式となる。4 階微分方程式を解くためには、2 階微分方程式を解く際より多くの初期条件を必要とする。したがって、この模型は massless spin-2 場に加えて余剰な自由度を持つことが分かる。これを具体的に見るためには、補助場を導入して通常の二階微分形式に焼き直せば分かりやすい。作用 (4.1.13) は、補助場 ϕ 及び $q_{\mu\nu}$ を導入した新たな作用

$$S' \equiv M_P^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + 2\Lambda - \phi R - \frac{1}{4\alpha} \phi^2 - q^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4\beta} g^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} q_{\mu_1 \nu_1} q_{\mu_2 \nu_2} \right] \quad (4.1.14)$$

と等価である。

この作用を平坦時空周りで摂動展開 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ すると、

$$\begin{aligned} S'|_{\text{linear}} = & \frac{M_P^{D-2}}{2} \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} h_{\mu_1 \nu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\nu_2} h_{\mu_3 \nu_3} - 2\phi \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_1} h_{\mu_2 \nu_2} - \frac{1}{2\alpha} \phi^2 \right. \\ & \left. + \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} q_{\mu_1 \nu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\nu_2} h_{\mu_3 \nu_3} - \frac{1}{2\beta} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} q_{\mu_1 \nu_1} q_{\mu_2 \nu_2} \right] \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

を得る。ここで変数変換、

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} - \frac{2}{D-2} \eta_{\mu\nu} \phi - q_{\mu\nu} \quad (4.1.16)$$

を施すと、

$$S'_{\text{linear}} = \frac{M_P^{D-2}}{2} \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} h_{\mu_1 \nu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\nu_2} h_{\mu_3 \nu_3} + \phi \left(\frac{2(D-1)}{D-2} \square - \frac{1}{2\alpha} \right) \phi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q_{\mu_1 \nu_1} \left(\eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} \partial_{\mu_3} \partial_{\nu_3} - \frac{1}{\beta} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} \right) q_{\mu_2 \nu_2} + 2\eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} q_{\mu_1 \nu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\nu_2} \phi \right] \quad (4.1.17)$$

となる。この理論は、 $h_{\mu\nu}$ の表すゼロ質量スピン2の場に加えて、スカラー場 ϕ と、“対角項”が Fierz-Pauli 模型で表される対称テンソル $q_{\mu\nu}$ が mixing を通して相互作用している。この段階で、この模型が有限質量スピン2と有限質量スピン0のスペクトラムを持つと言い切ることは早計である。なぜなら、Fierz-Pauli 模型を線形レベルでその他の場と相互作用させると、一般には拘束条件が破れ、余剰なモードが生じる可能性があるからである。そこで、この模型の $q_{\mu\nu}$ と ϕ を含む部分を持つ自由度を勘定してみよう。 $q_{\mu\nu}$ 変分、 ϕ 変分から得られる運動方程式は、それぞれ、

$$E_q^{\mu\nu} \equiv \left(\eta^{\mu\nu\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} \partial_{\mu_2} \partial_{\nu_2} - \frac{1}{\beta} \eta^{\mu\nu\mu_1\nu_1} \right) q_{\mu_1\nu_1} + 2\eta^{\mu\nu\mu_1\nu_1} \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_1} \phi = 0, \\ E_\phi \equiv \left(\frac{4(D-1)}{D-2} \square - \frac{1}{\alpha} \right) \phi + 2\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_1} q_{\mu_2\nu_2} = 0 \quad (4.1.18)$$

で与えられる。まず、 $E_q^{\mu\nu}$ の発散を取れば、 $\eta^{\mu_1\nu_1\cdots\nu_n}$ の μ_i に関する完全反対称性から、拘束条件

$$\partial_\mu E_q^{\mu\nu} = -\frac{1}{\beta} \eta^{\mu\nu\mu_1\nu_1} \partial_\mu q_{\mu_1\nu_1} \quad (4.1.19)$$

を得る。この拘束条件が存在するために、相互作用項が発散を取って0であることが起因していることに注意してほしい。一方で $E_q^{\mu\nu}$ のトレースを取ってみれば、

$$\eta_{\mu\nu} E_q^{\mu\nu} = (D-2) \eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_1} q_{\mu_2\nu_2} - \frac{1}{\beta} (D-1) q + 2(D-1) \square \phi \quad (4.1.20)$$

となる。右辺に現れる q の二階微分項と ϕ の二階微分項の係数の比は、ちょうど E_ϕ 中に現れる係数の比と一致する。したがって、運動方程式の線形結合をとることで拘束条件、

$$\eta_{\mu\nu} E_q^{\mu\nu} - \frac{D-2}{2} E_\phi = -\frac{D-1}{\beta} q + \frac{D-2}{2\alpha} \phi \quad (4.1.21)$$

を得る。したがって、この系の自由度は、 $\frac{(D+1)(D-2)}{2} + 1$ で有限質量スピン2の場の自由度 $\frac{(D+1)(D-2)}{2}$ に加えて、一つのスカラー場の自由度を持つことが分かる。実際、幾分ナイーブではあるが、“変数変換”

$$q_{\mu\nu} \longrightarrow q_{\mu\nu} + 2\beta \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (4.1.22)$$

を施せば、作用 (4.1.17) は、

$$S'_{\text{linear}} = \frac{M_P^{D-2}}{2} \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} h_{\mu_1 \nu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\nu_2} h_{\mu_3 \nu_3} + \phi \left(\frac{2(D-1)}{D-2} \square - \frac{1}{2\alpha} \right) \phi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q_{\mu_1 \nu_1} \left(\eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} \partial_{\mu_3} \partial_{\nu_3} - \frac{1}{\beta} \eta^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} \right) q_{\mu_2 \nu_2} \right] \quad (4.1.23)$$

と対角化される。ただしここで、 $\eta^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n}$ の足の反対称性から、

$$\begin{aligned}\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1}\phi\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi &= \partial_{\mu_1}(\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}\partial_{\nu_1}\phi\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi) = (\text{全微分項}), \\ \eta^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_3\nu_3}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi &= 0\end{aligned}\quad (4.1.24)$$

となる事実を用いた。最後に正準規格化 $2\sqrt{\frac{D-1}{D-2}}\phi \rightarrow \phi$ を行えば、作用、

$$\begin{aligned}S'|_{\text{linear}} &= \frac{M_P^{D-2}}{2} \int d^D x \left[-\frac{1}{2}\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} h_{\mu_1\nu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}h_{\mu_3\nu_3} + \frac{1}{2}\phi \left(\square - \frac{D-2}{4\alpha(D-1)} \right) \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}q_{\mu_1\nu_1} \left(\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3}\partial_{\mu_3}\partial_{\nu_3} - \frac{1}{\beta}\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} \right) q_{\mu_2\nu_2} \right]\end{aligned}\quad (4.1.25)$$

を得る。したがって、この理論には、正常な massless spin-2 モード、質量 $(D-2)/2\alpha(D-1)$ を持つ正常な spin-0 モード、質量 $1/\beta$ を持つ ghost-like な massive spin-2 モードが含まれることがわかる。

4.2 R^2 重力理論

結局、曲率の二次まで許した模型の問題は ghost-like な massive spin-2 モードが伝搬するところにあり、スカラー場は問題ではないことが分かった。本論の主題は、この ghost が回避可能かを議論するところにある。そこで $\alpha \rightarrow 0$ 極限を取った模型、

$$S = M_g^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + 2\Lambda - \beta \left(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{D}{4(D-1)} R^2 \right) \right]\quad (4.2.1)$$

を定義しておこう。スカラー場の質量は $(D-2)/2\alpha(D-1)$ であったので、この極限の下で伝搬しない。実際、この節で行った解析を繰り返せば、この作用には、正常な massless spin-2 の場と、ghost-like な massive-spin-2 場のみが伝搬することは容易にわかるだろう。本論では、この模型の ghost が回避できるか議論する。また、便宜のため、この模型を R^2 重力理論と呼ぶことにする。次章で、 R^2 重力理論の ghost を回避するために提唱された手法を紹介する。

第 5 章

Higher derivative gravity from Bigravity

Hassan らは、双重力理論 (bigravity) と呼ばれる二つの計量が相互作用する模型から、ある操作によって高階微分理論を作る手法を提唱した。彼らの導出した高階微分模型には、以前 ghost が存在するが、彼らは適切に物理的部分空間を選ぶことで ghost が除去可能であると予想した [18]。ここで、その概要を紹介する。

5.1 双重力理論 (bigravity)

ここでは、双重力理論の作用を与え、そのスペクトルが、ゼロ質量スピン 2 の場と有限質量スピン 2 の場であることを見る。このスペクトルはちょうど、章 4 で定義した R^2 重力理論のスペクトルと似ている。しかし、高階微分理論では、有限質量スピン 2 の場が ghost モードであったのに対して、bigravity は有限質量スピン 2 の場も正常であることを見る。bigravity の作用は、二つの計量 $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ が相互作用する模型として、

$$S[g, f] = M_g^{D-2} \int d^D x [\sqrt{-g}R(g) + \alpha^{D-2} \sqrt{-f}R(f) - 2m^2 \sqrt{-g} \sum_{n=0}^D \beta_n e_n(S)],$$

$$e_n(S) \equiv \frac{1}{n!} \delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} S^{\nu_1}_{\mu_1} S^{\nu_2}_{\mu_2} \dots S^{\nu_n}_{\mu_n}, \quad S^\mu{}_\nu \equiv \sqrt{g^{-1}} f^\mu{}_\nu, \quad S^\mu{}_\nu S^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu} f_{\nu\rho} \quad (5.1.1)$$

で与えられる [10, 12]。 D は時空次元、 M_g は g メトリックのプランクマス、 $\alpha \equiv M_f/M_g$ はプランクマスの比、 β_n は無次元のフリーパラメータで、 m^2 は独立なパラメータではないが β_n を無次元化するために導入したパラメータである。また、テンソル $\delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ は n 個のクロネッカーデルタ $\delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\nu_n}^{\mu_n}$ の ν_i に関する完全反対称化として定義され、その細かい性質は A に与えてある。

bigravity のスペクトラムを見てみよう。bigravity の運動方程式は、

$$\begin{aligned} E_g[g, f] &\equiv G(g)^\mu{}_\nu + m^2 \sum_{n=0}^{D-1} \beta_n Y_n(S)^\mu{}_\nu = 0, \\ E_f[g, f] &\equiv G(f)^\mu{}_\nu + \frac{m^2}{\alpha^{D-2}} \sum_{n=1}^D \beta_n Y_{D-n}(S^{-1})^\mu{}_\nu = 0, \\ Y_n(S)^\mu{}_\nu &\equiv \frac{1}{n!} \delta^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} S^{\nu_1}{}_{\mu_1} S^{\nu_2}{}_{\mu_2} \dots S^{\nu_n}{}_{\mu_n} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

で与えられる。今、特に $f_{\mu\nu} = c^2 g_{\mu\nu}$ となる解を考えよう。これを運動方程式に代入すれば、2つのアインシュタイン方程式

$$\begin{aligned} E_g[g, f = c^2 g] &= G(g)^\mu{}_\nu + \Lambda_g \delta^\mu{}_\nu = 0 \\ c^2 E_f[g, f = c^2 g] &= G(g)^\mu{}_\nu + \Lambda_f \delta^\mu{}_\nu = 0 \\ \Lambda_g &\equiv m^2 \sum_{n=0}^{D-1} C_n \beta_n c^n, \quad \Lambda_f \equiv \frac{m^2 c^2}{\alpha^{D-2}} \sum_{n=1}^D C_{n-1} \beta_n c^{-(D-n)} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

を得る。これらが同時に解を持つ条件は、 $\frac{2D\Lambda_g}{D-2} = R(g) = \frac{2D\Lambda_f}{D-2}$ なので、有効宇宙定数が一致しなければならない。すなわち、比例定数 c は条件式

$$\Lambda_g = \Lambda_f \quad (5.1.4)$$

を満たさねばならない。この条件式の両辺の m^2 は落ちるので、 c はこの多項式の解として、 $c = c(\beta_n, \alpha)$ の関数として表される。まとめると、仮定 $f = c^2 g$ を満たす運動方程式の解は、 $c(\beta_n, \alpha)$ を用いて表される宇宙定数 $\bar{\Lambda} \equiv \Lambda_g|_{c=c(\beta_n, \alpha)} = \Lambda_f|_{c=c(\beta_n, \alpha)}$ を持つアインシュタイン方程式の真空解である。

今求めた解の周りの摂動を取ることで、bigravity 模型のスペクトラムを同定できる。 $\bar{g}_{\mu\nu}$ を宇宙定数 $\bar{\Lambda}$ を持つアインシュタイン方程式の真空解とするとき、摂動 $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $f_{\mu\nu} = c(\beta_n, \alpha)^2 \bar{g}_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}$ を取った線形模型は、

$$\begin{aligned} S_{\text{linear}} &= \frac{M_g^{D-2}}{2} \int d^D x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{1}{2} h_{\mu_1 \nu_1} \mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} h_{\mu_2 \nu_2} + \frac{1}{2} \alpha^{D-2} c^{D-6} k_{\mu_1 \nu_1} \mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} k_{\mu_2 \nu_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 s}{2} \bar{g}^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} \left(\frac{k_{\mu_1 \nu_1}}{c} - c h_{\mu_1 \nu_1} \right) \left(\frac{k_{\mu_2 \nu_2}}{c} - c h_{\mu_2 \nu_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

で与えられる。ここで、定数 $s \equiv \sum_{n=1}^{D-1} C_{n-1} \beta_n c^{n-2}$ である。また、 $\mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2}$ は線形化アインシュタインヒルベルト作用のオペレーター、

$$\mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} \equiv -\bar{g}^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3} \bar{\nabla}_{\mu_3} \bar{\nabla}_{\nu_3} - \frac{D-2}{D(D-1)} R(\bar{g}) \bar{g}^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} + C^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2}(\bar{g}) \quad (5.1.6)$$

である。或いは、diffeomorphism $\delta h_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}$ を0固有ベクトルに取る2階微分まで含むオペレーターであると言い換えることもできる。

$$\mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} \bar{\nabla}_{(\mu_2} \xi_{\nu_2)} = 0 \quad (5.1.7)$$

ここで変数変換、

$$\begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} \\ \xi_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha c)^{D-2}}} \begin{pmatrix} (\alpha c)^{\frac{D-2}{2}} & 1 \\ 1 & -(\alpha c)^{\frac{D-2}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha c)^{\frac{D-2}{2}} c^{-2} k_{\mu\nu} \\ h_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (5.1.8)$$

を施せば、対角化された作用、

$$S_{\text{linear}} = \frac{M_g^{D-2}}{2} \int d^D x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{1}{2} \eta_{\mu_1 \nu_1} \mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} \eta_{\mu_2 \nu_2} + \frac{1}{2} \xi_{\mu_1 \nu_1} \{ \mathcal{O}^{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2} + m_{FP}^2 \bar{g}^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} \} \xi_{\mu_2 \nu_2} \right] \quad (5.1.9)$$

を得る。ここで Fierz-Pauli mass m_{FP} は、

$$m_{FP}^2 = m^2 \sum_{n=1}^{D-1} \beta_n c^n {}_{D-2}C_{n-1} \frac{1 + (\alpha c)^{D-2}}{(\alpha c)^{D-2}} \quad (5.1.10)$$

で与えられる。したがって、bigravity は R^2 重力理論の場合とは対照的に、正常なゼロ質量スピン2の場に加えて、有限質量スピン2の場を持つ。

5.2 Higher derivative gravity from Bigravity

Hassan らは、bigravity と R^2 重力理論の間のスペクトルの類似性から、bigravity が R^2 重力理論の ghost-free 化であるのではないかと予想した [18]。そして、そのアイデアを具体化するために、bigravity の作用 (5.1.1) にある操作を施して、高階微分描像に書き直すことを試みた。ここでは、その概要をレビューしよう。

(5.1.1) は、アインシュタインヒルベルト項を運動項に持つ2つのメトリック $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ に、非微分相互作用項を付け加えた形をしている。したがって、その g 変分の運動方程式、

$$\frac{\delta S[g, f]}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad (5.2.1)$$

には、 f の微分は含まれない。そこで、この方程式を $f_{\mu\nu}$ について代数的に解きことができ、その解は計量 g と曲率 $R(g)$ で表現されるはずである。解は一般には $D-1$ 個存在するが、そのうちの1つを $f_{\mu\nu}[g]$ と表すことにする。この解 $f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(g)$ を f 変分の方程式に代入したもの

$$\left[\frac{\delta S[g, f]}{\delta f_{\mu\nu}} \right]_{f=f[g]} = 0 \quad (5.2.2)$$

