

学位論文

相対論的流体模型を用いた  
高エネルギー原子核衝突実験の解析による  
クォーク・グルーオンプラズマ物性の研究

岡本 和久

名古屋大学大学院理学研究科  
素粒子宇宙物理学専攻

2017年度



## 概要

通常、クォークとグルーオンは陽子や中性子などのハドロン内部に閉じ込められている。一方、宇宙初期のような超高温の極限条件下では、クォークとグルーオンが陽子と中性子の内部から解放され単独で動けるようになる。この状態をクォーク・グルーオンプラズマ (QGP) と呼ぶ。地球上での QGP 生成を目指し一連の高エネルギー原子核衝突実験が遂行されている。そして 2005 年、ブルックヘブン国立研究所 (BNL) の Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) が QGP の生成に成功した。しかし、この QGP は従来予想されていた弱結合 QGP ガスではなく、ほぼ完全流体のように振る舞う強結合 QGP であることが分かった。これは、完全流体計算を用いた相対論的流体模型によって RHIC における実験結果を説明できたためである。さらに、2010 年には欧州原子核研究機構 (CERN) の Large Hadron Collider (LHC) において、RHIC より約 10 倍高いエネルギーで原子核衝突実験が開始した。今や QGP の物性の定量的解明が高エネルギー原子核衝突実験における目標となっている。さらに高統計、高精度の多粒子相関に関係する新たな観測量が複数報告されている。これらの実験結果から QGP の物性に関する詳細な情報を理解する可能性が広がった。特に、QGP の輸送係数の値や温度依存性の解明に注目が集まっている。

本研究では、QGP の物性の定量的理解を目指し、衝突後の時空発展を記述する現実的な現象論的模型を構築した。まず、QGP の時空発展を精度良く記述するため、新しい相対論的粘性流体アルゴリズムを開発した。このアルゴリズムでは、保存方程式を完全流体計算と粘性の補正の計算の 2 段階に分けて解く。完全流体計算では、小さな数値粘性でも安定な Riemann 解法を利用する。粘性テンソルの運動方程式では数値コストの問題を回避するため、Piecewise Exact Solution (PES) 法を利用する。高エネルギー原子核衝突実験における時空発展の記述に適した Milne 座標系においてアルゴリズムを構築した。そして、完全流体、粘性流体、多次元の場合についてテスト計算を行った。開発した相対論的流体コードは解析解を正しく再現すること、小さな数値粘性の下でも安定であること、高エネルギー原子核衝突実験における空間 3 次元膨張の記述に適していることを確認した。また、新しい相対論的流体コードを用いて、高エネルギー原子核衝突実験において Kelvin-Helmholtz 不安定性が生じる可能性を議論した。

次に、開発した相対論的流体コードを組み込んだ相対論的流体模型を構築した。我々の模型では、まず、近年開発された初期条件モデル TRENTO を用いて初期条件を計算する。TRENTO は空間 3 次元における初期状態ゆらぎを計算することができる。その後、我々の数値アルゴリズムを用いた空間 3 次元の相対論的流体計算を行う。流体計算では、QGP とハドロンガスのずり粘性と体積粘性、その温度依存性を考慮する。また、格子 QCD 計算により得られた状態方程式を利用する。さらに、希薄になった終状態を UrQMD による分子動力学計算で記述し、最終的な粒子分布を計算する。この模型を LHC の鉛鉛衝突実験に適用し、LHC における荷電粒子生成数の衝突軸方向の分布、パイ中間子、K 中間子、陽子の横運動量分布、荷電粒子生成数の方位角異方性の横運動量分布と衝突軸方向の分布を計算した。そして、模型計算と実験結果との比較から QGP の粘性係数の値を評価した。この結果、粒子生成数の横運動量分布は QGP の体積粘性の値に敏感であること、方位角異方性の中心度依存性と衝突軸方向の分布は、ずり粘性と体積粘性の温度依存性に敏感であることが分かった。

# 目次

第 1 章	イントロダクション	1
第 2 章	高エネルギー原子核衝突実験	5
2.1	実験環境	5
2.2	高エネルギー原子核衝突実験における時空発展	6
2.3	流体的振る舞いのシグナル	7
第 3 章	相対論的粘性流体力学	9
3.1	相対論的粘性流体方程式	9
3.2	Milne 座標系における相対論的粘性流体方程式	12
3.3	相対論的流体方程式の解析解	14
3.3.1	Riemann 問題	15
3.3.2	Landau-Khalatnikov 解	19
3.3.3	Bjorken スケーリング解	20
3.3.4	Bjorken 膨張背景におけるゆらぎの伝播	22
3.3.5	完全流体における Gubser 解	25
3.3.6	2 次の粘性流体における Gubser 解	26
第 4 章	Milne 座標における相対論的流体コードの開発	28
4.1	完全流体アルゴリズム	28
4.1.1	$(\tau, \eta)$ 空間における流体方程式の差分化	28
4.1.2	Milne 座標における Riemann 問題	30
4.1.3	$(\tau, \eta)$ 空間におけるアルゴリズム	32
4.1.4	多次元系におけるアルゴリズム	34
4.2	粘性流体アルゴリズム	35
4.2.1	Strang splitting	35
4.2.2	アルゴリズム	37
4.3	境界条件	37
第 5 章	流体コードのテスト計算	39
5.1	完全流体テスト	39
5.1.1	衝撃波管問題	39
5.1.2	真空への膨張	41
5.1.3	Landau-Khalatnikov 解	44
5.1.4	Bjorken 膨張背景におけるゆらぎの伝播	45

5.1.5	完全流体における Gubser 解 . . . . .	46
5.1.6	保存則テスト . . . . .	47
5.2	粘性流体テスト . . . . .	50
5.2.1	粘性流体における Bjorken スケーリング解 . . . . .	50
5.2.2	2 次の粘性流体における Gubser 解 . . . . .	51
<b>第 6 章</b>	<b>高エネルギー原子核衝突実験における Kelvin-Helmholtz 不安定性</b>	<b>54</b>
6.1	初期条件 . . . . .	54
6.2	数値計算結果 . . . . .	56
<b>第 7 章</b>	<b>相対論的流体モデルの構築</b>	<b>58</b>
7.1	初期条件 . . . . .	58
7.2	相対論的粘性流体計算 . . . . .	60
7.3	フリーズアウト . . . . .	60
7.4	事象毎ゆらぎ . . . . .	61
<b>第 8 章</b>	<b>LHC 実験の解析による QGP の粘性係数の評価</b>	<b>63</b>
8.1	荷電粒子数の擬ラピディティ分布 . . . . .	63
8.2	$\eta/s$ 一定の計算 . . . . .	64
8.3	体積粘性の影響 . . . . .	66
8.4	輸送係数の温度依存性 . . . . .	67
<b>第 9 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>72</b>
<b>付 録 A</b>	<b>流体アルゴリズムにおける補間スキーム</b>	<b>74</b>
A.1	MC limiter . . . . .	74
A.2	Piecewise Parabolic Method (PPM) . . . . .	75
<b>付 録 B</b>	<b>移流方程式の数値解法</b>	<b>77</b>
B.1	高精度風上差分法 . . . . .	77
B.2	Corner transport upwind (CTU) スキーム . . . . .	77

# 第1章 イントロダクション

原子核を構成する核子は、素粒子であるクォークとグルーオンが複数結びついてできている。我々の身の周りにおいては、クォークとグルーオンは核子の中に閉じ込められており単独で観測することはできない。クォークとグルーオンが核子内部から解放され、クォークとグルーオンの自由度が支配的となった状態をクォーク・グルーオンプラズマ (QGP) と呼ぶ [1, 2]。クォークとグルーオンの間の相互作用は強い相互作用と呼ばれ、量子色力学 (QCD) により記述される。宇宙初期のような 2 兆度以上の超高温の世界では、QCD の漸近的自由性 [3, 4] によりクォークとグルーオンの相互作用は弱くなり、QGP 状態が実現すると考えられている [5]。宇宙初期には、クォークとグルーオンが閉じ込めから解放された QGP 相から、クォークとグルーオンがハドロン内部に閉じ込められたハドロン相への相転移がおきた。この相転移を閉じ込め・非閉じ込め相転移と呼ぶ。宇宙初期には、この閉じ込め・非閉じ込め相転移に加え、QCD におけるカイラル対称性の自発的破れ [6, 7] が起き、ハドロンの質量が生成したと考えられている。現在の世界においては、中性子星内部のような高バリオン数密度領域において、QGP が存在している可能性がある。

地上での QGP 生成を目指し、高エネルギー原子核衝突実験が始まった。高エネルギー原子核衝突実験では二つの原子核同士を高エネルギーで衝突させることで、QGP が実現するような高温、高密度状態を目指す。高エネルギー原子核衝突実験は、宇宙初期の物質の様相、物質の創成機構、QCD におけるクォークの閉じ込め機構、質量の生成機構の解明に迫ることができる。高エネルギー原子核衝突実験は 1974 年に、ローレンス・バークレイ国立研究所の加速器 BEVALAC において始まった。現在は、2000 年より稼働したブルックヘブン国立研究所 (BNL) の Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) と 2009 年より稼働した欧州原子核研究機構 (CERN) の Large Hadron Collider (LHC) において、高エネルギー原子核衝突実験が行われている。2005 年には遂に RHIC において、QGP の生成を達成したという報告がなされた [8–14]。クォークを実験で実際に観測することはできないため、QGP 生成の達成という結論は様々な実験データと理論計算とを注意深く比較することによって導かれた [12–14]。特に理論計算においては、相対論的流体力学の数値計算を用いた現象論的モデルが RHIC の実験結果の説明に大きく成功し、QGP 生成の達成という結論を導くうえで大きな役割を担った [15–18]。この相対論的流体力学を用いて原子核衝突実験における生成物の時空発展を記述する現象論的モデルを相対論的流体モデルと呼ぶ。RHIC において注目された観測の一つが生成粒子数の楕円型 (2 次) の方位角異方性である [19–21]。完全流体に基づいた相対論的流体モデルは、RHIC における生成粒子数の 2 次方位角異方性のデータを良く再現した [22–29]。この結果より、RHIC で生成された QGP は非常に粘性の小さな流体のように振る舞うことが分かり、強結合 QGP と呼ばれた [30, 31]。また、流体力学は非平衡系において熱力学の概念を定義できるため、相対論的流体モデルを通して静的な系における理論研究を実験と比較できるようになり、QGP 研究に大きな進展がもたらされた。

RHIC 稼働以降、相対論的流体モデルは注目を集め、より現実的なモデルへと、現在までその改良が続いている。大きな進歩の一つは相対論的流体計算への粘性の導入である。相対論的流体計算への

粘性の導入は非相対論的な場合に比べ複雑なものとなる。相対論的に拡張された Navier-Stokes 方程式は因果律と不安定性の問題を持っている [32–36]。この問題を回避した 2 次の相対論的粘性流体方程式は Navier-Stokes 方程式と比べ複雑な式となり、数値計算のコストも大きくなる。QGP の性質を調べるため、現在では、この 2 次の粘性流体方程式を利用した相対論的流体模型が高エネルギー原子核衝突実験に応用されている [37–49]。相対論的粘性流体模型の解析により、RHIC, LHC における 2 次の方位角異方性は QGP の粘性係数の値に敏感であることが分かった。粘性流体計算と 2 次の方位角異方性の実験結果との比較により、原子核衝突実験における QCD 物質のずり粘性とエントロピーの比  $\eta/s$  の値が評価されている。参考文献 [50] では RHIC における  $\eta/s$  の値は  $1 \leq 4\pi\eta/s \leq 0.25$  と評価された。また、参考文献 [51] では  $0.07 \leq 4\pi\eta/s \leq 0.43$  と同程度の範囲で報告されている。ここで、この  $\eta/s$  の値は相対論的流体模型において温度に依存しない一定値と仮定されたもとで評価されている。AdS/CFT 対応により、 $\eta/s$  の強結合極限における下限値が  $\eta/s = 0.08$  と予想されている [52]。QGP のずり粘性は通常物質と比べ、この下限値に非常に近い値をとっており注目されている。

2010 年には、RHIC, LHC における高次の方位角異方性が観測された [53–57]。さらに、観測された高次の方位角異方性は原子核衝突実験の初期状態におけるエネルギー密度のゆらぎに起因していると理解された [58, 59]。高次の方位角異方性は、宇宙背景放射における温度ゆらぎのパワースペクトルと類似している。高次の方位角異方性は、原子核衝突実験における初期状態に関する情報を持っているものとして注目を集めている。また、初期状態におけるゆらぎは QGP 中を伝播した後方位角異方性として観測される。よって、高次の方位角異方性の解析により、QGP の物性に関する詳細な情報を得ることができると期待されている。RHIC, LHC における原子核衝突実験ではおよそ  $10^6 \sim 10^7$  の原子核衝突イベントを観測し、統計処理とともに最終的な結果を導く。相対論的流体模型においても、初期条件をモンテカルロ計算で用意しながら複数の原子核衝突イベントを計算し、実験環境における初期状態ゆらぎを模型に取り入れる手法が発展した。この事象毎流体模型計算は RHIC, LHC における高次の方位角異方性の再現に成功した [60–68]。また、3 次、4 次の方位角異方性は 2 次の方位角異方性以上に粘性係数の値に敏感であると確認された [61]。さらに近年、複数の新しい観測量が RHIC, LHC により報告されている。方位角異方性の間の相関 [69, 70]、反応平面の相関 [71, 72]、方位角異方性の非線形性 [73]、3 粒子相関 [74, 75] などである。以上の豊富な観測データから、粘性係数の温度依存性などの QGP の物性に関する詳細な情報を得ることができると期待されている。