の性質を上げておこう。 $f(g)$ は曲率を通して g の二階微分を含み、代入以前は f に関する二階微分方程式であることから、代入後は g に関する4階微分方程式であることが分かる。また、この4階微分方程式の解は、もともとの bigravity の方程式を連立して解いた解に含まれるはずである。したがって、この方程式は高階微分ではあるが、安定な力学を記述する。bigravity から高階微分理論を構築しようとするとき、まず第一に思いつくことは、この方程式 (5.2.2) を運動方程式とし

てもつ作用を構築することだろう。しかしながら、この方程式を導出する作用は一般には存在しない。その理由は、付録 D 及び付録 E で議論している（読まなくとも、今後の議論には影響しない）。したがって、高階微分理論構築のためには、その他の方法が必要となる。

Hassan らは (5.2.2) を再現可能な高階微分模型として、代数解 $f_{\mu\nu}[g]$ をもとの作用 (5.1.1) に代入した理論

$$S'[g] \equiv S[g, f[g]] \quad (5.2.3)$$

を考えた。実際に作用 (5.2.3) を求めるには、方程式 (5.2.1) を $f_{\mu\nu}$ について具体的に解く必要がある。しかし、(5.2.1) は非線形な行列方程式であり、特別な場合を除いて全次数で解くことは困難である。そこで、Hassan らは $1/m^2$ に関する摂動解を求めた。その結果、得られた摂動解を作用に再代入したものは、 $1/m^2$ の次数までで、

$$S'[g] \equiv S[g, f(g)] = M_g^{D-2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[\Lambda + c_R R(g) - \frac{c_{RR}}{m^2} \left(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{D}{4(D-1)} R^2 \right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^4}\right) \quad (5.2.4)$$

となることを示した。ここで Λ, c_R, c_{RR} は、bigravity の (5.1.1) のフリーパラメータ α, β_n で決まるパラメータであり、その具体形はやや複雑なのでここでは省略する。この作用の $\mathcal{O}(1/m^4)$ を無視したものは、ちょうど、4.2 章で定義した R^2 重力理論の作用 4.2.1 と一致する。そこで、もし、この高階微分理論 $S'[g] \equiv S[g, f(g)]$ が bigravity $S[g, f]$ と等価な力学を表すのであれば、高階微分理論 (5.2.4) は R^2 重力理論の ghost-free 化であるといえる。しかし、残念ながら、作用 $S'[g]$ が記述する力学は元の作用 $S[g, f]$ が記述する力学と完全に等価なわけではない。

このことは、具体的な作用を用いずとも形式的に理解することができる。実際、(5.2.3) の変分を取ってみれば、

$$\frac{\delta S'[g]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = \left[\frac{\delta S[g, f]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \Big|_f \right]_{f=f[g]} + \int d^D y \frac{\delta f_{\rho\sigma}[g(y)]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \left[\frac{\delta S[g, f]}{\delta f_{\rho\sigma}(y)} \Big|_g \right]_{f=f[g]} \quad (5.2.5)$$

$$= \int d^D y \frac{\delta f_{\rho\sigma}[g(y)]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \left[\frac{\delta S[g, f]}{\delta f_{\rho\sigma}(y)} \Big|_g \right]_{f=f[g]} \quad (5.2.6)$$

となる。一行目から二行目への変形では、 $f[g]$ が元の作用の g 変分の変動方程式 (5.2.1) の解であることから、一行目右辺第一項が恒等的に 0 となることを用いた。ここで、

$$\frac{\delta f_{\rho\sigma}[g(y)]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \equiv \mathcal{O}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \delta(x-y) \quad (5.2.7)$$

と表すと、 $f[g]$ が $R(g)$ と g で代数的に表せることから、 \mathcal{O} は二階微分演算子となる。結局、新たな理論 $S'[g]$ の運動方程式は、

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \left[\frac{\delta S[g, f]}{\delta f_{\rho\sigma}(x)} \Big|_g \right]_{f=f[g]} = 0 \quad (5.2.8)$$

となる。この方程式には、元の理論の 4 階微分方程式 (5.2.2) に余分な 2 階微分演算子 \mathcal{O} が作用している。したがって、(5.2.8) は 6 階微分方程式である。 \mathcal{O} の存在は、元の理論の自由度に加えて、余分な自由度が存在することを示している。補助場 $\lambda^{\rho\sigma}$ を導入して、(5.2.8) を分解してみると、

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \lambda^{\rho\sigma} = 0, \quad \left[\frac{\delta S[g, f]}{\delta f_{\rho\sigma}(x)} \Big|_g \right]_{f=f[g]} = \lambda^{\rho\sigma} \quad (5.2.9)$$

となり、二階微分方程式に従う $\lambda^{\rho\sigma}$ と 4 階微分方程式に従う $g_{\mu\nu}$ の相互作用系として表すことができる。この方程式系が元の理論の運動方程式 (5.2.2) と一致するためには、 $\lambda^{\rho\sigma}$ に関する初期条件と境界条件を適切に選んで、 $\lambda^{\rho\sigma} = 0$ とする必要がある。後に見るように余剰な場 λ は一般に ghost であり、散乱振幅の解析において、この ghost を除去できるか否かを判定することが本論の主題である。

第 6 章

スカラー場による双重力理論と高階微分重力理論の関係性の解明に向けた研究

Hassan らは、高階微分理論 (5.2.3) に含まれる ghost は適切な補助条件のもとで除去可能であると予想した。しかしながら、彼らが予想を信じた根拠は、線形近似の解析に基づいている。混乱と煩雑さを避けるため、今の段階で彼らの根拠となった解析を紹介することは避ける。後に、彼らの解析を付録 B で紹介する。付録 B は 6.2.1 章を読んだ後に読めるようになっている。真に、ghost の除去可能性を議論するためには、非線形レベルの解析が必要である。

そこで本論では、Hassan らの解析を拡張するため、彼らが線形レベルの解析で用いたスカラー場の模型に、一般の非微分相互作用項を付け加えた模型、

$$S_0[\phi, \psi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi + \psi)^2 - kV(\phi, \psi) \right] \quad (6.0.1)$$

を用いて、彼らの代入手法の検証を行った。この作用の ϕ 変分の運動方程式を ψ について解いた代数解の一つ $\psi[\phi]$ を作用に再代入したもの

$$S'[\phi] \equiv S_0[\phi, \psi[\phi]] \quad (6.0.2)$$

を考えた。後に見るように、この模型には元の理論に含まれるモードである“物理的なモード”に加えて、一つの ghost 場が存在する。そして、すべての外線を“物理的なモード”にとった $S'[\phi]$ の散乱振幅は、元の理論の散乱振幅と一致することを示した。

6.1 スカラー場の模型

この章では、本論で用いる模型の基本的な性質を列挙する。また、得られた高階微分理論 $S_0[\phi, \psi[\phi]]$ のモードを特定することを一つの目標とする。特に、各モードが ghost か否か、各モードの質量の特徴に関して注意深く調べる。

6.1.1 スカラー場の模型

本論では、Hassan らの導出した高階微分模型がどのような意味で bigravity と等価であるのか明確にするために、スカラー場のトイモデルを考える。一般に質量の混合を持つ 2 つのスカラー場の相互作用系、

$$S_0[\phi, \psi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi + \psi)^2 - kV(\phi, \psi) \right] \quad (6.1.1)$$

を考えよう。ここで、混合質量の表示を与えたのは、bigravity の力学変数 $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ の $c^2 g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}$ 周りの摂動 $\delta g, \delta f$ が一般に質量の混合を持つことからのアナロジーである。また、 $V(\phi, \psi)$ は微分を含まず、場に関する 3 次以上の項を含むものとする。この仮定も bigravity で $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$ が微分相互作用を持たないことのアナロジーであると共に、 ψ の代数解を求める上で必要となる仮定である。より一般には ϕ, ψ の微分自己相互作用を考えるべきであるが、ここでは簡単のため線形項にのみ微分が入った模型を考える。

作用 (6.1.1) の線形項は、変数変換

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \quad (6.1.2)$$

によって対角化され、

$$S_0[\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]|_{\text{linear}} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \xi (\square - 2m^2) \xi + \frac{1}{2} \eta \square \eta \right] \quad (6.1.3)$$

となる。したがって、この模型には質量 0、質量 $2m^2$ のスカラー場が 1 つずつ含まれる。

作用 (6.1.1) を ϕ について変分した方程式は、

$$\frac{\delta S_0}{\delta \phi} = (\square - m^2)\phi - m^2\psi - k \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \phi} = 0 \quad (6.1.4)$$

となる。この方程式は、 ψ の微分を含まないので、 ψ について代数的に解くことができる。一般には ψ についての多項式なので、この方程式には ψ の幂数に応じた解が存在する。すなわち、 $\phi = 0$ の時の $\psi = \text{const}$ の代数解、真空期待値に応じた解が存在する。これが bigravity で各 c に応じた真空周りの摂動解を求めることに対応する。今混合質量項が存在することから、必ず $\phi = 0 = \psi$ を真空に持つ解が存在する。そこでその解を $\psi[\phi]$ と表し、専らこの解に関する議論を行う。この仮定の下では、 $\psi[\phi]$ の ϕ に関する 1 次の項は、一般に、

$$m^2 \psi[\phi] = (\square - m^2)\phi + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (6.1.5)$$

の形で表される。

Hassan らの導出した高階微分重力理論は、この代数解を作用に再代入したものの $S_0[\phi, \psi[\phi]]$ に対応し、その線形項を書き下すと、

$$S_0[\phi, \psi[\phi]] = \int d^D x \left[\frac{1}{2m^4} \phi \square (\square - 2m^2) (\square - m^2) \phi + \mathcal{O}(\phi^3) \right] \quad (6.1.6)$$

となる。よって、こちらの模型には、元の模型に含まれていた質量 0、質量 $2m^2$ のモードに加えて、質量 m^2 の余剰なモードが含まれていることが分かる。次章で、線形項を 2 階微分に直すことで、各モードが ghost か否かを判定しよう。

6.1.2 スペクトラム

$S_0[\phi, \psi[\phi]]$ に補助場を導入して線形部分を対角化することを考えよう。まず、ラグランジュ未定乗数を導入することで、

$$S_0[\phi, \psi[\phi]] \longrightarrow S[\phi, \psi, \lambda] \equiv S_0[\phi, \psi] + m^2 \int d^D x \lambda (\psi - \psi[\phi]) \quad (6.1.7)$$

と分解できる。ここで、 λ の前の係数 m^2 は、単に便宜上取っただけであり、どのようにとっても dynamics に影響しない。 $\psi[\phi]$ の一般形は (6.1.5) で与えられるので、 $S[\phi, \psi, \lambda]$ の線形項のみ取り出して書けば、

$$\begin{aligned} S[\phi, \psi, \lambda]|_{\text{linear}} &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi + \psi)^2 + \lambda (m^2 \psi - (\square - m^2) \phi) \right] \\ &= S_0[\phi, \psi]|_{\text{linear}} - \int d^D x \lambda(x) \frac{\delta S_0[\phi, \psi]|_{\text{linear}}}{\delta \phi(x)} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

上式の最終行から即座にわかるように、変数変換 $\phi \longrightarrow \phi + \lambda$ を行うことで、未定乗数項を消すことができる。すなわち、

$$S[\phi + \lambda, \psi, \lambda]|_{\text{linear}} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi + \psi)^2 - \frac{1}{2} \lambda (\square - m^2) \lambda \right] \quad (6.1.9)$$

となる。この表式から λ は質量 m^2 の ghost であることが分かる。一方で、 ϕ, ψ の項は元の理論の線形項と完全に一致するため正常な場であることが分かる。実際、変数変換

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \quad (6.1.10)$$

を施せば、完全に対角的な表示、

$$S[\phi(\xi, \eta) + \lambda, \psi(\xi, \eta), \lambda]|_{\text{linear}} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \xi (\square - 2m^2) \xi + \frac{1}{2} \eta \square \eta - \frac{1}{2} \lambda (\square - m^2) \lambda \right] \quad (6.1.11)$$

を得ることができ、質量 $2m^2$ の正常な場 ξ 、質量 0 の正常な場 η に加えて、質量 m^2 の ghost 場 λ を含むことが分かる。よって、もともとの作用 $S_0[\phi, \psi]$ に含まれていたモードは正常であり、代入操作によって新たに生じたモードは ghost であることが分かる。今後、最終表式 (6.1.11) における ξ, η を「物理的な場」と呼ぶことにする。

6.2 具体例と散乱振幅の一致

ここでは、具体的なポテンシャル $V(\phi, \psi)$ を与え、作用 $S_0[\phi, \psi[\phi]]$ で記述される高階微分理論の散乱振幅を計算する。また、この節以降の議論はすべてツリーレベルにおける議論であり、ルー

プレレベルの解析は全く考慮していない。これは、そもそも $S_0[\phi, \psi[\phi]]$ の導出には、運動方程式を用いており、元の作用とのループレベルでの対応は期待できないからである。

6.2.1 対応関係の予想

始めに結果を言うと、元の作用を対角化した理論 $S_0[\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]$ の散乱振幅は、前章最終表式 $S[\phi(\xi, \eta) + \lambda, \psi(\xi, \eta), \lambda] \equiv \bar{S}[\xi, \eta, \lambda]$ における物理的な場 ξ, η のみを外線に持つ散乱振幅に一致する。すなわち、両理論の散乱振幅間に関係式、

$$\begin{aligned} & \langle \xi(\vec{k}_1) \cdots \xi(\vec{k}_n) \eta(\vec{k}_{n+1}) \cdots \eta(\vec{k}_{n+m}); out | \xi(\vec{p}_1) \cdots \xi(\vec{p}_N) \eta(\vec{p}_{N+1}) \cdots \eta(\vec{p}_{N+M}); in \rangle_{S[\xi, \eta]} \\ & = \langle \xi(\vec{k}_1) \cdots \xi(\vec{k}_n) \eta(\vec{k}_{n+1}) \cdots \eta(\vec{k}_{n+m}); out | \xi(\vec{p}_1) \cdots \xi(\vec{p}_N) \eta(\vec{p}_{N+1}) \cdots \eta(\vec{p}_{N+M}); in \rangle_{\bar{S}[\xi, \eta, \lambda]} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

がツリーレベルで成り立つ。ここで、わざわざ散乱振幅の形で表したのは、両理論のグリーン関数は一致しないからである。外線を切って on-shell に置くことで、両理論の差は消え、散乱振幅が一致する。ここでは、天降り的に予想を与えたが、この関係を自然に発見する方法として、経路積分の等価な変形による手法を付録 B に与えた。また、付録 B では Hassan らが高階微分理論の ghost を取り除くことができると信じた根拠となった解析についても紹介している。

6.2.2 具体的計算

この節では、具体的な相互作用項の場合に、上で与えた予想が正しいことを、具体的な計算を通して確かめる。付録 B で証明した場合以外の場合として、マッシブの三次自己相互作用のみが存在する場合、

$$\begin{aligned} S[\xi, \eta] & = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \xi (\square - 2m^2) \xi + \frac{1}{2} \eta \square \eta - \mu \frac{\sqrt{2}}{3} \xi^3 \right] \\ & = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi + \psi)^2 - \frac{\mu}{3!} (\phi + \psi)^3 \right] \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

を考えよう。このときの相互作用項は確かに、非自明な場合 $V(\phi, \psi) \neq V_\phi(\phi) + V_\psi(\psi)$ の一例となっている。 ϕ 変分の運動方程式は、

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = (\square - m^2)\phi - m^2\psi - \frac{\mu}{2}(\phi + \psi)^2 = 0 \quad (6.2.3)$$

で与えられる。この方程式を ψ について解くと、

$$\psi[\phi] = \phi - \frac{m^2}{\mu} \pm \sqrt{\frac{m^4}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} \square \phi} \quad (6.2.4)$$

となる。このうち、+ は $\phi = 0$ かつ $\psi = 0$ の真空周りの ψ を表し、- は $\phi = 0$ かつ $\psi = -\frac{2m^2}{\mu^2}$ の真空周りの摂動解を表す。この真空周りの摂動は不安定であるので、相対符号が + の場合のみ