これまで、多くの相対論的流体模型計算は  $\eta/s$  を一定値で導入し、体積粘性の効果を無視していた。しかし、ずり粘性と体積粘性の温度依存性は QCD 物質の物性に関する豊富な情報を持っている。例えば、QCD の漸近的自由性により、高温では QGP の  $\eta/s$  は大きくなるという予想がある [76]。また、ハドロン相においては、ハドロン同士の断面積の温度依存性や、励起状態粒子が生成されることによって、高温ほど  $\eta/s$  が小さくなるという計算がある [77, 78]。これらの機構は QCD に特有のものであるが、 $\eta/s$  が相転移点で極小値を取るというのは多くの物質が持つ共通の性質でもあり [79]、QCD においてもこの性質が実際に成り立つのか注目されている。QCD 物質の体積粘性の大きさについては、相転移温度付近で増大するという理論計算があり [78, 80]、閉じ込め非閉じ込め相転移の性質を反映するものと期待されている。また、弾性散乱で記述される非相対論的な一成分ガスの体積粘性はゼロとなるが、相対論的流体の場合、体積粘性は有限の値を取る [81]。体積粘性は非相対論的流体と比べた際の、相対論的流体に固有の性質としても興味深い。以上のような

動機の下, ずり粘性のみでなく体積粘性を含めた粘性係数の温度依存性が相対論的流体模型と実験結果との比較から調べられている. 2005 年には QGP の粘性はゼロに近いという定性的理解であった. その後  $\eta/s$  の具体的な値が評価され, さらに体積粘性の効果や粘性係数の温度依存性の解析が始まり, QGP の物性の定量的解明が目指されている.

QGP の物性の定量的解明に前進する上で, 重要な要素となるのが相対論的流体計算の精度である. 近年の高統計, 高精度の実験結果を解析するためには流体計算の精度に注意する必要がある. 流体計算には常に数値的な拡散が存在し, 数値粘性の効果と呼ばれる. QGP の物理的粘性の効果をも正しく取り入れるためには, 数値粘性の十分小さな流体アルゴリズムを利用する必要がある. そこで, 本論文の先行研究において, QGP の物性の定量的解明に向け, 精度の高い相対論的粘性流体アルゴリズムが開発された [82]. このアルゴリズムでは, 参考文献 [83] に基づき, 2 次の相対論的粘性流体方程式を完全流体計算と粘性の補正の計算の 2 段階に分けて解く. 完全流体計算の数値解法には two-shock approximation を用いた Riemann 解法 [84] を利用する. この新しいアルゴリズムは小さな数値粘性の下でも安定であり, QGP の物理的粘性の評価に適しているということも示された [82].

本論文では, まず先行研究 [82] で開発された流体アルゴリズムを高エネルギー原子核衝突実験の記述に適した Milne 座標へと応用した (副論文 [85, 86]). RHIC, LHC における相対論的流体模型計算は衝突軸方向を除いた空間 2 次元の計算が主であり, 衝突軸方向の時空発展に関する理解は比較的進んでいない. Milne 座標を利用することで, RHIC, LHC における空間 3 次元の流体計算の数値コストを軽減することができ, また, 衝突軸方向の記述の精度を高めることができる [25]. Milne 座標を利用した空間 3 次元の相対論的粘性流体模型 [41, 42, 46, 48] による高エネルギー原子核衝突実験の解析が始まっている. 近年, 衝突軸方向の時空発展の情報を持つ観測量が複数報告されている [72, 74, 75]. これらの実験データとともに, QGP の空間 3 次元的な振る舞いを調べることで, QGP の物性に関する新たな情報を得ることができる. 数値流体力学において, 新しい流体アルゴリズムを構築する際は, 特定のテスト問題における計算結果をアルゴリズム開発の指針にする. しかし, Milne 座標における流体アルゴリズムのテスト問題は少ない. そこで, 我々は Milne 座標における新たなテスト問題を考案し, そのテスト計算結果を開発の指針とした. そして デカルト座標におけるアルゴリズム [82] を, その精度を落とすことなく Milne 座標へ応用した. また, 原子核衝突実験における相対論的流体計算では, 真空に近い低エネルギー密度領域で数値的不安定性が生じやすく, ずり粘性と体積粘性の導入を困難にする要因となっている. 今回, 計算の安定性を向上させるため, アルゴリズムの改善を行った.

次に, 開発した相対論的粘性流体コードを用いて, 原子核衝突実験において Kelvin-Helmholtz(KH) 不安定性が生じる可能性を議論した (副論文 [86]). 数値粘性の小さな我々の流体コードは, 原子核衝突実験における流体不安定性の解析に適している. 高エネルギー原子核衝突実験における乱流の振る舞いは参考文献 [87, 88] で議論された. また, 高エネルギー原子核衝突実験において KH 不安定性が生じる可能性は参考文献 [89] で議論された. 参考文献 [89] においては, 完全流体の数値計算により, RHIC, LHC において, KH 不安定性の時間スケールは QGP の時間スケールよりも大きく, 不安定性は成長しきらないと報告された. 我々は参考文献 [89] と異なる状況を考え, 相対論的粘性流体の数値計算による解析を行った.

さらに, 開発した相対論的粘性流体コードを用いた, 相対論的流体模型を構築した. この新しい相対論的流体模型を用いて, LHC 実験の解析を行い, QGP のずり粘性係数と体積粘性係数の温度



依存性を評価した（副論文 [90]）。観測量としては、荷電粒子の生成数の衝突軸方向の分布、 $\pi$  中間子、 $K$  中間子、陽子の横運動量分布、2 次、3 次の方位角異方性の横運動量分布と衝突軸方向の分布を用いた。さらに、複数の異なる中心度の実験を解析した。高エネルギー原子核衝突実験では、中心衝突ほど高温の QGP が生成され则认为られている。また、衝突軸方向についても、中心ほど QGP の温度が高いと认为られている。異なる中心度の実験や、一つの中心度でも衝突軸方向の分布に注目することで異なる温度領域を解析することができる。

本論文の構成は次のようになる。2 章で高エネルギー原子核衝突実験の基本的な描像、3 章で我々が基礎とする相対論的粘性流体方程式と、流体アルゴリズムのテスト計算で利用する流体方程式の解析解について説明する。4 章において、Milne 座標において相対論的粘性流体アルゴリズムを構築する。5 章では、開発した流体コードのテスト計算を行い、新しい流体コードの正当性と性能を確認する。6 章で、原子核衝突実験におけ Kelvin-Helmholtz 不安定性の検証を行う。7 章では、4 章で開発した流体アルゴリズムを用いた相対論的流体モデルを構築する。8 章において、相対論的流体モデルを用いて LHC 実験の解析を行い、QGP の輸送係数の評価を行う。

## 第2章 高エネルギー原子核衝突実験

高エネルギー原子核衝突実験は、1974年にローレンス・バークレイ国立研究所の加速器 BEVALAC において核子あたり 4.2GeV のビームエネルギーで始まった。その後、1986年に、ブルックヘブン国立研究所 (BNL) の Alternating Gradient Synchrotron (AGS) が核子当たりの重心系エネルギー  $\sqrt{s_{NN}} = 5.4\text{GeV}$  で、欧州原子核研究機構 (CERN) の Super Proton Synchrotron (SPS) がビームエネルギー  $\sqrt{s_{NN}} = 19.2\text{GeV}$  で稼働を開始した。2000年には、BNL の Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) が最大ビームエネルギー  $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$  で稼働し、現在では、RHICに加え、2009年より稼働した CERN の Large Hadron Collider (LHC) がビームエネルギー  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76, 5.02\text{TeV}$  で高エネルギー原子核衝突実験を行っている。BEVALAC, AGS, SPS は固定標的型の加速器で、RHIC, LHC は衝突型の加速器である。

### 2.1 実験環境

まず、原子核衝突実験で利用される座標系や用語などについて触れる。我々は、デカルト座標を利用する場合、原子核衝突実験におけるビーム軸を  $z$  軸と表し、ビーム軸に垂直な平面を  $x, y$  軸で表す。 $(x, y)$  平面における、 $x$  軸からの方位角を  $\phi$  と示す。衝突型の加速器である RHIC, LHC は、同じ速度に加速された二つの原子核を衝突させる。二つの原子核の衝突点を  $z = 0$  とする。実験では、衝突軸の周りを円筒状の検出器が囲んでいる。 $(x, y)$  平面における、動径方向の運動量成分を横運動量  $p_T$  と呼ぶ、 $p_T = ((p^x)^2 + (p^y)^2)^{1/2}$ 。粒子の  $z$  軸方向の運動量  $p^z$  の代わりに、次のように定義される、粒子のラピディティー  $y$  (デカルト座標の  $y$  とは異なる) と擬ラピディティー  $\eta$  がよく用いられる、

$$y = \frac{1}{2} \log \left( \frac{E + p^z}{E - p^z} \right) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + v^z}{1 - v^z} \right), \quad (2.1.1)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \log \left( \frac{p + p^z}{p - p^z} \right) = -\log \left( \tan \frac{\theta}{2} \right), \quad (2.1.2)$$

ここで、 $E$  は粒子のエネルギー、 $v^z$  は粒子の  $z$  方向の3元速度、 $p$  は運動量の絶対値、 $\theta$  は運動量  $p$  のビーム軸からの角度である。質量に比べ、運動量が大きな粒子についてはラピディティーと擬ラピディティーが近似的に等しい、 $y \simeq \eta$ 。擬ラピディティーは運動量  $p$  のビーム軸からの角度  $\theta$  のみで決まるため、実験で測定しやすい。実験では、検出器に飛んできた粒子の横運動量  $p_T$ 、方位角  $\phi$ 、擬ラピディティー  $\eta$  を測定する。RHIC において  $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$  の場合の入射原子核のラピディティー (ビームラピディティー) は  $y_b \sim 5.4$ 、ローレンツ因子は  $\gamma \sim 106$  である。LHC において  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$  の場合、入射原子核のラピディティーは  $y_b \sim 8.7$ 、ローレンツ因子は  $\gamma \sim 1470$  である。

## 2.2 高エネルギー原子核衝突実験における時空発展

高エネルギー原子核衝突実験の時空発展描像に関する現在の理解を説明する (図 2.1) . まず, 衝突前の光速近くまで加速された原子核は, ローレンツ収縮により非常に薄い円盤のような形をしている. その原子核の内部では, グルーオンが高密度で飽和したカラーガラス凝縮 (CGC) 状態が実現していると考えられている [91, 92]. RHIC, LHC における高エネルギー原子核衝突実験では, 二つの原子核は衝突の際, 互いにエネルギーを失いつつも通り抜ける. RHIC の  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV の中心衝突では, 元々ラピディティー  $y_b = 5.4$  であった二つの入射原子核は互いにすり抜けた後, ラピディティー  $y \sim 4$  へと減速していると観測から評価された [93]. バリオン数の保存により, 衝突点付近ではバリオンと反バリオンが同程度生成され, バリオン数密度がゼロに近い.

衝突した直後も高密度のグルーオンが存在する. CGC 描像によると, 衝突直後, すり抜けた二つの原子核の間には, 衝突軸に平行なカラー電磁場のフラックスチューブが無数に伸びた状態ができると予想されている [94]. この状態はグラズマと呼ばれている. フラックスチューブの直径は LHC において 0.2fm 程度だと見積もられている [92]. 衝突後, およそ 1fm 以内の時間の間に, パートン間の相互作用により局所熱平衡が達成される. この衝突後 1fm 以内に局所熱平衡が実現するという結論は相対論的流体模型と実験結果との比較から得られたものである [95, 96]. しかし, Boltzmann 方程式と摂動論的 QCD に基づいた微視的計算は, 1fm 以内の局所熱平衡化を説明できず, 早い熱化の問題と呼ばれている. グラズマ状態から局所熱平衡化がどのようにして起こるかは, 現在でも RHIC, LHC の高エネルギー原子核衝突実験における課題の一つである.

超高温の局所熱平衡状態が達成されると, QCD におけるプラズマ状態として QGP が実現する. 通常のプラズマと QCD におけるプラズマの大きく異なる性質の一つは磁場の遮蔽である. QCD プラズマでは静磁場の遮蔽が起きる [97]. 流体のマクロなスケールでは, カラー電場とカラー磁場がどちらも遮蔽され存在しないと考えられている [98]. 局所熱平衡が実現した後, QGP は流体的に膨張しつつ冷えていく (図 2.2) . 温度が相転移温度まで下がるとハドロン相への相転移が起こる. 格子 QCD によると, ゼロバリオン数密度, 高温領域における閉じ込め非閉じ込め相転移とカイラル相転移はどちらもクロスオーバーで, 両者の転移温度はほぼ同じであり, およそ 155MeV であると計算されている [99, 100]. ハドロン相への転移が起こると同時に粒子数の変化が止まる化学凍結が起きる. その後, ハドロン間の弾性散乱により局所熱平衡が維持されつつ, ハドロンガスは集団運動を行い, さらに温度が下がったところで流体近似が破れる. さらに希薄なガスとして Boltzmann 方程式による発展を経た後, 完全に粒子間の相互作用が切れる.

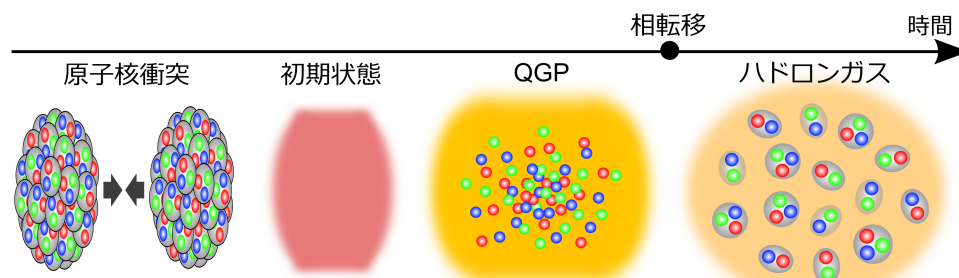


図 2.1: 高エネルギー原子核衝突実験の描像.