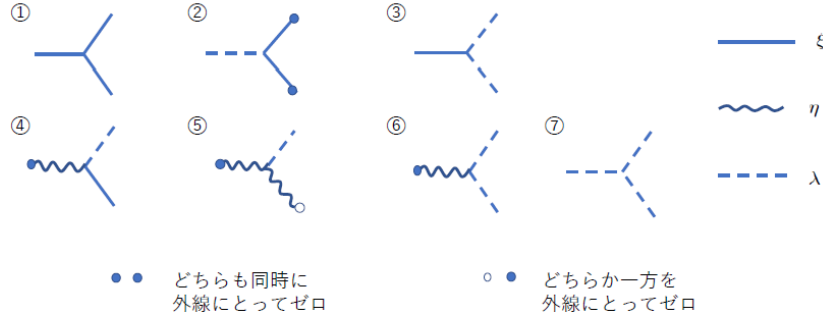


図 6.1 3 次相互作用項

考えよう。このとき、 $\sqrt{}$ を μ について展開すれば、

$$m^2\psi[\phi] = (\square - m^2)\phi - \frac{\mu}{2m^4}(\square\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2m^8}(\square\phi)^3 + \mathcal{O}(\mu^3) \quad (6.2.5)$$

を得る。これを作用に代入すれば、高階微分理論が得られる。しかし、ここでは高階微分理論の具体形は与えない。グリーン関数の計算は高階微分理論でおこなっても、補助場分解して行っても同じなので、二階微分の作用 $\bar{S}[\xi, \eta, \lambda]$ で計算した方が楽だからである。また、物理的な場と ghost 場がどのように相互作用しているのかも視覚的に分かりやすい。

$\bar{S}[\xi, \eta, \lambda]$ の場に関する線形項を $\bar{S}^{(2)}[\xi, \eta, \lambda]$ 、 n 次相互作用項を $\bar{S}^{(n)}[\xi, \eta, \lambda]$ と表すことにし、場に関する 4 次まで書き下すと、

$$\begin{aligned} \bar{S}^{(2)}[\xi, \eta, \lambda] &= \int d^Dx \left[\frac{1}{2}\xi(\square - 2m^2)\xi + \frac{1}{2}\eta\square\eta - \frac{1}{2}\lambda(\square - m^2)\lambda \right], \\ \bar{S}^{(3)}[\xi, \eta, \lambda] &= \int d^Dx \left[-\frac{\sqrt{2}}{3}\mu\xi^3 + \frac{\mu}{4m^2}\lambda\{(\square\xi)^2 - 4m^4\xi^2\} + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\lambda\{\square\xi\square\lambda - m^4\xi\lambda\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{4m^4}\lambda\{2\square\xi + \square\eta + 2\sqrt{2}\square\lambda\}\square\eta - \frac{\mu}{3!}\lambda^3 + \frac{\mu}{2m^4}\lambda(\square\lambda)^2 \right], \\ \bar{S}^{(4)}[\xi, \eta, \lambda] &= \int d^Dx \left(-\frac{\mu^2}{2m^8} \right) \lambda \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(\square\xi + \square\eta)^3 + \frac{3}{2}(\square\xi + \square\eta)^2\square\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{2}}(\square\xi + \square\eta)(\square\lambda)^2 + (\square\lambda)^3 \right] \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

となる。3 次相互作用項の種類を、上式の項の順に、ファインマン図として図 6.1 に示した。第一項目 (図 6.1 の①) ξ^3 相互作用項は、元の理論の相互作用項である。(6.2.1) が成立するためには、Physical-Physical 散乱にこの項以外の vertex からの寄与がなければ十分である。さらに、①以外の vertex は、4 点次以上の高次項も含めて必ず ghost を含む (なぜなら、 $\bar{S}^{(n)}$, $n \geq 4$ の項はすべてラグランジュ未定乗数項からの寄与だからである)。つまり①以外の vertex の寄与があることは、中間状態に ghost が飛ぶことを意味するので、(6.2.1) が成立する十分条件は、外線がすべて物理的な場である散乱振幅には、中間状態に ghost 場が飛ぶファインマン図からの寄与がないことである。この十分条件が成り立っていることを確かめるためには、理論に含まれる任意の vertex の

作用によって、ghost 数を減らすことができないことを示せば十分である。その理由と正確な意味は次のように考えれば自明だろう。初期状態が物理的な場であるとき、任意の vertex の何度かの作用によって図 6.2 左のようなグラフを得たとする。ここで、実線の内のいくつかが初期の物理的状態であり、その他の実線と破線が vertex の作用によって得られたものとみなそう。このグラフから、さらに vertex を作用して外線がすべて物理的な場となるファインマン図 (図 6.2 右) を得ようとしたとき、必ず ghost 数を減らさなければならない。今、すべての操作は任意であるとしているので、この操作によってすべての ghost を内線を含むファインマン図を表現できている。したがって、もし、ghost 数を減らすような vertex が存在しなければ、内線に ghost が飛ぶファインマン図を得ることはできない。

3 次の相互作用項では、図 6.1 の番号で言うと②、④、⑤の vertex が ghost 数を減らすことができる。面白いことに、 $\bar{S}[\phi, \psi, \lambda]$ において、これらの項は物理的な場を外線に取ったとき 0 となる。例えば、②を表す

$$\frac{\mu}{4m^2} \lambda \{(\square\xi)^2 - 4m^4\xi^2\} \quad (6.2.7)$$

は、 ξ を二つとも外線に取るとき、 $\square \rightarrow 2m^2$ と置き換わるため、0 になることが分かる。同様に、④と⑤もまた η の on-shell 条件の下で 0 となることが分かる。このことを強調するために、図 6.1 の vertex に点を付した。図 6.1 で同色の点を付された線は、「点を付された線すべてを同時に外線に取ると 0 となる」という意味である。この性質によって、項 (6.2.7) を用いてゼロでない物理的散乱振幅を作ることは、少なくとも 5 点以下の図では不可能となる。0 となるか否かが非自明なのは、6 点のダイアグラムである。このオーダーでは、図 6.3 の (a) のような物理的な場を on-shell、ghost を off-shell に置いたゼロでないダイアグラムを作ることができるため、図 6.4 の (f) のダイアグラムは on-shell 条件のもとで生き残り得る。したがって、このようなダイアグラムが物理的散乱振幅に寄与する恐れがある。しかしながら、このオーダーでは、 $\bar{S}^{(4)}$ に含まれる項、

$$\left(-\frac{\mu^2}{2m^8}\right) \lambda \frac{1}{2\sqrt{2}} (\square\xi)^3 \quad (6.2.8)$$

からの寄与が無視できない。面白いことに、図 6.3 の (a) と (b) のダイアグラムの和は、物理的な場を on-shell、ghost を off-shell に置いたときに相殺することが示される。したがって、これらのダイアグラムの和は (c) のようなダイアグラムとみなせる。このことから、on-shell 条件のもとで、図 6.4 のすべてのダイアグラムの和は互いに相殺し、0 となることが分かる。このように、より低次のダイアグラムから構築されるゼロでないダイアグラムは、より高次項からの寄与と互いに相殺する構造が成り立っていることが期待される。次の章で、一般の非微分相互作用項に対して、摂動に関して任意のオーダーで、この予想が成り立っていることを証明する。

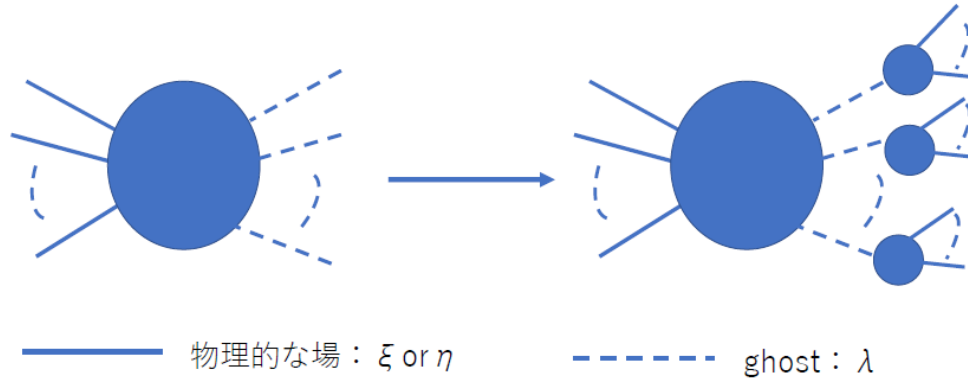


図 6.2 ghost 数を減らす操作

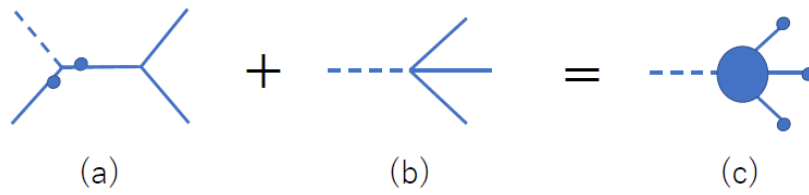


図 6.3 0 でない diagram の和

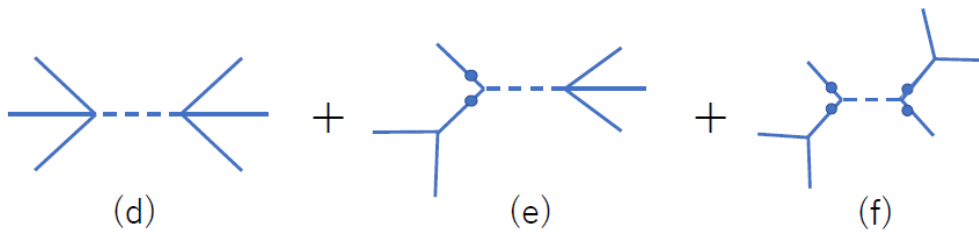


図 6.4 ghost が内線に飛ぶグラフの物理的散乱への寄与

6.3 一般証明

前章までに、 $S_0[\phi, \psi[\phi]]$ のモードを特定し、具体的計算を通して元の理論 $S_0[\phi, \psi]$ との散乱振幅の関係性に関する示唆が得られた。この章では、一般の非微分相互作用項 $V(\phi, \psi)$ に対する議論を行い、関係式 (6.2.1) が摂動パラメータ k の全次数で成り立つことを証明することを目的とする。

6.3.1 一般の代数解

まずは、本節で一般の $V(\phi, \psi)$ に対する $\psi[\phi]$ を摂動の4次まで導こう。全次数の一般解は、次々章で導出する。

非微分相互作用のみを持つ作用、

$$S_0 = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi + \psi)^2 - kV(\phi, \psi) \right] \quad (6.3.1)$$

を考える。ここで、 $V(\phi, \psi)$ は場の三次以上を含む全く一般の非微分相互作用項である。この理論の ϕ 変分の運動方程式、

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_0}{\delta \phi} &= (\square - m^2) \phi - m^2 \psi - kV^{1,0}(\phi, \psi) = 0, \\ V^{n,m}(\phi, \psi) &\equiv \frac{\partial^{n+m} V(\phi, \psi)}{\partial^n \phi \partial^m \psi} \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

を、結合定数 k を摂動パラメータとし、 $\phi = 0 = \psi$ の真空周りで、 ψ について代数的に解くことを考える。すなわち、摂動解の形を、

$$m^2 \psi[\phi] = m^2 \psi_0[\phi] + F[\phi], \quad m^2 \psi_0[\phi] \equiv (\square - m^2) \phi, \quad F[\phi] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k^n F^{(n)}[\phi] \quad (6.3.3)$$

と仮定し、 $F[\phi]$ を決定する。(6.3.3) を (6.3.2) に代入して k の冪について整理すれば、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{k}F[\phi] &= V^{1,0} \left(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{1}{m^2}F[\phi] \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{1,n}(\phi, \psi_0[\phi])}{n!} \left(\frac{F[\phi]}{m^2} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \frac{V^{1,n}(\phi, \psi_0[\phi])}{n!} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} F^{(k_1)}[\phi] \dots F^{(k_n)}[\phi] k^{k_1+\dots+k_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \frac{V^{1,n}(\phi, \psi_0[\phi])}{n!} \sum_{N=1}^{\infty} k^N \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_n \leq N-n+1} F^{(k_1)}[\phi] \dots F^{(k_n)}[\phi] \delta_{k_1+\dots+k_n, N} \\
&= V^{1,0}(\phi, \psi_0) + \sum_{N=1}^{\infty} k^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{m^{2n}} \frac{V^{1,n}(\phi, \psi_0[\phi])}{n!} \sum_{s_1=1}^{N-n+1} F^{(s_1)}[\phi] \sum_{s_2=1}^{N-n+1-s_1} F^{(s_2)}[\phi] \dots \\
&\quad \sum_{s_{n-1}=1}^{N-n-s_1-s_2-\dots-s_{n-2}} F^{(s_{n-1})}[\phi] F^{(N-n+1-s_1-s_2-\dots-s_{n-1})}[\phi] \\
&= V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi]) + \sum_{N=1}^{\infty} k^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{m^{2n}} \frac{V^{1,n}(\phi, \psi_0[\phi])}{n!} \\
&\quad \times \left[\prod_{i=1}^{n-1} \sum_{s_i=1}^{N-n+1-\sum_{k=1}^{i-1} s_k} F^{(s_i)}[\phi] \right] F^{(N-n+1-\sum_{k=1}^{n-1} s_k)}[\phi] \tag{6.3.4}
\end{aligned}$$

を得る。左辺も冪展開して両辺を比較することで、漸化式

$$\begin{aligned}
F^{(1)} &= -V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi]), \\
F^{(N+1)} &= -\sum_{n=1}^N \frac{1}{m^{2n}} \frac{V^{1,n}(\phi, \psi_0[\phi])}{n!} \left[\prod_{i=1}^{n-1} \sum_{s_i=1}^{N-n+1-\sum_{k=1}^{i-1} s_k} F^{(s_i)}[\phi] \right] F^{(N-n+1-\sum_{k=1}^{n-1} s_k)}[\phi] \tag{6.3.5}
\end{aligned}$$

を得る。低次の項を具体的に書き下せば、

$$\begin{aligned}
F^{(1)}[\phi] &= -V_0^{1,0}, \\
F^{(2)}[\phi] &= \frac{1}{m^2} V_0^{1,0} V_0^{1,1}, \\
F^{(3)}[\phi] &= -\frac{1}{m^4} V_0^{1,0} \left[\left(V_0^{1,1} \right)^2 + \frac{1}{2} V_0^{1,2} V_0^{1,0} \right], \\
F^{(4)}[\phi] &= \frac{1}{m^6} V_0^{1,0} \left[\left(V_0^{1,1} \right)^3 + \frac{3}{2} V_0^{1,0} V_0^{1,1} V_0^{1,2} + \frac{1}{6} \left(V_0^{1,0} \right)^2 V_0^{1,3} \right] \tag{6.3.6}
\end{aligned}$$

となる。ただし、ここで見やすさのために $V^{n,m}(\phi, \psi_0[\phi]) \equiv V_0^{n,m}$ と表した。

6.3.2 ゴースト線形項の消去

この節では、任意の非微分相互作用項を持つ理論で、 $V(\phi, \psi)$ 対応関係 (6.2.1) が成り立っていることを、摂動の低次に関して確かめる。既に 6.2.2 章で見たように、対応関係 (6.2.1) が成り立つための十分条件は、 λ に関する 1 次の項が on-shell 条件の下でゼロになる事であった。そこでこの節では、場の再定義によって、 λ に関する 1 次の項を消去することを考える。

亀淵-O’Raifeartaigh-Salam の定理 [26] より、力学変数を ϕ から新たに ϕ' に変えたとき、以下の関数形を満たせば散乱振幅は不変である。

$$\phi' = c\phi + u[\phi, \psi, \lambda] \quad (6.3.7)$$

ただし、 c はゼロでない定数であり、 $u[\phi, \psi, \lambda]$ は場に関して 2 次以上の項で、一般に場の任意回の微分を含んでよい。この条件さえ満たせば、散乱振幅は不変である。したがって、対応関係 (6.2.1) が成り立つための十分条件は、(以下の (6.3.9) を除く) すべての変数変換が条件 (6.3.7) を満たすことを示せばよい。