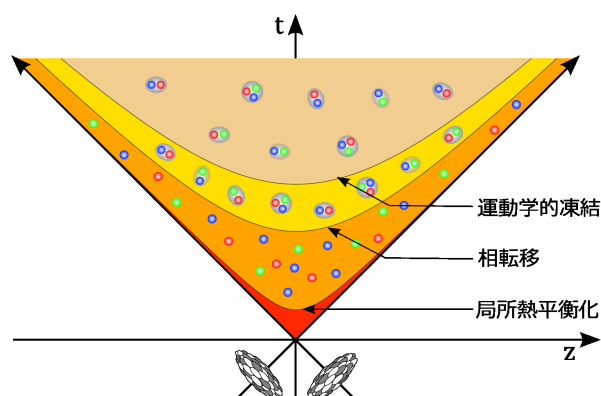


図 2.2: 高エネルギー原子核衝突実験における時間発展. 横軸を衝突軸, 縦軸を時間としている. 中心から離れた領域ほど光速に近い速さで動いており, 時間の遅れが生じる.

## 2.3 流体的振る舞いのシグナル

理論側で QGP を定義する際には常に熱平衡が仮定されている [1, 2, 101]. 高温, 高バリオン数密度状態におけるカイラル対称性の回復についても同様で, 理論研究は静的な場合に限られる. しかし, 原子核衝突実験は, 原子核同士の衝突により粒子の多重生成が起き, 生成された粒子が検出器に飛んでいくという非平衡な系である. ここで, 流体力学が重要な役割を果たす. 流体力学は非平衡系において, 局所的に熱平衡状態と温度  $T$  などの熱力学量を定義し, 空間各点での熱力学量の時間発展  $T(t, x)$  を記述する. 流体力学は局所熱平衡が完全, または近似的に成り立つ状況で有効となる. 原子核衝突実験において, 完全な熱平衡状態でなくとも, 局所熱平衡が成り立つ状況を達成できれば, 流体力学を通して, 静的な系における理論研究を実験結果と比較することができる. 局所熱平衡状態とは, 系の大きさに比べ粒子の平均自由行程が小さい状況で実現する. よって, 局所熱平衡を達成するためには, なるべく大きな体積が必要となるため, 原子核衝突実験では, 鉛 Pb や金 Au など重たい大きな原子核同士を衝突させる. また, 原子核の衝突エネルギーが大きいほど多数の粒子が生成され, 局所熱平衡の過程が有効になる. 原子核同士の衝突現象の研究の歴史は QGP よりも古く, 1950 年に Fermi が初めて, 原子核衝突現象における粒子生成を統計力学で記述しようとした [102]. その後, Landau がより現実的な方法として, 原子核衝突現象における粒子生成に流体力学を応用した [103].

原子核衝突実験における局所熱平衡のシグナルとしては, 主に, 軽いハドロンの生成粒子数比, 生成粒子数の横運動量分布, 生成粒子数の方位角楕円異方性, 光子の生成粒子数の横運動量分布がある. 化学平衡を含む完全な局所熱平衡が実現した場合, ある時空点における粒子数は温度と化学ポテンシャルで決定することができる. 原子核衝突実験における粒子生成数を, ある温度と化学ポテンシャルの値における局所熱平衡分布を用いて説明するモデルが統計モデル [104] である. 統計モデルは AGS, SPS, RHIC, LHC の原子核衝突実験における, 様々なハドロンの生成粒子数の比を再現することができた [105–109]. さらに, 統計モデルの概念に原子核衝突実験の生成物の 3 次元流体力学膨張の効果を取り入れた Blast wave モデル [110] は, AGS から LHC のビームエネルギーの原子核衝突実験における粒子の横運動量分布をフィットすることができた [105, 106, 111, 112].

2000 年に稼働した RHIC 以降, 特に注目を集めた観測量の一つが, ハドロンの生成粒子数の方位

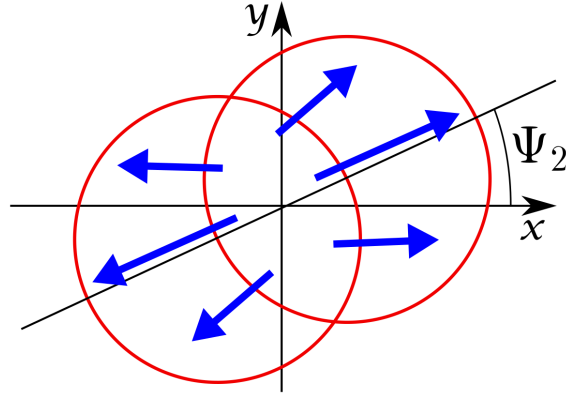


図 2.3: 方位角異方性の概念図. 赤の円は原子核, 青の矢印は 2 次の方位角異方性の起源となる流体の流れ (楕円フロー) を表す. 二つの原子核の重なる領域に楕円型の高圧物質が形成され, 楕円の短軸方向に強い流れが生じる.

角異方性である. 方位角異方性は, 生成粒子数を方位角  $\phi$  について Fourier 展開した際の展開係数  $v_n$  で表される.

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{d^3 N}{p_T dp_T d\phi dy} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{p_T dp_T dy} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n(p_T, y) \cos[n(\phi - \Psi_n)] \right), \quad (2.3.1)$$

$$v_n = \frac{1}{\frac{dN}{p_T dp_T dy}} \int d\phi \cos[n(\phi - \Psi_n)] \frac{dN}{p_T dp_T d\phi dy}, \quad (2.3.2)$$

ここで,  $x$  軸からの角度  $\Psi_n$  と  $z$  軸で張られる平面を反応平面と呼ぶ.  $d^3 N/(p_T dp_T dy d\phi)$  は, 単位横運動量, 単位ラピディティ, 単位方位角当たりの生成粒子数を表す. 粒子生成が等方的におきると  $v_n$  は全ての  $n$  についてゼロとなる. RHIC ではインパクトパラメータの大きな周辺衝突において, SPS と比べ大きな 2 次の方位角異方性が観測された [19–21]. 相対論的完全流体力学の数値計算を用いたモデルは, RHIC で測られた  $v_2$  の結果を再現することができた [22–29]. その物理描像によると, 周辺衝突では, 図 2.3 のように,  $x-y$  平面において衝突原子核の重なる領域に楕円型の流体が形成される. すると, 真空の圧力はゼロであるため, 楕円の短軸方向は長軸方向に比べ圧力勾配が大きくなり, 楕円の短軸方向 (反応平面) の両側に向かって, 強い流体の流れが生じる. この流れを楕円フローと呼び, 反応平面の両側に多数の粒子が放出され, 有限の  $v_2$  が観測される. 完全流体計算が RHIC における  $v_2$  の実験結果を再現したことから, RHIC で生成された QGP は粘性の小さな強結合 QGP と呼ばれた [12, 13]. QCD の漸近的自由性から, QGP 中ではクォーク, グルーオンの相互作用は弱くなるという予想があったため, この結果は衝撃的なものだった.

## 第3章 相対論的粘性流体力学

本章ではまず、我々が数値計算で利用する相対論的粘性流体方程式を紹介する。また、後の章でテスト計算に利用する、相対論的流体方程式の解析解を紹介する。

### 3.1 相対論的粘性流体方程式

相対論的流体力学の基礎方程式は保存電荷とエネルギー・運動量保存の式である。

$$N^\mu_{;\mu} = 0, \quad (3.1.1)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \quad (3.1.2)$$

ここで、 $N^\mu$  は保存電荷カレント、 $T^{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルを表す。非相対論的な場合と異なり、相対論的流体では粒子数が保存しないため、代わりに粒子の持つ保存電荷の流れに注目する。この保存電荷はいくつあってもよい。QGP またはハドロン物質の熱力学的状態は主に温度とバリオン数密度で特徴づけられる。そのため、重イオン衝突実験における相対論的流体計算では保存電荷として、バリオン数密度が注目される。

散逸の無い完全流体では局所熱平衡が完全に成り立っている。局所熱平衡は、流体の4元速度を  $u^\mu$  とし、 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  となる局所静止系において定義される。 $u^\mu$  は次の規格化条件

$$u^\mu u_\mu = 1, \quad (3.1.3)$$

を満たすとする。ここで、 $u^\mu$  は

$$u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}), \quad (3.1.4)$$

という形を持つ。ここで、 $\gamma$  はローレンツ因子、 $\mathbf{v}$  は流体の3次元速度である。非相対論的な場合を含め一般的に  $u^\mu$  の定義は任意性を持つ。相対論的流体では  $u^\mu$  はエネルギーまたは保存電荷の流れによって定義される。散逸のない相対論的完全流体ではエネルギーと保存電荷の流れは一致するため  $u^\mu$  は一意に決まることになる。

この  $u^\mu$  を用いて完全流体の保存電荷カレント、エネルギー・運動量テンソルをテンソル分解すると、次の形が得られる。

$$N^\mu = n u^\mu, \quad (3.1.5)$$

$$T^{\mu\nu} = e u^\mu u^\nu - p \Delta^{\mu\nu}, \quad (3.1.6)$$

ここで、 $n$  は保存電荷密度、 $e$  はエネルギー密度、 $p$  は圧力である。 $\Delta^{\mu\nu}$  は  $u^\mu$  に垂直な方向への射影

テンソルであり、次のように定義される。

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu. \quad (3.1.7)$$

現在、5個の保存方程式に対し、 $n, e, p, v^i$  の6個の変数が存在する。これに状態方程式  $p(n, e)$  を加えることで方程式が閉じる。完全流体では全エントロピーの保存が成り立ち、記述される現象は可逆課程に限られる。

散逸仮定は粘性流体力学により記述される。散逸の効果を考慮した場合、エネルギーの流れと保存電荷の流れは一致せず、 $u^\mu$  の定義が任意性を持つようになる。 $u^\mu$  を保存電荷の流れとして定義した系を Eckart 系 [113] と呼び、 $u^\mu$  をエネルギーの流れとして定義した系を Landau 系 [114] と呼ぶ。RHIC, LHC の高エネルギー原子核衝突実験では、バリオン数密度がゼロに近いことが示されており [109], Landau 系が系の記述に適している。本論文では、これ以降は Landau 系を用いる。Landau 系において、 $u^\mu$  を用いて、保存電荷カレント、エネルギー運動量テンソルをテンソル分解すると以下の形に書ける。

$$N^\mu = nu^\mu + n^\mu, \quad (3.1.8)$$

$$T^{\mu\nu} = eu^\mu u^\nu - (p + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}, \quad (3.1.9)$$

ここで、 $n^\mu, \pi^{\mu\nu}, \Pi$  は粘性テンソルであり散逸の効果を表す。ここで、次の表記を導入する。

$$DA^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv u^\beta A_{;\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad \nabla_\alpha A^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \Delta_\alpha^\beta A_{;\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (3.1.10)$$

$$A^{\langle\mu\nu\rangle} \equiv \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu + \Delta_\beta^\mu \Delta_\alpha^\nu \right) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} \right] A^{\alpha\beta} \quad (3.1.11)$$

$D$  は局所静止系において時間微分となり、 $\nabla_\alpha$  は局所静止系において空間微分となる。 $A^{\langle\mu\nu\rangle}$  は、テンソル  $A^{\mu\nu}$  の  $u^\mu$  に垂直でトレースレスな成分を表す。さらに、次の変数を定義しておく。

$$\theta \equiv u^\mu_{;\mu}, \quad (3.1.12)$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} = \left( \frac{1}{2} (\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \nabla_\alpha u^\alpha \right) \quad (3.1.13)$$

Landau は熱力学第2法則を要請し、現象論的に粘性テンソルの以下の表式を導出した [114]。

$$n^\mu = \sigma T \nabla_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad (3.1.14)$$

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta\sigma^{\mu\nu}, \quad (3.1.15)$$

$$\Pi = -\zeta\theta. \quad (3.1.16)$$

ここで、 $\sigma$  は熱伝導率、 $\eta$  はずり粘性係数、 $\zeta$  は体積粘性係数、 $\mu$  は化学ポテンシャル、 $T$  は温度である。式 (3.1.14)-(3.1.16) は相対論的に拡張された Navier-Stokes 理論である、式 (3.1.14)-(3.1.16) の表式を用いて、保存則において非相対論的極限を取ると非相対論的流体力学における Navier-Stokes 方程式を得ることができる。この流体方程式は、例えばエネルギー運動量テンソルを微分展開し、1次の項までを保持することでも導出することができ、1次の粘性流体方程式と呼ばれる。

しかし、この相対論的に拡張された Navier-Stokes 方程式は放物型の方程式となり、光速を超え

た速度での情報の伝播が許され因果律を破ってしまう [32, 34–36]. それだけでなく、線形解析によると、熱平衡状態に加えた微小摂動が非物理的な不安定性を引き起こしてしまうことが示された. [32–36]. この因果律と不安定性の問題は、式 (3.1.14)–(3.1.16) に、粘性テンソルの大きさについて 2 次の項を導入し、方程式を双曲型にすることで回避された [115, 116]. この 2 次の粘性項を含む流体方程式を 2 次の粘性流体方程式と呼ぶ. 2 次の粘性流体方程式においては、粘性テンソル  $\pi^\mu, \pi^{\mu\nu}, \Pi$  が独立な変数として扱われ、保存則に加え粘性テンソルの時間発展を記述する方程式が表れる. 粘性テンソルの運動方程式は次のように書くことができる.

$$\Delta^\mu_\alpha Dn^\alpha = -\frac{1}{\tau_n}(n^\mu - n^\mu_{\text{NS}}) - I_n^\mu, \quad (3.1.17)$$

$$\Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta D\pi^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\tau_\pi}(\pi^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu}_{\text{NS}}) - I_\pi^{\mu\nu}, \quad (3.1.18)$$

$$D\Pi = -\frac{1}{\tau_\Pi}(\Pi - \Pi_{\text{NS}}) - I_\Pi, \quad (3.1.19)$$

ここで、 $I_n^\mu, I_\pi^{\mu\nu}, I_\Pi$  は、粘性テンソルの大きさについて 2 次の項を表す. 熱力学量や流束の時空微分は粘性テンソルと同じオーダーであると判定され、 $\pi^{\mu\nu}\theta$  などは 2 次の項となる. 右辺の第一項は、粘性テンソルの Navier-Stokes 理論への緩和を表し、その緩和時間は  $\tau_n, \tau_\pi, \tau_\Pi$  である. 2 次の粘性流体方程式には、緩和時間など新たな輸送係数が表れる. Boltzmann 方程式などの微視的理論による解析により、マクロな物理量（熱力学量や粘性テンソル）を用いた輸送係数の表式が得られる.