前節で導いた摂動解をもとの作用に代入し、ラグランジュ未定乗数で分解した作用を考える。

$$\begin{aligned} S_1[\phi_1, \psi, \lambda] &\equiv \int d^D x \left[\frac{1}{2} \phi_1 \square \phi_1 + \frac{1}{2} \psi \square \psi - \frac{m^2}{2} (\phi_1 + \psi)^2 - kV(\phi_1, \psi) + \lambda(m^2 \psi - m^2 \psi_0[\phi_1] - F[\phi_1]) \right] \\ &= S_0[\phi_1, \psi] + \int d^D x \left[\lambda(m^2 \psi - m^2 \psi_0[\phi_1] - F[\phi_1]) \right] \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

ここで、 ϕ と作用を数列化するために添え字「1」を付した。以前見たように、変数変換、

$$\phi_1 = \phi_2 + \lambda \quad (6.3.9)$$

によって、2 次の λ - ψ , ϕ_1 混合項は消去される。 λ に関する 2 次以上の項には興味がないので、 λ に関して 1 次の項のみ書き下せば、

$$\begin{aligned} S_2[\phi_2, \psi, \lambda] &\equiv S_1[\phi_1, \psi, \lambda] = S_0[\phi_2, \psi] + \int d^D x \lambda \left[-kV^{1,0}(\phi_2, \psi) + F[\phi_2] \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= S_0[\phi_2, \psi] + \int d^D x \lambda \left[-k \left(V^{1,0}(\phi_2, \psi) + F^{(1)}[\phi_2] \right) - \sum_{n=2}^{\infty} k^n F^{(n)}[\phi_2] \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

となる。ここで、第二項の $V^{1,0}(\phi_2, \psi)$ は S_1 からの寄与であり、 k に関して 1 次である。そこで、 $F[\phi_2]$ から k に関する 1 次の項を取り出して書き下した。これらの項から、摂動パラメータの最低次の項が on-shell で消えることが分かる。前節の結果から $F^{(1)}[\phi_2] = -V^{1,0}(\phi_2, \psi_0[\phi_2])$ なので、 k に関する 1 次の項は、

$$-k\lambda \left(V^{1,0}(\phi_2, \psi) - V^{1,0}(\phi_2, \psi_0[\phi_2]) \right) \quad (6.3.11)$$

となり、両項間には引数が ψ か $\psi_0[\phi_2]$ かの違いしかない。今、線形項はすでに λ と ϕ_2, ψ が分離しているため、 $m^2 \psi = m^2 \psi_0[\phi_2] = (\square - m^2)\phi_2$ は $k = 0$ の時の ϕ_2 変分の運動方程式の解、すな

わち on-shell 条件である。したがって、この項から散乱振幅への寄与は、Physical な場 ϕ_2, ψ を外線に取ったとき 0 となる。これはまさに、 ξ^3 模型で Physical な場を外線に取ることで消えた項

$$\frac{\mu}{4m^2} \lambda \{(\square\xi)^2 - 4m^4\xi^2\} \quad (6.3.12)$$

に対応する。今 $V^{1,0}(\phi, \psi)$ は場の 3 次以上であることを仮定しているので、この時点で、「5 点以下で内線に ghost を含む diagram が、Physical な散乱へ寄与しないこと」が、全く一般の非微分相互作用項 V に対して証明されたことになる。

話はこれで終わりではない。(6.3.11) を、さらなる変数変換によって消去することができる。(6.3.11) が on-shell 条件 $\psi = \psi_0[\phi_2]$ のもとで 0 になることは、この項は $(\psi - \psi[\phi_2])$ で因数分解できることを表している。例えば、 $V^{1,0}(\phi_2, \psi)$ を $\psi = \psi_0[\phi_2]$ 周りで展開すれば、leading 項は相殺するので、明らかに $(\psi - \psi_0[\phi_2])$ で因数分解できる。 $(\psi - \psi_0[\phi_2])$ は ϕ_2 変分の運動方程式の線形項なので、 ϕ_2 の変数変換によってこの項を消去可能である。実際、変数変換

$$\phi_2 = \phi_3 + \lambda u[\phi_3, \psi] \quad (6.3.13)$$

を施してみれば、元の作用 S_0 からの寄与は

$$S_0[\phi_2 = \phi_3 + \lambda u[\phi_3, \psi], \psi] - S_0[\phi_3, \psi] = - \int d^D x [m^2(\psi - \psi_0[\phi_3]) + kV^{1,0}(\phi_3, \psi)] \lambda u[\phi_3, \psi] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (6.3.14)$$

である。その他の項は、 λ の 2 次以上への寄与しかしない。したがって、

$$u[\phi_3, \psi] = - \frac{k}{m^2} \frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta\psi}, \quad \Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi) \equiv V^{1,0}(\phi_3, \psi) - V^{1,0}(\phi_3, \psi_0[\phi]), \quad \Delta\psi \equiv \psi - \psi_0[\phi] \quad (6.3.15)$$

と選べば、ちょうど k の 1 次の項が相殺できることが分かる。ここで、(6.3.15) は形式的に $\Delta\psi$ の割り算として定義されているが、 $\Delta V(\phi, \psi)$ が $\Delta\psi$ に比例するために、実際は場に関する正幂の多項式であることに注意されたい。この性質より、(6.3.15) による変数変換は条件 (6.3.7) を満たすため、この変換の下で散乱振幅は不変に保たれることが分かる。

また、今後のために演算子 Δ を一般の関数に対して定義しておこう。一般の関数 $f(\psi)$ に対して、演算子 Δ を、

$$\Delta f(\psi) \equiv f(\psi) - \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} f(\psi) \quad (6.3.16)$$

で定義する。(6.3.15) の $\Delta V^{1,0}(\phi, \psi)$ や $\Delta\psi$ は確かにこの定義を満たしている。

何度も ϕ_n の変数変換を行うことを考慮して、極限を取る $\psi_0[\phi]$ 中の引数 ϕ は、その時々で採用している力学変数 ϕ_n で定義されているものとする。つまり、正確には Δ_n と添え字を付して、

$$\Delta_n f(\psi) \equiv f(\psi) - \lim_{\psi \rightarrow \psi_0[\phi_n]} f(\psi) \quad (6.3.17)$$

と定義すべきであるが、今後、 n は省略する。実際、この n の違いは、今後出てくる興味ある式のすべてにおいて、 λ の 2 次以上の項に押し付けられるので、あまり気にする必要はない。

変数変換 (6.3.13) の後、作用は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
S_3[\phi_3, \psi, \lambda] &\equiv S_2[\phi_2 = \phi_3 + \lambda u[\phi_3, \psi], \psi, \lambda] \\
&= S_0[\phi_3, \psi] + \int d^D x \left[\frac{\lambda k^2}{m^2} \left[V^{1,0}(\phi_3, \psi) \frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta \psi} - m^2 F^{(2)}[\phi_3] \right] \right. \\
&\quad \left. - \lambda \sum_{n=3}^{\infty} k^n F^{(n)}[\phi_3] + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \tag{6.3.18}
\end{aligned}$$

前節の結果より、 $m^2 F^{(2)}[\phi_3] = V^{1,0}(\phi_3, \psi_0[\phi_3]) V^{1,1}(\phi_3, \psi_0[\phi_3])$ なので、 k^2 に比例する項は、

$$\frac{\lambda k^2}{m^2} \left[V^{1,0}(\phi_3, \psi) \frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta \psi} - V^{1,0}(\phi_3, \psi_0[\phi_3]) V^{1,1}(\phi_3, \psi_0[\phi_3]) \right] \tag{6.3.19}$$

となる。ここで、再び、注目すべきことが起こる。この式の第一項は、on-shell 条件である $\psi \rightarrow \psi_0[\phi_3]$ 極限で、 $\frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta \psi}$ が、 $\psi = \psi_0[\phi_3]$ における微分係数となるため、第二項と相殺する。すなわち、今の変数の選び方においては、前回より2次上の7点関数まで、ghost が内線を飛ばす diagram が Physical な散乱振幅に寄与しないことが証明される。

さらに、第二項が第一項の on-shell 極限であることから、この項は上で定義した Δ を用いて表すことができる。すなわち、

$$\left[V^{1,0}(\phi_3, \psi) \frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta \psi} - V^{1,0}(\phi_3, \psi_0[\phi_3]) V^{1,1}(\phi_3, \psi_0[\phi_3]) \right] = \Delta \left[V^{1,0}(\phi_3, \psi) \frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta \psi} \right] \tag{6.3.20}$$

のようにシンプルな形で書き表すことができる。ここで全体の Δ は $\Delta \phi$ に対しても作用すべきものであることに注意しておこう。一方で $\frac{\Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi)}{\Delta \psi}$ の分母の Δ は $V^{1,0}$ にのみかかっているもので、正確には $V^{1,0}$ に Δ を演算したのちに $\Delta \psi$ で割っている。つまり正確には、

$$\text{右辺} = \Delta \left[V^{1,0}(\phi_3, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta V^{1,0}(\phi_3, \psi) \right] \tag{6.3.21}$$

である。

k^2 の項も on-shell で0であることが分かったため、この項も運動方程式の線形項に比例することとなり、変数変換で消去可能である。変数変換を行えば、元の作用のポテンシャルから k^3 の寄与が得られ、 $F^{(3)}$ と on-shell で相殺するといったことが起こり、結局、この構造が k の任意のオーダーで逐次的に続くことが期待される。次節でこれを証明しよう。

6.3.3 一般項と数学的帰納法

前節では摂動パラメータ k の低次項に関して、適切な変数変換を施すことで λ の1次の項を消去できることを見た。この節では、摂動の任意のオーダーで、 λ の1次の項を消去できることを示す。つまり、前節の結果から類推される各変数変換、作用、 $F^{(n)}$ の関数形などの一般項を書き下

し、数学的帰納法によって証明することを目標とする。前節の結果から類推される一般項は、

$$S_n[\phi_n, \psi, \lambda] = S_0[\phi_n, \psi] + \int d^D x \left[(-1)^{n+1} \frac{k^{n-1}}{m^{2n-4}} \lambda \Delta \left(V^{1,0}(\phi_n, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta \right)^{n-2} V^{1,0}(\phi_n, \psi) - \lambda \sum_{m=n}^{\infty} k^m F^{(m)}[\phi_n] \right] + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (n \geq 2), \quad (6.3.22)$$

$$\phi_n = \phi_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1} k^{n-1}}{m^{2n-2}} \lambda \frac{1}{\Delta \psi} \Delta \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta \right)^{n-2} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi), \quad (n \geq 2), \quad (6.3.23)$$

$$F^{(n)}[\phi] = \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} \frac{(-1)^n}{m^{2n-2}} \left(V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi, \psi), \quad (n \geq 1) \quad (6.3.24)$$

である。ここで、演算子 Δ は、より右にあるすべての ψ の関数に対して作用するものとする。例えば、

$$\begin{aligned} \left(V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta \right)^2 V^{1,0}(\phi, \psi) &= V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta V^{1,0}(\phi, \psi) \\ &= V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \Delta V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} (V^{1,0}(\phi, \psi) - V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi])) \\ &= V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} \left[V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta \psi} (V^{1,0}(\phi, \psi) - V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi])) \right. \\ &\quad \left. - V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi]) V^{1,1}(\phi, \psi_0[\phi]) \right] \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

である。また、証明には直接関係ないが上式を具体的にチェックするときに重要なことを注意しておこう。二つ以上の $(1/\Delta\psi)\Delta$ を含む式の on-shell 極限は、 $(1/\Delta\psi)\Delta$ を通常の微分 $d/d\psi$ に置き換えたものには一致しない。その n 階微分は、

$$\lim_{\psi \rightarrow \psi_0} \left(\frac{1}{\Delta \psi} \Delta \right)^n f(\psi) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n f(\psi)}{d\psi^n} \right]_{\psi=\psi_0} \quad (6.3.26)$$

となり、因子 $1/n!$ だけ異なる。これと、有限微分に関するライプニッツルール

$$\frac{1}{\Delta \psi} \Delta (f(\psi)g(\psi)) = \left(\frac{1}{\Delta \psi} \Delta f(\psi) \right) \left(\lim_{\psi \rightarrow \psi_0} g(\psi) \right) + \left(\lim_{\psi \rightarrow \psi_0} f(\psi) \right) \left(\frac{1}{\Delta \psi} \Delta g(\psi) \right) \quad (6.3.27)$$

を用いれば、(6.3.22)-(6.3.24) を具体的にチェックできる。

ϕ_n に関する漸化式 (6.3.23) は証明すべき式ではなく、むしろ S_n の汎関数形を定義する式である。すなわち $S_n[\phi_n, \psi, \lambda]$ という汎関数は、式 (6.3.10) で与えられる S_2 を初項として、漸化式 $S_{n-1}[\phi_{n-1}[\phi_n], \psi, \lambda] = S_n[\phi_n, \psi, \lambda]$ を満たす汎関数形の数列として定義されている。このように定義された S_n の一般項が (6.3.22) になることを示すには、 $F^{(n)}$ の一般項が (6.3.24) になることを用いることになるので、まず示すべきことは (6.3.24) である。実際は (6.3.24) さえ示せば、作用の方は簡単に証明できる。

$F^{(n)}$ の一般項の形を証明するには、前々節で求めた $F^{(n)}$ の漸化式に上記の一般項を代入すればよいような気がするが、この方法での計算は幾分困難であるため、ここでは別の方法で証明する。

$F = \sum_{n=1}^{\infty} k^n F^{(n)}$ の満たすべき方程式、

$$F[\phi] + kV^{1,0} \left(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{F[\phi]}{m^2} \right) = 0 \quad (6.3.28)$$

は Δ 変分を尊重した形で解くことができる。前回用いた漸化式は忘れて、この方程式を形式的に解きなおしてみよう。 $V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{1}{m^2}F)$ を形式的に、 k の 0 次とそれ以上の項に分けると、

$$\begin{aligned} F[\phi] &= -k \left[V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi]) + \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{F[\phi]}{m^2} \right) \right], \\ \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{F[\phi]}{m^2} \right) &\equiv V^{1,0} \left(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{F[\phi]}{m^2} \right) - \lim_{F \rightarrow 0} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0[\phi] + \frac{F[\phi]}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

と表せる。ここで用いた Δ は前節で用いたものと表記が異なるだけのものである。このとき、 $V^{1,0}(\phi, \psi_0[\phi])$ は k のゼロ次、 $\Delta V^{1,0}$ は k の 1 次以上の項となっている。よって、この時点で $F^{(1)}$ が決まる。このように、 Δ を用いて、 k に関する最低次数の項を分離することができる。 $\Delta V^{1,0}$ をさらに k の 1 次以上の項と 2 次以上の項に分離してみよう。しかし、このまま Δ を作用しても不変なので、次のようにする。

$$\begin{aligned} \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) &= \frac{F}{m^2} \frac{1}{F/m^2} \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \\ &= -\frac{k}{m^2} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \\ &= -\frac{k}{m^2} \left[\lim_{F \rightarrow 0} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

ここで、記号の簡略化のためにすべての $[\phi]$ 依存性を省略した。二行目の等号では、分子の F に関してのみ運動方程式 (6.3.28) を用いた。三行目で、 Δ を用いることで、第一項が k の 1 次、第二項が k の 2 次以上の項に分離されている。

このように、運動方程式と Δ による分離を行うことで、逐次的に最低次項とそれ以上の次数の項に分けていくことができる。上と同様にして、一般の漸化式

$$\begin{aligned} &\Delta \left\{ V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta \right\}^n V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \\ &= -\frac{k}{m^2} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta \left\{ V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta \right\}^n V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \\ &= -\frac{k}{m^2} \left[\lim_{F \rightarrow 0} \left\{ V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta \right\}^{n+1} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta \left\{ V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta \right\}^{n+1} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

が成り立つ。この漸化式を、逐次代入していくことで、結局、

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{F \rightarrow 0} \frac{(-k)^n}{m^{2n-2}} \left(V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \frac{1}{F/m^2} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0} \left(\phi, \psi_0 + \frac{F}{m^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} \frac{(-k)^n}{m^{2n-2}} \left(V^{1,0}(\phi, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi, \psi) \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

を得る。よって (6.3.24) の最下段の式が証明された。

ここまでで示せばあとは前節で行ったことを一般化すればよいだけである。(6.3.14) より即座にわかるように、変数変換 (6.3.23) の下で、(6.3.22) の $S_0[\phi_n, \psi]$ は

$$\begin{aligned} S_0[\phi_n, \psi] - S_0[\phi_{n+1}, \psi] &= - \int d^D x [m^2 \Delta\psi + kV^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi)] \\ &\quad \times \frac{(-1)^{n+1} k^{n-1}}{m^{2n-2}} \lambda \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-2} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \int d^D x \left[- \frac{(-1)^{n+1} k^{n-1}}{m^{2n-4}} \lambda \Delta \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-2} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{n+2} k^n}{m^{2n-2}} \lambda \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