2 次の粘性流体方程式の導出方法は複数提案されており、その表式は現在でも確率していない. 従来、原子核衝突実験分野において 2 次の粘性流体方程式として利用されてきた Israel-Stewart 方程式は、Boltzmann 方程式からモーメント法によって導出される [115, 116]. しかし、モーメント法はその導出過程に任意性を持っており、その任意性の範囲で異なる方程式が導かれる問題を持つ [117]. また、従来の Israel-Stewart 方程式は Boltzmann 方程式の解析解を再現できないことが示された [118–122]. 近年、モーメント法に基づいた新たな流体方程式の導出法が提案されている [123, 124]. この方程式は緩和時間近似を用いた際の Boltzmann 方程式の解析解との良い一致を示した [123, 125]. 我々は、高エネルギー原子核衝突実験における相対論的粘性流体計算において、この近年導出された 2 次の相対論的流体方程式 [123, 124] を利用する. そこでは、粘性テンソルの運動方程式は次のように書かれる.

$$\tau_\Pi D\Pi + \Pi = -\zeta\theta - \delta_{\Pi\Pi}\Pi\theta + \lambda_{\Pi\pi}\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \quad (3.1.20)$$

$$\tau_\pi D\pi^{\langle\mu\nu\rangle} + \pi^{\mu\nu} = 2\eta\sigma^{\mu\nu} - \delta_{\pi\pi}\pi^{\mu\nu}\theta + \varphi_7\pi^\mu_\alpha\pi^{\nu\alpha} - \tau_{\pi\pi}\pi^\mu_\alpha\pi^{\nu\alpha} + \lambda_{\pi\Pi}\Pi\sigma^{\mu\nu}, \quad (3.1.21)$$

式 (3.1.17), (3.1.18) の表式に直すと、

$$I_\Pi = \frac{\delta_{\Pi\Pi}}{\tau_\Pi}\Pi\theta - \frac{\lambda_{\Pi\pi}}{\tau_\Pi}\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \quad (3.1.22)$$

$$I_\pi^{\mu\nu} = \frac{\delta_{\pi\pi}}{\tau_\pi}\pi^{\mu\nu}\theta - \frac{\varphi_7}{\tau_\pi}\pi^\mu_\alpha\pi^{\nu\alpha} + \frac{\tau_{\pi\pi}}{\tau_\pi}\pi^\mu_\alpha\pi^{\nu\alpha} - \frac{\lambda_{\pi\Pi}}{\tau_\pi}\Pi\sigma^{\mu\nu}, \quad (3.1.23)$$

となる. 以上の表式は従来の Israel-Stewart 方程式と同様、14 モーメント近似を利用している. Boltzmann 方程式から、上記の式が持つ輸送係数の表式も得られている. 超相対論的極限 ( $m/T \rightarrow 0$ ) を取った場合、体積粘性はゼロとなり、 $\delta_{\pi\pi}, \tau_{\pi\pi}, \varphi_7$  の項のみが残る [126]. 14 モーメント法を用いて、その場合の  $\delta_{\pi\pi}, \tau_{\pi\pi}, \varphi_7$  の表式も導出された. 超相対論的極限を緩め、温度が粒子質量に比べ



て高い近似の下で, 14 モーメント近似と緩和時間近似を用いて残りの輸送係数が導出された [127]. 緩和時間近似を利用した場合  $\varphi_7$  の項はゼロとなるが,  $\delta_{\pi\pi}, \tau_{\pi\pi}$  については参考文献 [126] と [127] で結果は同じであった. この二つの参考文献により導出された輸送係数の結果を以下にまとめた. 体積粘性の運動方程式に表れる輸送係数は次のようになる.

$$\frac{\zeta}{\tau_{\Pi}} = 15 \left( \frac{1}{3} - c_s^2 \right)^2 (e + p), \quad \frac{\delta_{\Pi\Pi}}{\tau_{\Pi}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\lambda_{\Pi\pi}}{\tau_{\Pi}} = \frac{8}{5} \left( \frac{1}{3} - c_s^2 \right). \quad (3.1.24)$$

ずり粘性の運動方程式に表れる輸送係数は次のように書かれる.

$$\frac{\eta}{\tau_{\pi}} = \frac{e + p}{5}, \quad \frac{\delta_{\pi\pi}}{\tau_{\pi}} = \frac{4}{3}, \quad \frac{\tau_{\pi\pi}}{\tau_{\pi}} = \frac{10}{7}, \quad \frac{\lambda_{\pi\Pi}}{\tau_{\pi}} = \frac{6}{5}, \quad \varphi_7 = \frac{9}{70p}. \quad (3.1.25)$$

参考文献 [127] では, 体積粘性の運動方程式において, 体積粘性テンソルとずり粘性テンソルの結合を表す  $\lambda_{\Pi\pi}$  の項が 1 次の項 ( $-\zeta\theta$ ) と同程度に大きくなることがあり, 体積粘性テンソルの記述に重要であると報告された. 今回, 高エネルギー原子核衝突実験における流体計算では, バリオン数密度をゼロと近似し, 保存電荷の式は考えない.

### 3.2 Milne 座標系における相対論的粘性流体方程式

RHIC, LHC における高エネルギー重イオン衝突実験における系は, 衝突軸方向のローレンツブースト変換の下での近似的な不変性を持っている [128–134]. 空間 1 次元の流体方程式において, 完全なローレンツブースト不変性がある場合, 流体方程式を解析的に解くことができ, その解を Bjorken スケーリング解と呼ぶ [135]. RHIC, LHC における相対論的流体計算では衝突軸方向の発展を Bjorken スケーリング解と仮定し次元を一つ落とした空間 2 次元の計算が主に行われてきた. ローレンツブースト不変な膨張の記述には Milne 座標が適している. 重イオン衝突実験におけるビーム軸を  $z$  とする. Milne 座標は  $(t, z)$  平面において, 次のように定義される固有時間  $\tau$  ラピディティー  $\eta$  を用いる座標である.