となるので、 k が n 次、 λ が 1 次の項は相殺され、

$$\begin{aligned} S_{n+1}[\phi_{n+1}, \psi] &\equiv S_n[\phi_n[\phi_{n+1}], \psi] = S_0[\phi_{n+1}, \psi] \\ &\quad + \int d^D x \left[\frac{(-1)^{n+2} k^n}{m^{2n-2}} \lambda \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \right. \\ &\quad \left. - \lambda k^n F^{(n)}[\phi_{n+1}] - \lambda \sum_{m=n+1}^{\infty} k^m F^{(m)}[\phi_{n+1}] \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

となる。先に証明した (6.3.24) を用いれば、右辺第二項、第三項 (k^n の項) は、

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{n+2} k^n}{m^{2n-2}} \lambda \left[\left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) - \lim_{\psi \rightarrow \psi_0} \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+2} k^n}{m^{2n-2}} \lambda \Delta \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

となるので、結局

$$\begin{aligned} S_{n+1}[\phi_{n+1}, \psi] &= S_0[\phi_{n+1}, \psi] \\ &\quad + \int d^D x \left[\frac{(-1)^{n+2} k^n}{m^{2n-2}} \lambda \Delta \left(V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \frac{1}{\Delta\psi} \Delta \right)^{n-1} V^{1,0}(\phi_{n+1}, \psi) \right. \\ &\quad \left. - \lambda \sum_{m=n+1}^{\infty} k^m F^{(m)}[\phi_{n+1}] \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

を得る。よって、帰納法による証明が完了した。

証明が幾分複雑になったので、どのようにして予想 (6.2.1) が証明されたのかまとめておこう。作用 (6.3.22) は、無限に変数変換を繰り返した極限 $n \rightarrow \infty$ の下で、

$$S_\infty[\phi_\infty, \psi, \lambda] = S_0[\phi_\infty, \psi] + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (6.3.37)$$

となる。6.2 章の議論より、 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ の項は物理的散乱振幅に寄与しない。物理的散乱振幅に寄与できる唯一の項は、元の理論の相互作用項 $V(\phi, \psi)$ のみである。よって、このフレームにおいて、高階微分理論の物理的散乱振幅が、対応する元の理論の散乱振幅と一致することは明らかである。

さらに、漸近的フレーム (6.3.37) と初期フレーム (6.3.10) は、座標変換 (6.3.23) によって結びつけられている。座標変換 (6.3.23) は散乱振幅を不変に保つ条件 (6.3.7) を満たすため、初期フレーム (6.3.10) における散乱振幅は漸近的フレーム (6.3.37) における散乱振幅と一致する。

したがって、初期フレームにおける物理的散乱振幅は、元の理論の散乱振幅と一致することがわかる。予想 (6.2.1) は、初期フレーム (6.3.10) (或いは 6.1.2 章における (6.1.11)) において与えられているため、予想が正しいことが証明された。

6.4 まとめ

混合質量項のある 2 つのスカラー場が非微分相互作用する模型を用いて、Hassan らの提唱した高階微分理論を検証した。まずは、具体的な模型で、高階微分理論の Physical な粒子に関する散乱振幅と元の理論の散乱振幅に対応関係があることをみた。この関係を一般化するために、変数変換を用いて λ の 1 次の項を消去することを試み、摂動の全次数で消去できることを帰納的に証明した。

今回の解析の bigravity への拡張は、少なくとも変数変換で ghost に関する 1 次の項を消すことを、摂動の低次に関して行うことは可能であろう。実際、bigravity において、スカラー場の場合と同様の構造が存在することは、付録 C で簡単に確かめてある。一方で、その一般証明のためには、 g 変分運動方程式の f に関する一般解を導出する必要がある。スカラー場の場合と異なり、bigravity の運動方程式は行列の非線形方程式であるので、この一般解を求めることはより難易度が高くなることが想定される。

また、bigravity は一つの一般座標不変性を持つため、本来はゲージ固定をしなければならない。このゲージ固定と、高階微分理論を求める操作が可換かどうかを調べることも重要であろう。そのためには、やはり、より簡単な模型から始めるのがよいだろう。ちょうど適した模型として、pseudo-linear 模型がある。これは、Fierz-Pauli 模型に非微分自己相互作用項を加えた有限質量スピン-2 場の模型で、BDghost を出さないことが証明されている [27]。また、その曲がった時空上への拡張も行われている [28, 29, 30]。この模型を拡張して、二つの対称テンソル場を適切に相互作用させることで、一つの diffeomorphism を持たせ、massive spin-2, massless spin-2 の場を一つずつ持つ模型を簡単に作ることができる。これは、ちょうど具体例で取り扱った ξ^3 模型の spin-2 版である。この模型を用いて、ゲージ固定との可換性や spin-0 と spin-2 の場合での違いなどにつ

いて調べることも面白いだろう。

付録 A

$g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ の性質

この付録では $g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ の定義や便利な性質について列挙する。以下では、一般に $g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ の形で列挙するが、 $\eta^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ や $\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$ に関しても同様に定義されているものとし、同様の性質が成り立つ。

擬線形テンソル $g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ を、 n 個のメトリックの直積 $g^{\mu_1\nu_1}g^{\mu_2\nu_2}\cdots g^{\mu_n\nu_n}$ の ν_i についての反対称化として、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n &\equiv g^{\mu_1\nu_1}g^{\mu_2\nu_2}g^{\mu_3\nu_3}\cdots g^{\mu_n\nu_n} - g^{\mu_1\nu_2}g^{\mu_2\nu_1}g^{\mu_3\nu_3}\cdots g^{\mu_n\nu_n} + \cdots \\ &= \frac{-1}{(D-n)!} E^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n\sigma_{n+1}\cdots\sigma_D} E^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}_{\sigma_{n+1}\cdots\sigma_D} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで $E^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ は Levi-Civita 完全反対称テンソル密度 $\epsilon^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ を用いて以下のように定義される完全反対称テンソルである。

$$\begin{aligned} E^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} \\ \epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} &= \begin{cases} +1 & (\mu_1\mu_2\cdots\mu_D) \text{ が } (0123\cdots) \text{ の偶置換の場合} \\ -1 & (\mu_1\mu_2\cdots\mu_D) \text{ が } (0123\cdots) \text{ の奇置換の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

このように定義された擬線形テンソル $g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_n\nu_n$ は、 $i \neq j$ のとき、以下の様な足の対称性を持つ。

$$\begin{aligned} \mu_i &\longleftrightarrow \mu_j : \text{反対称} \\ \nu_i &\longleftrightarrow \nu_j : \text{反対称} \\ (\mu_i, \nu_i) &\longleftrightarrow (\mu_j, \nu_j) : \text{対称} \\ \{\mu_i\} &\longleftrightarrow \{\nu_i\} : \text{対称} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(A.1) の最下段の表式に注意すれば、 n 階擬線形テンソルのペア添え字 μ_n, ν_n について添え字の縮約を取ったものは、一階階数の低い $n-1$ 階擬線形テンソルに比例することがわかる。

$$g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1}\mu_n = (D-n+1)g^{\mu_1\nu_1}\cdots\mu_{n-1}\nu_{n-1} \quad (\text{A.4})$$

また n 階擬線形テンソルは、その定義 (A.1) から、 m 階、 $n - m$ 階の擬線形テンソルのテンソル積で以下のように展開できることも容易に理解できるだろう。

$$\begin{aligned} g^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n} &= \delta_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} g^{\mu_1\lambda_1} \cdots g^{\mu_n\lambda_n} \\ &= \delta_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \frac{1}{m!(n-m)!} g^{\mu_1\lambda_1\cdots\mu_m\lambda_m} g^{\mu_{m+1}\lambda_{m+1}\cdots\mu_n\lambda_n} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

例えば、

$$\begin{aligned} g^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} &= g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} + g^{\mu_1\nu_2} g^{\mu_2\nu_3\mu_3\nu_1} + g^{\mu_1\nu_3} g^{\mu_2\nu_1\mu_3\nu_2}, \\ g^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4} &= g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4} - g^{\mu_1\nu_2} g^{\mu_2\nu_1\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4} - g^{\mu_1\nu_3} g^{\mu_2\nu_2\mu_3\nu_1\mu_4\nu_4} - g^{\mu_1\nu_4} g^{\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_1}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

などである。

付録 B

経路積分による方法

この付録は、6.2.1 章で予想が与えられた後に読んでいただきたい。高階微分理論と元の理論の対応関係を探るために、ここでは、グリーン関数生成汎関数の等価な変形を考える。ここでの議論もすべてツリーレベルに限った議論を行う。ソース項 J_ϕ, J_ψ を導入したグリーン関数生成汎関数、

$$Z[J_\phi, J_\psi] = \int D\phi D\psi \exp \left[iS_0[\phi, \psi] + i \int d^D x (\phi J_\phi + \psi J_\psi) \right] \quad (\text{B.3})$$

を考える。場 ϕ に関して積分を実行すれば、

$$Z[J_\phi, J_\psi] = \int D\psi \exp \left[iS_0[\phi[\psi, J_\phi], \psi] + i \int d^D x (\phi[\psi, J_\phi] J_\phi + \psi J_\psi) \right] \quad (\text{B.4})$$

を得る。ここで、ツリーレベルにおける $\phi[\psi, J_\phi]$ は、 ϕ 変分の運動方程式

$$\frac{\delta S_0[\phi, \psi]}{\delta \phi} + J_\phi = 0, \quad (\text{B.5})$$

を、真空 $\phi = 0 = \psi$ 周りで ϕ に関して解いた摂動解として定義される。この真空の周りでは、(B.5) を ψ について解いた代数解のうち、条件 $\psi[\phi = 0, J_\phi = 0] = 0$ を満たす代数解 $\psi[\phi, J_\phi]$ を、 $\phi[\psi, J_\phi]$ の逆関数として定義できる。このとき、場の再定義 $\psi = \psi[\phi, J_\phi]$ を施せば、逆関数 $\psi[\phi, J_\phi]$ は恒等式 $\phi[\psi[\phi, J_\phi], J_\phi] = \phi$ を満たすため、以下の生成汎関数を得る。

$$Z[J_\phi, J_\psi] = \int D\phi \text{Det} \left[\frac{\delta \psi[\phi, J_\phi]}{\delta \phi} \right] \exp \left[iS_0[\phi, \psi[\phi, J_\phi]] + i \int d^D x (\phi J_\phi + \psi[\phi, J_\phi] J_\psi) \right] \quad (\text{B.6})$$

ラグランジュ未定乗数 λ と FP-ghost C, \bar{C} を導入すれば、

$$Z[J_\phi, J_\psi] = \int D\phi D\psi D\lambda DC D\bar{C} \exp \left[iS_0[\phi, \psi] + i \int d^D x \left(m^2 \lambda (\psi - \psi[\phi, J_\phi]) + i\bar{C} \frac{\delta \psi[\phi, J_\phi]}{\delta \phi} C + \phi J_\phi + \psi J_\psi \right) \right] \quad (\text{B.7})$$

を得る。ここで、記号の簡略化のため FP-ghost に関する積分を一つ省略した。指数部分は、作用 (6.1.7) に ϕ と ψ のソース項を付け加えたものとよく似ている。すこし異なるのは、 $\psi[\phi, J_\phi]$ の項

と FP-ghost 項である。これらの項には、 J_ϕ に関する非線形項が含まれており、一般の場合に関するこれ以上の解析は容易ではない。

そこで、相互作用項が特別な形 $V(\phi, \psi) = V_\phi(\phi) + V_\psi(\psi)$ をしている場合に限り、話を進めよう。この場合、運動方程式 (B.5) の代数解は以下のように表せる。

$$m^2\psi[\phi, J_\phi] = m^2\psi[\phi] + J_\phi, \quad \psi[\phi] \equiv \psi[\phi, 0] \quad (\text{B.8})$$

この解の表式を経路積分 (B.7) へ代入すれば、

$$\begin{aligned} Z[J_\phi, J_\psi] &= \int D\phi D\psi D\lambda DC D\bar{C} \exp \left[iS_0[\phi, \psi] \right. \\ &\quad \left. + i \int d^D x \left(m^2\lambda(\psi - \psi[\phi]) + i\bar{C} \frac{\delta\psi[\phi]}{\delta\phi} C + (\phi - \lambda)J_\phi + \psi J_\psi \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

を得る。ツリーレベルでは、この FP-ghost 項は結果としてグリーン関数に寄与しないので、今後は無視することにする。場の再定義 $\phi \rightarrow \phi + \lambda$ を施せば、

$$\begin{aligned} Z[J_\phi, J_\psi] &\approx \int D\phi D\psi D\lambda \exp \left[iS_0[\phi + \lambda, \psi] + i \int d^D x \left(m^2\lambda(\psi - \psi[\phi + \lambda]) + \phi J_\phi + \psi J_\psi \right) \right] \\ &= \int D\phi D\psi D\lambda \exp \left[iS[\phi + \lambda, \psi, \lambda] + i \int d^D x (\phi J_\phi + \psi J_\psi) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

を得る。ここで、 $S[\phi + \lambda, \psi, \lambda]$ は式 (6.1.7) で定義されたものであり、線形項は式 (6.1.9) で与えたように ghost 項が分離されている。また、等号 “ \approx ” は FP-ghost に関する項と積分記号を省略したという意味を表す。最後に場の再定義 (6.1.10) を施せば、グリーン関数間の関係式、

$$\begin{aligned} &\int D\xi D\eta \exp \left[iS_0[\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)] + i \int d^D x (\xi J_\xi + \eta J_\eta) \right] \\ &\approx \int D\xi D\eta D\lambda \exp \left[i\bar{S}[\xi, \eta, \lambda] + i \int d^D x (\xi J_\xi + \eta J_\eta) \right], \\ &J_\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (J_\phi + J_\psi), \quad J_\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (J_\phi - J_\psi) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

を得る。ここで、作用 $\bar{S}[\xi, \eta, \lambda]$ は式 (6.1.11) で与えたものである。これより、 $V(\phi, \psi) = V_\phi(\phi) + V_\psi(\psi)$ の場合は、予想 (6.2.1) がグリーン関数レベルで成り立つことが分かる。

しかしながら、その他の場合 $V(\phi, \psi) \neq V_\phi(\phi) + V_\psi(\psi)$ に、同様の関係性が成り立つか否かは自明ではない。これは、さきに述べたように、式 (B.7) における J_ϕ の非線形性が原因である。これらの項の存在は、グリーン関数へ余分な複合場の寄与を生む。予想 (6.2.1) を確かめるためには、オンシェル条件の下で、これらの複合場を含む項がすべてゼロとなることを示さなければならない。しかしながら、経路積分によるこれ以上の解析は続けない。その代わりに、本論では、ここで行ったものとは異なる解析によって予想 (6.2.1) を証明する。

ここで、上の議論を Hassan らの議論 [18] と比較してみよう。彼らもまた、ソース項を付け加えた理論 (B.3) を考察したが、彼らの解析はここで与えた積分による方法とは異なり、より発見的である。まず彼らは、線形の場合 $V(\phi, \psi) = 0$ に関して、運動方程式 (B.5) の代数解を実際に求

め、その代数解を元の作用 (B.3) に代入したもの、すなわちヤコビアンを無視した (B.6) の表式を考えた。そして、得られた高階微分理論の経路積分を実行し、得られたグリーン関数生成汎関数が元の理論のそれと等価であることを発見した。また彼らは、 $V(\phi, \psi) = V_\phi(\phi) + V_\psi(\psi)$ の場合に関しても同様の結果を得られることに言及している。このようにして、彼らは両理論の等価性に気づいた。したがって、彼らは、 $V(\phi, \psi) \neq V_\phi(\phi) + V_\psi(\psi)$ の場合に関する対応関係については示していない。このことが、本論において非線形の場合を考察する動機である。

付録 C

高階微分重力理論のゴースト除去可能性

スカラー場の場合は、S 行列要素を不変に保つ変数変換によって、ゴーストに関する 1 次の項を消去できた。この章では、Bigravity から得られる高階微分重力理論の場合に、ゴーストを除去できることを簡単に見る。簡単のため、 $\beta_0 = 0$ の場合の、 $S^\mu{}_\nu = \mathcal{O}(1/m^2)$ の解に限って解析を行う。スカラー場の例では、相互作用項の前に摂動パラメータ k を付したが、Bigravity の場合には $1/m^2$ を摂動パラメータとして扱うため、摂動パラメータのオーダー毎の除去にはならない。そのため、 $1/m^2$ のオーダーの異なる項が混ざった解析となるが、スカラー場と同様な構造があることが分かる。

$\beta_0 = 0$ の場合の bigravity の作用を、

$$M_g^{D-2} S_0[g, f] = M_g^{D-2} \int d^D x [\sqrt{-g} R(g) + \alpha^{D-2} \sqrt{-f} R(f) - 2m^2 \sqrt{-g} \sum_{n=1}^D \beta_n e_n(S)],$$

$$e_n(S) \equiv \frac{1}{n!} \delta^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} S^{\nu_1}_{\mu_1} S^{\nu_2}_{\mu_2} \dots S^{\nu_n}_{\mu_n}, \quad S^\mu{}_\nu \equiv \sqrt{g^{-1}} f^\mu{}_\nu, \quad S^\mu{}_\nu S^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu} f_{\nu\rho}$$
(C.6)

によって定義する。記号の簡略化のために、 M_g^{D-2} を除いた部分を S_0 とした。 g 変分の運動方程式は、

$$E_{\mu\nu}^g[g, f] \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_0[g, f]}{\delta g^{\mu\nu}} = G(g)_{\mu\nu} + m^2 \sum_{n=1}^{D-1} \beta_n Y_n(S)_{\mu\nu} = 0,$$

$$Y_n(S)_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{n!} g_{(\mu\nu)}^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \dots \mu_n \nu_n} S_{\mu_1 \nu_1} S_{\mu_2 \nu_2} \dots S_{\mu_n \nu_n},$$

$$S_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho} S^\rho{}_\nu$$
(C.7)

で与えられる。bigravity には 2 種のメトリック g, f が含まれるため、添え字の上げ下げの定義は一意ではないが、ここでは、すべての添え字を g メトリックを用いて上げ下げすることにする。今、 $\beta_0 = 0$ の仮定を置いているため、 $S_{\mu\nu}$ が $1/m^2$ に関して 1 次以上である解が存在する。すな

わち、 $1/m^2$ に関する展開形、

$$S_{\mu\nu}[g] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2} \right)^n S_{\mu\nu}^{(n)}[g] \quad (\text{C.8})$$

を満たす代数解が存在する。そこで、この解に限ってスカラー場の場合に見た性質が満たされているか確認してみよう。

この仮定の下で、(C.7) の S に関する代数解の低次項は、

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{(1)}[g] &= -\frac{1}{\beta_1} g_{\mu\nu}^{-1,\alpha\beta} G_{\alpha\beta}(g) \\ S_{\mu\nu}^{(2)}[g] &= -\frac{\beta_2}{2\beta_1} g_{\mu\nu}^{-1,\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} S_{\mu_1\nu_1}^{(1)}[g] S_{\mu_2\nu_2}^{(1)}[g] \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

で与えられる。ここで、 $g_{\mu\nu}^{-1,\alpha\beta}$ は、“対称化された”テンソル $g_{(\alpha\beta)}^{\rho\sigma}$ の逆行列として定義され、

$$g_{\mu\nu}^{-1,\alpha\beta} g_{(\alpha\beta)}^{\rho\sigma} \equiv \delta_{\mu}^{(\rho} \delta_{\nu}^{\sigma)} \quad (\text{C.10})$$

を満たすテンソルである。また、 $3 \leq n \leq D-1$ に関しても、項

$$S_{\mu\nu}^{(n)}[g] \supset -\frac{\beta_n}{n!\beta_1} g_{\mu\nu}^{-1,\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_n\nu_n} S_{\mu_1\nu_1}^{(1)}[g] \cdots S_{\mu_n\nu_n}^{(1)}[g] \quad (\text{C.11})$$

が含まれることも、容易にわかる。

この解を用いて、ラグランジュ未定乗数を導入した作用、

$$S[g, f, \lambda] \equiv S_0[g, f] + \beta_1 m^2 \int d^D x \sqrt{-g} \lambda^{\rho\sigma} [S_{\rho\sigma} - S_{\rho\sigma}[g]] \quad (\text{C.12})$$

を考えよう。右辺を $S^{(1)}$ まであらわに書けば、

$$\begin{aligned} S[g, f, \lambda] &= S_0[g, f] + \int d^D x \sqrt{-g} \lambda^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}^{-1,\alpha\beta} [\beta_1 m^2 g_{(\alpha\beta)}^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + G_{\alpha\beta}(g)] \\ &\quad - \beta_1 m^2 \int d^D x \sqrt{-g} \lambda^{\rho\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} S_{\rho\sigma}^{(n)}[g] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

となる。 $1/m^2$ に関して -1 次と 0 次の項、第一行目の第二項の被積分関数には、運動方程式 (C.7) の一部であることが分かる。そこで、

$$\begin{aligned} \beta_1 m^2 g_{(\alpha\beta)}^{\mu\nu} \Delta S_{\mu\nu} &\equiv \beta_1 m^2 g_{(\alpha\beta)}^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + G_{\alpha\beta}(g) \\ \iff \Delta S_{\mu\nu} &\equiv S_{\mu\nu} + \frac{1}{\beta_1 m^2} g_{\mu\nu}^{-1,\alpha\beta} G_{\alpha\beta}(g) \\ &= S_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} S_{\mu\nu}^{(1)}[g] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

と定義しよう。これは、スカラー場の例における運動方程式の線形部分、

$$m^2 \Delta \psi \equiv m^2 (\psi - \psi_0[\phi]) \equiv m^2 \psi - (\square - m^2) \phi \quad (\text{C.15})$$

に対応する。スカラー場の場合と同様に、 $\Delta S_{\mu\nu}$ に比例する項は、変数変換によって消去することができる。 $g^{\mu\nu}$ 表示の変数変換、

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \lambda^{\rho\sigma} u_{\rho\sigma}{}^{,\mu\nu}[g, f] \quad (\text{C.16})$$

の下で、運動方程式 (C.7) より、 $S_0[g, f]$ は、

$$\begin{aligned} S_0[g, f] &\longrightarrow S_0[g, f] + \int d^D x \sqrt{-g} \lambda^{\rho\sigma} u_{\rho\sigma}{}^{,\alpha\beta}[g, f] \left[\beta_1 m^2 g_{(\alpha\beta)}{}^{\mu\nu} \Delta S_{\mu\nu} + m^2 \sum_{n=2}^{D-1} \beta_n Y_n(S)_{\alpha\beta} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &\quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

と変換する。したがって、

$$u_{\rho\sigma}{}^{,\alpha\beta}[g, f] = -g_{\rho\sigma}^{-1, \alpha\beta} \quad (\text{C.18})$$

と取れば、 $\Delta S_{\mu\nu}$ に比例する項を消去することができ、変換後の作用は、

$$\begin{aligned} S[g, f, \lambda] &= S_0[g, f] - \int d^D x \sqrt{-g} \left[m^2 \lambda^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}^{-1, \alpha\beta} \sum_{n=2}^{D-1} \beta_n Y_n(S)_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 \lambda^{\rho\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^{2(n-1)}} S_{\rho\sigma}^{(n)} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

となる。(C.14)、(C.11) より、代数解部分の中には、

$$\beta_1 \lambda^{\rho\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^{2(n-1)}} S_{\rho\sigma}^{(n)} \supset -\lambda^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}^{-1, \alpha\beta} \sum_{n=2}^{D-1} \frac{1}{m^{2(n-1)}} \beta_n Y_n(S^{(1)})_{\alpha\beta} \quad (\text{C.20})$$

が含まれることが分かる。この項と、(C.19) の S_0 からの寄与部分を合わせたもの

$$m^2 \lambda^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}^{-1, \alpha\beta} \sum_{n=2}^{D-1} \beta_n Y_n(S)_{\alpha\beta} - \lambda^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}^{-1, \alpha\beta} \sum_{n=2}^{D-1} \frac{1}{m^{2(n-1)}} \beta_n Y_n(S^{(1)})_{\alpha\beta} \quad (\text{C.21})$$

は、ちょうど $\Delta S_{\mu\nu} \rightarrow 0$ 極限で 0 となることが分かる。よって、この項は、因子 $\Delta S_{\mu\nu}$ で“因数分解”されるはずである。実際、

$$\begin{aligned} \Delta Y_n(S)_{\alpha\beta} &\equiv Y_n(S)_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^{2n}} Y_n(S^{(1)})_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{n!} g_{(\alpha\beta)}{}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \left[S_{\mu_1 \nu_1} \dots S_{\mu_n \nu_n} - \frac{1}{m^{2n}} S_{\mu_1 \nu_1}^{(1)} \dots S_{\mu_n \nu_n}^{(1)} \right] \\ &= \frac{1}{n!} g_{(\alpha\beta)}{}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \Delta S_{\mu_n \nu_n} \sum_{k=0}^{n-1} S_{\mu_1 \nu_1} \dots S_{\mu_k \nu_k} \frac{S_{\mu_{k+1} \nu_{k+1}}^{(1)}}{m^2} \dots \frac{S_{\mu_{n-1} \nu_{n-1}}^{(1)}}{m^2} \quad (\text{C.22}) \end{aligned}$$

と表されるので、項 (C.21) は、(C.16) と同形の新たな変数変換で、

$$u_{\rho\sigma}{}^{,\alpha\beta}[g, f] = -\frac{1}{\beta_1} g_{\rho\sigma}^{-1, \mu\nu} \sum_{n=2}^{D-1} \beta_n \frac{1}{n!} g_{(\mu\nu)}{}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \sum_{k=0}^{n-1} S_{\mu_1 \nu_1} \dots S_{\mu_k \nu_k} \frac{S_{\mu_{k+1} \nu_{k+1}}^{(1)}}{m^2} \dots \frac{S_{\mu_{n-1} \nu_{n-1}}^{(1)}}{m^2} g_{\mu_n \nu_n}^{-1, \alpha\beta} \quad (\text{C.23})$$

と選べば、消去できる。このように、 $1/m^2$ 展開による煩雑さはあるものの、スカラー場の場合と同様にゴースト線形項を消去できる構造が存在する。展開の仕方を工夫し、適切な演算子を定義すれば、一般証明も可能だろう。

付録 D

非線形スカラー場の例 1 ~ massless-massive 粒子が decouple している系

Hassan らの手法は、 ϕ の運動方程式を ψ について代数的にとき、作用に再代入するというものである。しかしながらこの手法では手で境界条件を課し、余分な自由度を落とさなければ安定性は言えない。むしろ「 ψ の代数解を ψ 変分の運動方程式に代入したものの作用を逆に求める」という手法をまずは探求すべきであろう。また、非線形レベルで ghost による安定性が出ないことはどのように見えるのか探求するのも重要であろう。そこで我々は、彼らのスカラー場の例を非線形化したものを用いてこの手法を試す。

D.1 高階微分理論の構築と tree-level ファインマン図の恒等式

簡単な例として、massless-massive 粒子間の相互作用のない模型

$$S = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{\mu^2}{2} (\phi + \psi)^2 - \frac{1}{3!2\sqrt{2}} \lambda (\phi + \psi)^3 \right] \quad (\text{D.1})$$

$$= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \Phi_0 \square \Phi_0 + \frac{1}{2} \Phi_m (\square - 2\mu^2) \Phi_m - \frac{\lambda}{3!} \Phi_m^3 \right] \quad (\text{D.2})$$

を考える。この模型は Φ_m^3 が最高幕であるため、大局的には不安定だが、 $\Psi_m = v = \text{一定}$ とした有効ポテンシャルを評価することで、 $\frac{v}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \gg 1$ の領域で安定であることがわかる。そこでこの模型をこの領域での有効理論として、ghost-free な高階微分模型を構築する。(D.1) の変分から得られる運動方程式は

$$\square \phi - \mu^2 (\phi + \psi) - \frac{c}{2} (\phi + \psi)^2 = 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\square \psi - \mu^2 (\phi + \psi) - \frac{c}{2} (\phi + \psi)^2 = 0 \quad (\text{D.4})$$

である。ここで便宜のため摂動パラメータの再定義 $c \equiv \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}$ を行った。(D.3) を ψ について代数的に解くと、

$$\psi = -\phi - \frac{\mu^2}{c} \pm \sqrt{\frac{\mu^4}{c^2} + \frac{2}{c}\square\phi} \quad (\text{D.5})$$

を得る。(D.5) は、±のうち+では ϕ の1次が最低冪であるが、-では真空期待値 $-\frac{2\mu^2}{c}$ を持つ。この $\psi = -\frac{2\mu^2}{c}$ は、 $\mu^2 < 0$ の場合に線形摂動が安定な真空である。今我々は $\mu^2 > 0$ を仮定しているので、±のうち+の場合のみを考える。このとき (D.5) の $\sqrt{\quad}$ を展開すると、

$$\psi = \frac{1}{\mu^2} (\square - \mu^2) \phi - \frac{c}{2\mu^6} (\square\phi)^2 + \frac{c^2}{2\mu^{10}} (\square\phi)^3 + \mathcal{O}(c^3) \quad (\text{D.6})$$

を得る。これを (D.4) に代入することで、 ϕ に関する高微分方程式、

$$\begin{aligned} 0 &= -2\square\phi + \square\sqrt{\frac{\mu^4}{c^2} + \frac{2}{c}\square\phi} \\ &= \frac{1}{\mu^2} \square (\square - 2\mu^2) \phi + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{n!} \frac{c^{n-1}}{\mu^{4n-2}} \square(\square\phi)^n \\ &= \frac{1}{\mu^2} \square (\square - 2\mu^2) \phi - \frac{c}{2\mu^6} \square(\square\phi)^2 + \frac{c^2}{2\mu^{10}} \square(\square\phi)^3 + \mathcal{O}(c^3) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

を得る。この運動方程式を導出する作用積分は

$$\begin{aligned} S &= \int d^D x \left[\phi \square\phi - \frac{c}{3} \left(\frac{\mu^4}{c^2} + \frac{2}{c}\square\phi \right)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \int d^D x \left[-\frac{1}{2\mu^2} \square\phi (\square - 2\mu^2) \phi + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(n+1)!} \frac{c^{n-1}}{\mu^{4n-2}} (\square\phi)^{n+1} \right] \\ &= \int d^D x \left[-\frac{1}{2\mu^2} \square\phi (\square - 2\mu^2) \phi + \frac{c}{3!\mu^6} (\square\phi)^3 - \frac{3c^2}{4!\mu^{10}} (\square\phi)^4 + \mathcal{O}(c^3) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

である。この高階微分理論の自由伝搬関数を除く連結グリーン関数は、元の理論 (D.1) の連結グリーン関数に比例する。この理論の自由伝搬関数、3点バーテックス、4点バーテックスはそれぞれ、

$$\frac{-i\mu^2}{p^2(p^2 + 2\mu^2)}, \quad -\frac{ic}{3!\mu^6} p_1^2 p_2^2 p_3^2, \quad -\frac{3ic^2}{4!\mu^{10}} p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 \quad (\text{D.9})$$

である。これより、tree-level の3点グリーン関数は、 $p_3^2 = -p_1^2 - p_2^2$ として、

$$\begin{aligned} G_3^{\text{tree}}(p_1, p_2) &= \frac{-ic3!}{3!\mu^6} p_1^2 p_2^2 p_3^2 \frac{-i\mu^2}{p_1^2(p_1^2 + 2\mu^2)} \frac{-i\mu^2}{p_2^2(p_2^2 + 2\mu^2)} \frac{-i\mu^2}{p_3^2(p_3^2 + 2\mu^2)} \\ &= -ic \frac{-i}{(p_1^2 + 2\mu^2)} \frac{-i}{(p_2^2 + 2\mu^2)} \frac{-i}{(p_3^2 + 2\mu^2)} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

となる。これは (D.2) から得られるグリーン関数と、 c に含まれる係数 $2\sqrt{2}$ を除いて一致している。(D.8) は線形レベルで高階微分となる理論であるにも関わらず、プロパゲーターの運動量と、

バーテックスの運動量が相殺することによって、外線に負符号のプロパゲーターが現れないのである。さらに興味深いことに、2種のファインマン図の非自明な相殺により、両理論の tree-level 4点グリーン関数が比例することも示せる。ファインマン則 (D.9) から得られる tree-level 4点グリーン関数は、 $p_4^2 = -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ として、

$$G_4^{tree}(p_1, p_2, p_3) = \frac{-i\mu^2}{(p_1^2 + 2\mu^2)} \frac{-i\mu^2}{(p_2^2 + 2\mu^2)} \frac{-i\mu^2}{(p_3^2 + 2\mu^2)} \frac{-i\mu^2}{(p_4^2 + 2\mu^2)} \times \left[i \left(\frac{c}{\mu^6} \right)^2 \sum_{n=2}^4 \frac{(p_1 + p_n)^2 \mu^2}{(p_1 + p_n)^2 + 2\mu^2} - \frac{3ic^2}{\mu^{10}} \right] \quad (D.11)$$

$$= \frac{-i}{(p_1^2 + 2\mu^2)} \frac{-i}{(p_2^2 + 2\mu^2)} \frac{-i}{(p_3^2 + 2\mu^2)} \frac{-i}{(p_4^2 + 2\mu^2)} \times \left[\sum_{n=2}^4 \frac{-i2c^2}{(p_1 + p_n)^2 + 2\mu^2} \right] \quad (D.12)$$

となる。外線のプロパゲーターのふるまいを改善する3点バーテックス上の運動量は、(D.11)の第一項のように内線の収束性を悪くする。ところが、新たな4点バーテックスからの寄与((D.11)第二項)によって、収束性が改善されるのである。4点以上のバーテックスは(D.5)の $\sqrt{}$ から生じるため、ラグランジアンの中に無限個存在し、このような構造が各グリーン関数毎に成り立つことが期待される。

(D.7)と(D.2)は同じ解を持つはずであるが、このグリーン関数の構造は、摂動解が一致することを表している。具体的には J_ψ をはじめから入れておけば、両理論の解は J_ψ をグリーン関数で畳んだ形で与えられる。その解の一致が各幕でのグリーン関数の恒等式として現れているのである。このことはE.2節の手法を用いて具体的にみることもできるが、ここでは割愛する。

D.2 補助場での書き換え

作用(D.8)を補助場を用いて書き直す。補助場形式の一つを天降り的に与えると、

$$S = \int d^D x \left[-\phi \square \phi + \chi \square \phi - \frac{\mu^2}{2} \chi^2 - \frac{c}{3!} \chi^3 \right] \quad (D.1)$$

である。この運動方程式は

$$\begin{aligned} \chi \text{変分: } & \square \phi - \mu^2 \chi - \frac{c}{2} \chi^2 = 0 \\ \phi \text{変分: } & -2\square \phi + \square \chi = 0 \end{aligned} \quad (D.2)$$

で与えられる。このうち、 χ 変分の方程式を代数的に解くと、

$$\chi = -\frac{\mu^2}{c} \pm \sqrt{\frac{\mu^4}{c^2} + \frac{2}{c} \square \phi} \quad (D.3)$$

であり、これを ϕ 変分の方程式に代入すれば、

$$-2\square \phi + \square \sqrt{\frac{\mu^4}{c^2} + \frac{2}{c} \square \phi} = 0 \quad (D.4)$$

を得る。これは (D.7) と同じ方程式である。前節で作用 (D.1) から (D.7) を導く際、 ϕ 変分の方程式を ψ について代数的に解き、 ψ 変分の方程式に代入した。今回はそれとは異なり、 χ 変分の方程式を χ 自身について解き、 ϕ 変分の方程式に代入するという操作を行っている。この場合、代数解 (D.3) を作用 (D.1) に再代入し、 ϕ について変分をとった運動方程式は (D.4) に一致する。このことは、代数解 (D.3) を代入した作用 (D.1) を形式的に $S[\phi, \chi(\phi)]$ と書くこととすれば

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[[\phi, \chi(\phi)]}{\delta \phi(x)} &= \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\chi} + \int d^D y \frac{\delta \chi(y)}{\delta \phi(x)} \left. \frac{\delta S}{\delta \chi(y)} \right|_{\phi} \\ &= \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\chi} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

となることから明らかである。さらに、作用 (D.1) の線形部分を対角化するために、変数変換 $\phi = \phi' + \frac{1}{2}\chi$ を施し、最後に $\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\Phi}_0, \chi = \sqrt{2}\tilde{\Phi}_m$ とスケールし直せば、

$$S = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{\Phi}_0 \partial_\mu \tilde{\Phi}_0 - \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{\Phi}_m \partial_\mu \tilde{\Phi}_m - \mu^2 \tilde{\Phi}_m^2 - \frac{\lambda}{3!} \tilde{\Phi}_m^3 \right] \quad (\text{D.6})$$

を得る。これは対角的な 1 階微分のみを含む作用であるので、通常通り量子化でき、繰り込みも可能である。ところが、大元の作用 (D.2) とは対照的に、massless 粒子 $\tilde{\Phi}_0$ が ghost となっている。今は decouple している特別な例を考えているため、massive 粒子のみの部分空間のみを考えれば特に問題はないが、もとの理論では massless 粒子の伝搬も許される。しかしながらこの系で、massless 粒子の伝搬を伴う量子論は解釈が困難である。massless-massive 相互作用がある場合などはなおさらである。したがって、このように運動方程式の代入を行ったのちに、新たな作用を書き下すことは、古典解の ghost による不安定性こそ現れないが、量子論的な解釈は困難である可能性がある。

付録 E

非線形スカラー場の例 2 ～ massless-massive 粒子が couple してい る系

前章で、massless-massive 粒子が decouple している場合に、代数解を代入することで得られた運動方程式から高階微分理論の作用を決めた。高階微分理論では、二つのモードのうちの一つが必ず ghost となり、系のエネルギーに下限がなくなるが、ghost 粒子と正常な粒子が decouple しているため、それぞれの粒子毎にエネルギーの保存が成り立ち、系は安定となる。したがって、この理論の古典的運動は、大元の理論が安定であるということと無矛盾に解釈できる。

この章で考えるのは massless-massive 間の相互作用がある系である。このような場合でも同様に高階微分の運動方程式が得られるため、対応する作用には ghost が存在することが予測される。ところが、先ほどの場合と異なり、エネルギーに下限がないうえに、massive-massless 相互作用があるため、系全体のエネルギーしか保存しない。したがって、真空が不安定となると考えるのが自然であるが、これはおおもとの理論の真空が安定であるということと矛盾する。この矛盾がどう解釈されるのかが、この章の主題である。

結論から述べると、粒子間の相互作用が存在する場合、得られた高階微分の運動方程式を導出する作用が存在しないと思われる。ここでは一つの例しか取り上げないが、この例を見るだけで、ほかの模型でも簡単に作用が作れないことはかなり一般的に理解できる。

E.1 運動方程式の導出と作用の不在

massive-massless 相互作用の入った toy model として

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^D x \left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\psi)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\phi + \psi)^2 - \lambda(\psi - \phi)(\psi + \phi)^2 \right] \\
 &= \int d^D x \left[\frac{1}{2}\Phi_0\Box\Phi_0 + \frac{1}{2}\Phi_m(\Box - 2\mu^2)\Phi_m - 2\sqrt{2}\lambda\Phi_0\Phi_m^2 \right]
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

を考える。この模型の運動方程式は

$$\square\phi - \mu^2(\phi + \psi) - \lambda [-(\psi + \phi)^2 + (\psi^2 - \phi^2)] = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\square\psi - \mu^2(\phi + \psi) - \lambda [(\psi + \phi)^2 + (\psi^2 - \phi^2)] = 0 \quad (\text{E.3})$$

で与えられる。(E.2) を ψ について代数的に解き、 $\psi = 0 = \phi$ を真空に持つ方の解を、(E.3) から (E.2) を差し引いたものに代入すれば、運動方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \square \sqrt{\frac{\mu^4}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}(\square - 2\mu^2)\phi + 4\phi^2} - 2\lambda \left[2\phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} + \sqrt{\frac{\mu^4}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}(\square - 2\mu^2)\phi + 4\phi^2} \right]^2 \\ &= \frac{1}{\mu^2} \square(\square - 2\mu^2)\phi - \frac{\lambda}{\mu^6} [2\square \{ \square\phi(\square - 2\mu^2)\phi \} - (\square - 2\mu^2) \{ (\square\phi)^2 \}] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

を得る。ここで、

$$\square \{ \square\phi(\square - 2\mu^2)\phi \} - (\square - 2\mu^2) \{ (\square\phi)^2 \} = -2\mu^2 \{ \square(\phi\square\phi) - (\square\phi)^2 \} \equiv \Delta \neq 0 \quad (\text{E.5})$$

なので、非線形項をこれ以上簡単化することはできない。この運動方程式 (E.4) を導出する作用が存在するか調べる。まず線形項に関しては、前章の decouple した例と同じなので問題なく作用が存在する。一方で非線形項はその形から一見

$$\mathcal{L}^{(3)} \sim (\square - 2\mu^2)\phi(\square\phi)^2 \quad (\text{E.6})$$

から導出されそうに思える。ところが、(E.6) の変分をとり、運動方程式への寄与を計算すると、

$$\frac{\delta\mathcal{L}^{(3)}}{\delta\phi} \sim 2\square \{ \square\phi(\square - 2\mu^2)\phi \} + (\square - 2\mu^2) \{ (\square\phi)^2 \} \quad (\text{E.7})$$

となり、第一項と第二項の相対符号は、(E.4) 中の相互作用項の相対符号とちょうど逆である。したがって、decouple した場合のアナロジーから得られる $\mathcal{L}^{(3)}$ では不十分で、相対符号を逆転させる補正項 \mathcal{L}^Δ が必要であることがわかる。相対符号を逆転させるためには、両項の差分である Δ が運動方程式に寄与する必要がある。したがって変分をとって Δ に比例するラグランジアンを補正項 \mathcal{L}^Δ として採用すればよい。そのような \mathcal{L}^Δ が存在するか調べる。 Δ は 4 階微分、場の 2 次なので、 \mathcal{L}^Δ は 4 階微分、場の 3 次でなければならない。そのような相互作用項の一般形は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\Delta &= a(\square\phi)^2\phi + b\square\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + c\square^2\phi\phi^2 + d\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi\phi \\ &\quad + e\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + f\partial_\mu\square\phi\partial^\mu\phi\phi \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

で与えられる。この相互作用項から運動方程式への寄与は

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}^\Delta}{\delta\phi} &= (2a + 4c + 2d - 2f)\square^2\phi\phi \\ &\quad + (3a - 2b + 2c + e + f)(\square\phi)^2 \\ &\quad + (4a + 8c + 4d)\partial_\mu\square\phi\partial^\mu\phi \\ &\quad + (2b + 4c - e + 2f + 3d)(\partial_\mu\partial_\nu\phi)(\partial^\mu\partial^\nu\phi) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

である。一方で、 $\Delta = -2\mu^2(2\partial_\mu\phi\partial^\mu\Box\phi + \phi\Box^2\phi)$ なので、(E.9) が Δ に比例するためには、

$$\begin{aligned} 2a + 4c + 2d - 2f &= -2k\mu^2, & 4a + 8c + 4d &= -4k\mu^2 \\ 3a - 2b + 2c + e + f &= 0, & 2b + 4c - e + 2f + 3d &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

とならなければならない。ここで比例係数を k とした。この条件のうち、下段の 2 つの条件から

$$e = 2b + 4c + 2f + 3d, \quad f = -a - 2c - d \quad (\text{E.11})$$

となり、これを上段の二式に代入すれば、

$$4a + 8c + 4d = -2k\mu^2, \quad 4a + 8c + 4d = -4k\mu^2 \quad (\text{E.12})$$

となる。この二つの条件は両立しない。したがって変分が Δ となるラグランジアン \mathcal{L}^Δ の相互作用項は存在しないため、運動方程式 (E.4) に対応するラグランジアンは存在しない。

E.2 運動方程式の形式的摂動解

前節で運動方程式 (E.4) に対応する作用が存在しないことは、相互作用項の相対符号が、decouple している場合のアナロジーから得られる相互作用項 (E.7) の相対符号と逆であることが問題であった。このようなことが起こる理由を考察するために、運動方程式の形式的な摂動解を導出する。この考察によって、符号の逆転は今考えている模型に特有の性質ではなく、massive-massless 相互作用が存在するすべての模型が持つ性質であることがわかる。まずは高階微分方程式

$$\frac{1}{\mu^2}\Box(\Box - 2\mu^2)\phi - \frac{\lambda}{\mu^6} [2\Box\{\Box\phi(\Box - 2\mu^2)\phi\} - (\Box - 2\mu^2)\{(\Box\phi)^2\}] + \mathcal{O}(\lambda^2) = 0 \quad (\text{E.1})$$

を解くことから始める。 ϕ を λ で展開する。

$$\phi = \phi^{(0)} + \lambda\phi^{(1)} + \dots \quad (\text{E.2})$$

これを運動方程式に代入すれば、 λ の 0 次で、線形方程式

$$\Box(\Box - 2\mu^2)\phi^{(0)} = 0 \quad (\text{E.3})$$

を得る。 $\phi^{(0)}$ の一般解は

$$\phi^{(0)} = \chi_0^{(0)} + \chi_m^{(0)}, \quad \Box\chi_0^{(0)} = 0, \quad (\Box - 2\mu^2)\chi_m^{(0)} = 0 \quad (\text{E.4})$$

で与えられる。このとき、 $\phi^{(0)}$ は、以下の関係式を満たす。

$$\Box\phi^{(0)} = 2\mu^2\chi_m^{(0)}, \quad (\Box - 2\mu^2)\phi^{(0)} = -2\mu^2\chi_0^{(0)} \quad (\text{E.5})$$

さらに λ の 1 次では、

$$\begin{aligned} 0 &= \Box(\Box - 2\mu^2)\phi^{(1)} - \frac{1}{\mu^4} \left[2\Box\{\Box\phi^{(0)}(\Box - 2\mu^2)\phi^{(0)}\} - (\Box - 2\mu^2)\{(\Box\phi^{(0)})^2\} \right] \\ &= \Box(\Box - 2\mu^2)\phi^{(1)} - \left[2\Box\{2\chi_m^{(0)}(-2\chi_0^{(0)})\} - (\Box - 2\mu^2)\{(-2\chi_0^{(0)})^2\} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

を得る。これを形式的に解けば、

$$\phi^{(1)} = -4 \left[2(\square - 2\mu^2)^{-1} \left\{ \chi_m^{(0)} \chi_0^{(0)} \right\} + \square^{-1} \left\{ (\chi_0^{(0)})^2 \right\} \right] + \dots \quad (\text{E.7})$$

を得る。ここで $+\dots$ は λ の 1 次のオーダーの初期条件で決まる項である。したがって、 λ の 1 次までの ϕ の解は $\chi_0^{(0)}, \chi_m^{(0)}$ の汎関数として、

$$\phi = \chi_0^{(0)} + \chi_m^{(0)} - 4\lambda \left[2(\square - 2\mu^2)^{-1} \left\{ \chi_m^{(0)} \chi_0^{(0)} \right\} + \square^{-1} \left\{ (\chi_0^{(0)})^2 \right\} \right] + \dots + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (\text{E.8})$$

と表せることがわかる。

一方で、高階微分運動方程式の表す dynamics は大元の運動方程式の解と一致するはずである。それを確かめるために、 Φ_0, Φ_m で表示した運動方程式

$$\square\Phi_0 - 2\sqrt{2}\lambda\Phi_m^2 = 0, \quad (\square - 2\mu^2)\Phi_m - 4\sqrt{2}\lambda\Phi_0\Phi_m = 0 \quad (\text{E.9})$$

を摂動的に解く。先程と同様に Φ_0, Φ_m を λ で摂動展開する。

$$\Phi_{0,m} = \Phi_{0,m}^{(0)} + \lambda\Phi_{0,m}^{(1)} + \dots \quad (\text{E.10})$$

λ の 0 次の解は

$$\Phi_0^{(0)} = -\sqrt{2}\chi_0^{(0)}, \quad \Phi_m^{(0)} = \sqrt{2}\chi_m^{(0)} \quad (\text{E.11})$$

である。ここで与えた一般解 $\chi_{0,m}^{(0)}$ を (E.4) で与えたものと同一視することで、 $\phi^{(0)}$ に対する同一の解

$$\phi^{(0)} = \chi_0^{(0)} + \chi_m^{(0)} \quad (\text{E.12})$$

を得る。さらに、摂動の 1 次では

$$\square\Phi_0^{(1)} - 2\sqrt{2}(\Phi_m^{(0)})^2 = 0, \quad (\square - 2\mu^2)\Phi_m^{(1)} - 4\sqrt{2}\Phi_0^{(0)}\Phi_m^{(0)} = 0 \quad (\text{E.13})$$

を得るため、解

$$\Phi_0^{(1)} = 4\sqrt{2}\square^{-1}(\chi_m^{(0)})^2 + \dots, \quad \Phi_m^{(1)} = -8\sqrt{2}(\square - 2\mu^2)^{-1}(\chi_0^{(0)}\chi_m^{(0)}) + \dots \quad (\text{E.14})$$

を得る。先ほどと同様に $+\dots$ はこの摂動次数での初期条件で決まる項である。これより、 ϕ は

$$\phi = \chi_0^{(0)} + \chi_m^{(0)} - 4\lambda \left[2(\square - 2\mu^2)^{-1}(\chi_0^{(0)}\chi_m^{(0)}) + \square^{-1}(\chi_m^{(0)})^2 \right] + \dots + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (\text{E.15})$$

となり、確かに (E.8) と一致する。

さて、ここでなぜ前節の (E.4) の相互作用項の相対符号が $-$ となったのか考察してみよう。(E.9) の解である (E.15) の摂動の 1 次補正の項の相対符号は $+$ である。これは、高階微分方程式を解いた解である (E.8) の λ の一次の項の相対符号と一致している。一方で、(E.1) の摂動の 1 次

の非線形項の相対符号は $-$ である。この符号の逆転が起こったのは、(E.5) を用いて (E.6) の一行目を二行目に書き直した時である。したがって、相対符号が逆転する原因は (E.5) のうち、

$$(\square - 2\mu^2)\phi^{(0)} = -2\mu^2\chi_0^{(0)} \quad (\text{E.16})$$

が負符号であることが原因であることがわかる。したがって、摂動の 1 次の相互作用項の相対符号を $+$ にしたければ、解 (E.8) の中に $\chi_0^{(0)}$ が偶数冪、あるいは奇数冪一方でのみ現れるように模型を修正すればよい。このような模型ならば、摂動の 1 次までで、高階微分運動方程式に必ずラグランジアンが存在する。ところが、これをもう一方の解き方と比較することでそれは不可能であることがわかる。解 (E.15) の λ の 1 次の項の中に $\chi_0^{(0)}$ が偶数冪 (0 次)、奇数冪 (1 次) 混ざった形が入ってきている理由は運動方程式 (E.9) の Φ_0 変分の方程式に Φ_0 の偶数冪 (0 次)、 Φ_m 変分の方程式に Φ_0 奇数冪 (1 次) が入ってきているからである。ラグランジアン原理を採用する限り、この運動方程式に Φ_0 の偶数冪、奇数冪どちらかのみが現れるように模型を修正することは不可能である。もう一つの可能性は (E.15) に現れる相互作用項の相対符号を逆転させる方法であるが、これは元の理論で片方の粒子を ghost 化しなければならないことがわかる。したがって、どのような安定な理論を考えても、対応する高階微分運動方程式の中の相互作用項の相対符号の逆転は起こる。逆に言えば decouple の場合のアナロジーから得られるラグランジアンの相互作用項を再現するもとの理論は ghost-like な不安定理論であることがわかる。

これを実際に確かめてみよう。簡単のため、1 つのみの相互作用項が入った模型

$$\begin{aligned} S &= \int d^D x \left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\psi)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\phi + \psi)^2 - \frac{\lambda}{(\sqrt{2})^{N+M}}(\psi - \phi)^N(\psi + \phi)^M \right] \\ &= \int d^D x \left[\frac{1}{2}\Phi_0\square\Phi_0 + \frac{1}{2}\Phi_m(\square - 2\mu^2)\Phi_m - \lambda\Phi_0^N\Phi_m^M \right] \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

を考える。今までと同様に $\mu^2 > 0$ を仮定し、また $N + M \geq 3$ かつ N, M は 0 以上の整数であることを仮定する。今の主題は N, M が 1 以上の整数である場合であるが、前章の模型も一般的に含めるために、ここでは N, M は 0 以上の整数であるとする。

(E.17) の運動方程式は

$$\square\Phi_0 - n\lambda\Phi_0^{N-1}\Phi_m^M = 0, (\square - 2\mu^2)\Phi_m - m\lambda\Phi_0^N\Phi_m^{M-1} = 0 \quad (\text{E.18})$$

で与えられる。場を λ で摂 1 動展開し、その 0 次の方程式の解を

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)} &= \sqrt{2}\chi_0^{(0)}, \Phi_m^{(0)} = \sqrt{2}\chi_m^{(0)} \\ \square\chi_0^{(0)} &= 0, (\square - 2\mu^2)\chi_m^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

と与えれば、 $\phi = \chi_0^{(0)} + \chi_m^{(0)} + \mathcal{O}(\lambda)$ となる。さらに摂動の 1 次の方程式の一般解は

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)} &= (-1)^{N-1}N(\sqrt{2})^{M+N-1}\square^{-1} \left[\left(\chi_0^{(0)}\right)^{N-1} \left(\chi_m^{(0)}\right)^M \right] + \chi_0^{(1)} \\ \Phi_m^{(1)} &= (-1)^N M(\sqrt{2})^{M+N-1}(\square - 2\mu^2)^{-1} \left[\left(\chi_0^{(0)}\right)^N \left(\chi_m^{(0)}\right)^{M-1} \right] + \chi_m^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

で与えられる。ただし $\square\chi_0^{(1)} = 0, (\square - 2\mu^2)\chi_m^{(1)} = 0$ である。これより、 ϕ の摂動の 1 次までの解は、

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^{(0)} + \lambda\phi^{(1)} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \chi_0^{(0)} + \chi_m^{(0)} + (-1)^N \lambda (\sqrt{2})^{N+M-2} \left[N\square^{-1} \left\{ \left(\chi_0^{(0)}\right)^{N-1} \left(\chi_m^{(0)}\right)^N \right\} \right. \\ &\quad \left. + M(\square - 2\mu^2)^{-1} \left\{ \left(\chi_0^{(0)}\right)^N \left(\chi_m^{(0)}\right)^{M-1} \right\} \right] + \lambda \left(\chi_0^{(1)} + \chi_m^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\end{aligned}\quad (\text{E.21})$$

で与えられる。先ほどの例と同様に摂動の 1 次の相対符号は + で、さらに、予想通り両項の $\chi_0^{(0)}$ の偶奇は異なっている。

一方で (E.17) の ϕ 変分の運動方程式の ψ についての代数解 $\psi = \psi(\phi)$ を ψ 変分の方程式に代入したものの一般形は

$$0 = \left. \frac{\delta S}{\delta \psi} \right|_{\psi=\psi(\phi)} = \frac{1}{\mu^2} \square(\square - 2\mu^2)\phi - \lambda F(\phi) + (\lambda^2)\quad (\text{E.22})$$

で与えられる。ここで $F(\phi)$ は一般に ϕ の微分も含んでいるものとする。ただし、 $F(\phi=0) = 0$ は仮定する。今までの例から、この仮定は $\phi = 0 = \psi$ を含む解を選んでいることと等価であると思われる。 λ の 0 次の形は $\lambda \rightarrow 0$ 極限で線形理論と一致しなければならないので、一意にこの形に決まる。 $\phi = \phi^{(0)} + \lambda\phi^{(1)} + \dots$ として、摂動の 0 次、1 次の方程式はそれぞれ、

$$\square(\square - 2\mu^2)\phi^{(0)} = 0\quad (\text{E.23})$$

$$\square(\square - 2\mu^2)\phi^{(1)} - F(\phi^0) = 0\quad (\text{E.24})$$

ここで (E.24) の $F(\phi^{(0)})$ の項は、 $F(\phi=0) = 0$ の仮定から $F(\phi) = F(\phi^{(0)}) + \mathcal{O}(\lambda)$ となることから決まる。この方程式は (E.21) を解に持たなければならない。0 次摂動の方程式 (E.23) は自動的に満たされる。一方で、(E.24) に (E.21) を代入することで、

$$\begin{aligned}F(\phi^{(0)}) &= \square(\square - 2\mu^2) \left[(-1)^N (\sqrt{2})^{N+M-2} \left[N\square^{-1} \left\{ \left(\chi_0^{(0)}\right)^{N-1} \left(\chi_m^{(0)}\right)^N \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + M(\square - 2\mu^2)^{-1} \left\{ \left(\chi_0^{(0)}\right)^N \left(\chi_m^{(0)}\right)^{M-1} \right\} \right] + \left(\chi_0^{(1)} + \chi_m^{(1)} \right) \right] \\ &= (-1)^N (\sqrt{2})^{N+M-2} \left[N(\square - 2\mu^2) \left\{ \left(\chi_0^{(0)}\right)^{N-1} \left(\chi_m^{(0)}\right)^N \right\} \right. \\ &\quad \left. + M\square \left\{ \left(\chi_0^{(0)}\right)^N \left(\chi_m^{(0)}\right)^{M-1} \right\} \right]\end{aligned}\quad (\text{E.25})$$

を得る。先ほども注意したように、この段階で、2 つの項の相対符号は +、 $\chi_0^{(0)}$ の偶奇は異なっている。ここで $\square\phi^{(0)} = 2\mu^2\chi_m^{(0)}$, $(\square - 2\mu^2)\phi^{(0)} = -2\mu^2\chi_0^{(0)}$ なので、 $\chi_0^{(0)}$ の偶奇性によって、相対

符号が逆転し、

$$F(\phi^{(0)}) = \frac{(\sqrt{2})^{N+M-2}}{(2\mu^2)^{N+M-1}} \left[-N(\square - 2\mu^2) \left\{ \left((\square - 2\mu^2)\phi^{(0)} \right)^{N-1} \left(\square\phi^{(0)} \right)^N \right\} \right. \\ \left. + M\square \left\{ \left((\square - 2\mu^2)\phi^{(0)} \right)^N \left(\square\phi^{(0)} \right)^{M-1} \right\} \right] \quad (\text{E.26})$$

を得る。この $\phi^{(0)}$ を ϕ に置き換えたものが高階微分方程式 (E.22) の相互作用項であり、これは

$$\mathcal{L}^{(N+M)} \sim \left((\square - 2\mu^2)\phi \right)^N (\square\phi)^M \quad (\text{E.27})$$

からの運動方程式への寄与と相対符号が逆である。逆に元の理論の片方の粒子が ghost であれば、この相互作用項を再現することもわかる。

また、 $N \text{ or } M = 0$ の場合は確かにラグランジアンが存在することもわかる。

この解析のさらなる一般化も容易である。もとの理論でどのように相互作用項の線形結合を加えたところで、この構造が相互作用ごとに独立に成り立つことは容易に理解できるだろう。

E.3 まとめ

ここでは、massive モードと massless モードが混在するスカラー場の例を用いて安定な高階微分理論を構築する可能性を考えた。高階微分理論には一般に ghost が存在するため、真空の不安定性が現れるはずであるが、もともと安定な理論から高階微分方程式を構築し、そのラグランジアンを読み取ることで安定な理論を作るという手法を取った。こうして得た高階微分理論の安定性がどのように現れるのかを見ることを主な目的とした。まずは massive-massless 相互作用のない例を考え、ラグランジアンを構築した。摂動的な古典解がもとの理論と一致することから、Tree level のファインマン図の間に恒等式が成り立ち、グリーン関数がもとの理論のものと比例することを見た。さらに、補助場を導入することで、ghost 化した massless 理論と正常な massive 理論に decouple し、古典レベルで安定性が保証されていること、また古典解がもとの理論と一致することも顕わに見ることができた。

一方で、この構築法を用いても一方の粒子が ghost 化することは、もとの理論の真空の安定性と一見矛盾しているように思えることから、massless-massive 相互作用が入った系について詳しく調べた。まずは簡単な Toy Model を例にとり調べたところ、ラグランジアンが存在しないことがわかった。これは高階微分運動方程式の相互作用項の形が、decouple している場合のアナロジーから得られるラグランジアンからの運動方程式への寄与と、相対符号が逆となることが問題であった。そこで、相対符号の逆転が起こる理由を詳しく調べたところ、より一般的な模型でも相互作用項の逆転が起こることがわかった。また、この相互作用項の符号の逆転はそもそももとの理論がラグランジアンから導出されていることが原因であることがわかった。

ラグランジアンの存在はエネルギーの保存則と大きく関っており、もちろん元の理論のエネルギー保存則もこれによって保証されている。一方で、高階微分理論には必ず ghost が存在し、通常の意味でのエネルギーの保存は成り立たない。したがって、高階微分方程式のラグランジアンが存

在しない理由を、元の理論がラグランジアンから導出されていることに帰着できたことは自然な結果であると言えるだろう。

謝辞

指導教官である野尻伸一教授には、大変暖かいご指導を賜りました。また、QG 研のみなさんにはセミナーの開催や、普段の議論、時には息抜きなど、研究生を送る上で大変お世話になりました。本研究があるのは、皆さまに協力して頂いたおかげです。ここに皆様への感謝の意とお礼を申し上げたく、謝辞に変えさせていただきます。

参考文献

- [1] Dirac, Proc. Roy. Soc. A **155** (1936) 447.
- [2] M. Fierz, Helv. Phys. Acta, **12** (1939) 3.
- [3] M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173** (1939) 211.
- [4] H. van Dam and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **22** (1970) 397;
V. I. Zakharov, JETP Lett. **12** (1970) 312 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **12** (1970) 447].
- [5] A. I. Vainshtein, Phys. Lett. B **39** (1972) 393.
- [6] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. D **6** (1972) 3368;
D. G. Boulware and S. Deser, Annals Phys. **89** (1975) 193.
- [7] C. de Rham and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **82**, 044020 (2010) [arXiv:1007.0443 [hep-th]].
- [8] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 231101 [arXiv:1011.1232 [hep-th]].
- [9] S. F. Hassan and R. A. Rosen, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 041101 [arXiv:1106.3344 [hep-th]].
- [10] S. F. Hassan and R. A. Rosen, JHEP **1204** (2012) 123 [arXiv:1111.2070 [hep-th]].
- [11] S. F. Hassan, R. A. Rosen and A. Schmidt-May, JHEP **1202** (2012) 026 [arXiv:1109.3230 [hep-th]].
- [12] S. F. Hassan, R. A. Rosen, JHEP **2012** (2012), 126.
- [13] K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.
K. S. Stelle, Gen. Rel. Grav. **9** (1978) 353.
- [14] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 201301.
- [15] N. Ohta, Class. Quant. Grav. **29** (2012) 015002.
- [16] A. Kleinschmidt, T. Nutma, A. Virmani, Gen. Rel. Grav. **45** (2013) 727.
- [17] M. F. Paulos and A. J. Tolley, JHEP **09** (2012) 002.
- [18] S. F. Hassan, A. Schmidt-May and M. von Strauss, Universe 1 (2015) 2, 92.
- [19] S. F. Hassan, A. Schmidt-May and M. von Strauss, Class. Quant. Grav. **33** (2016) 015011.
- [20] Y. M. Zinoviev, Nucl. Phys. B 770 (2007) **83** [arXiv:0609170[hep-th]]
- [21] J. Maldacena arXiv:1105.5632[hep-th]
- [22] S. Deser, E. Joung and A. Waldron, Phys. Rev. D **86**, 104004 (2012) [arXiv:1301.4181].

-
- [23] C. de Rahm and S. Renaux-Petel, JCAP **1301** (2013) 035 [arXiv:1206.3482[hep-th]].
- [24] S. F. Hassan, A. Schmidt-May and M. von Strauss, Phys. Lett **B726** (2013) 168 [arXiv:1208.1797].
- [25] S. Deser, M. Sandora, and A. Waldron, Phys. Rev. **D87** (2013) 101501 [arXiv:1301.5621].
- [26] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh, Abdus Salam, Nucl. Phys. **28** (1961) 529.
- [27] K. Hinterbichler, JHEP **1310** (2013) 102 [arXiv:1305.7227 [hep-th]].
- [28] S. Akagi, Y. Ohara and S. Nojiri, Phys. Rev. D **90** (2014), 123013 [arXiv:1410.5553 [hep-th]].
- [29] Y. Ohara, S. Akagi and S. Nojiri, Phys. Rev. D **92** (2015), 023011 [arXiv:1407.5765 [hep-th]].
- [30] Y. Ohara, S. Akagi and S. Nojiri, Phys. Rev. D **90** (2014), 043006 [arXiv:1402.5737 [hep-th]].