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta = \frac{1}{2} \log \left( \frac{t+z}{t-z} \right) = \tanh^{-1} \left( \frac{z}{t} \right), \quad (3.2.1)$$

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta. \quad (3.2.2)$$

本論文では, 3 ~ 6 章では, Milne 座標におけるラピディティーを  $\eta$  と表し, 7, 8 章では  $\eta$  を粒子の疑ラピディティーを表すために用いる. デカルト座標から Milne 座標への 4 元ベクトルの座標変換則は次のように与えられる.

$$u^\tau = \cosh \eta u^t - \sinh \eta u^z, \quad (3.2.3)$$

$$u^\eta = -\frac{\sinh \eta}{\tau} u^t + \frac{\cosh \eta}{\tau} u^z, \quad (3.2.4)$$

4 元ベクトルの  $x, y$  成分  $u^x, u^y$  は不変である. 流体の 4 元速度は Milne 座標において, 3 次元速度とともに次の形を持つ.

$$u^\alpha = (u^\tau, u^x, u^y, u^\eta) = \gamma(1, v^x, v^y, v^\eta), \quad (3.2.5)$$

ここで,  $v^i = u^i/u^\tau$  ( $i = x, y, \eta$ ) は Milne 座標における 3 次元速度,  $\gamma$  はローレンツ因子,

$$\gamma = (1 - (v^x)^2 - (v^y)^2 - \tau^2(v^\eta)^2)^{-1/2}, \quad (3.2.6)$$

である. 3 次元速度の Milne 座標とデカルト座標の間の座標変換則は次のように与えられる.

$$v^\eta = \frac{1 - \sinh \eta + v^z \cosh \eta}{\tau \cosh \eta - v^z \sinh \eta}, \quad (3.2.7)$$

$$v^z = \frac{\sinh \eta + \tau v^\eta \cosh \eta}{\cosh \eta + \tau v^\eta \sinh \eta} \quad (3.2.8)$$

$$u^i/u^\tau = \frac{u^i/u^t}{\cosh \eta - v^z \sinh \eta}, \quad (i = x, y). \quad (3.2.9)$$

Milne 座標におけるメトリックテンソルは  $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1/\tau^2)$  となる. 有限の値を持つクリストッフェルシンボルの成分は次のようになる.

$$\Gamma_{\eta\tau}^\eta = \Gamma_{\tau\eta}^\eta = \frac{1}{\tau}, \quad \Gamma_{\eta\eta}^\tau = \tau. \quad (3.2.10)$$

Milne 座標においては, 式 (3.1.1), (3.1.2) のエネルギー運動量保存則は次のように表される.

$$\partial_\tau N^\tau + \partial_i N^i + \partial_\eta N^\eta = -N^\tau/\tau, \quad (3.2.11)$$

$$\partial_\tau T^{\tau j} + \partial_i T^{ij} + \partial_\eta T^{\eta j} = -T^{\tau j}/\tau, \quad (3.2.12)$$

$$\partial_\tau T^{\tau\eta} + \partial_i T^{i\eta} + \partial_\eta T^{\eta\eta} = -3T^{\tau\eta}/\tau, \quad (3.2.13)$$

$$\partial_\tau T^{\tau\tau} + \partial_i T^{i\tau} + \partial_\eta T^{\eta\tau} = -T^{\tau\tau}/\tau - \tau T^{\eta\eta}, \quad (3.2.14)$$

ここで,  $i, j = x, y$  である. Milne 座標では保存則 (3.2.11)-(3.2.14) が右辺にソース項を持っている. このソース項は Milne 座標におけるラピディティ軸の空間スケールが  $\tau$  とともに大きくなる効果を表す. 保存則 (3.2.11)-(3.2.14) を次のように書き変えることができる.

$$\partial_\tau(\tau N^\tau) + \partial_i(\tau N^i) + \partial_\eta(\tau N^\eta) = 0, \quad (3.2.15)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau j}) + \partial_i(\tau T^{ij}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta j}) = 0, \quad (3.2.16)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau\eta}) + \partial_i(\tau T^{i\eta}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta\eta}) = -2T^{\tau\eta}, \quad (3.2.17)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau\tau}) + \partial_i(\tau T^{i\tau}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta\tau}) = -\tau^2 T^{\eta\eta}. \quad (3.2.18)$$

ここで, 座標が  $\tau$  とともに広がる効果を左辺のヤコビアン  $\tau$  で吸収した. 式 (3.2.17) と (3.2.18) はまだソース項を持っている. これは,  $T^{\tau\tau}$  と  $T^{\tau\eta}$  が 4 元運動量の  $\tau$  成分  $p^\tau$ ,  $\eta$  成分  $p^\eta$  の密度を表したもので,  $p^\tau, p^\eta$  が保存量でないためである. Milne 座標において, 保存量であるエネルギーと運動量  $z$  成分の密度は  $T^{\tau t}, T^{\tau z}$  で表される.  $T^{\tau t}, T^{\tau z}$  は  $T^{\tau\tau}, T^{\tau\eta}$  と座標変換により次のように結びついている.

$$T^{\tau t} = \cosh \eta T^{\tau\tau} + \tau \sinh \eta T^{\tau\eta}, \quad (3.2.19)$$

$$T^{\tau z} = \sinh \eta T^{\tau\tau} + \tau \cosh \eta T^{\tau\eta}. \quad (3.2.20)$$

Milne 座標系において,  $T^{\tau t}, T^{\tau z}$  に注目することで, エネルギー運動量保存則を露わに表す方程式

を得ることができる [136].

$$\partial_\tau(\tau N^\tau) + \partial_i(\tau N^i) + \partial_\eta(\tau N^\eta) = 0, \quad (3.2.21)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau j}) + \partial_i(\tau T^{ij}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta j}) = 0, \quad (3.2.22)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau z}) + \partial_i(\tau T^{iz}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta z}) = 0, \quad (3.2.23)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau t}) + \partial_i(\tau T^{it}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta t}) = 0. \quad (3.2.24)$$

ここで、式 (3.2.23) は運動量  $z$  成分の保存を表し、 $T^{\eta z}$  は  $\eta$  軸に垂直な面を通過する運動量  $z$  成分の流速である。式 (3.2.24) はエネルギーの保存を表す。

高エネルギー重イオン衝突実験において Milne 座標を利用した流体計算はソース項を持つ式 (3.2.15)-(3.2.18) を利用している。ソース項の存在は、数値計算において数値計算の誤差の範囲で保存則を破ることになる。我々はソース項を持たない式 (3.2.21)-(3.2.24) を利用し、保存則を露わに保った流体アルゴリズムを構築する。

粘性テンソルの運動方程式は Milne 座標において次のように書くことができる。

$$(\partial_\tau + v^i \partial_i) n^\mu = -\frac{1}{\gamma \tau_n} (n^\mu - n_{\text{NS}}^\mu) - I_n^\mu - J_n^\mu - K_n^\mu, \quad (3.2.25)$$

$$(\partial_\tau + v^i \partial_i) \pi^{\mu\nu} = -\frac{1}{\gamma \tau_\eta} (\pi^{\mu\nu} - \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}) - I_\pi^{\mu\nu} - J_\pi^{\mu\nu} - K_\pi^{\mu\nu}, \quad (3.2.26)$$

$$(\partial_\tau + v^i \partial_i) \Pi = -\frac{1}{\gamma \tau_\Pi} (\Pi - \Pi_{\text{NS}}) - I_\Pi, \quad (3.2.27)$$

ここで、

$$J_n^\tau = \tau v^\eta n^\eta, \quad J_n^j = 0, \quad (3.2.28)$$

$$J_n^\eta = \frac{1}{\tau} v^\eta n^\tau + \frac{1}{\tau} n^\eta, \quad (3.2.29)$$

$$J_\pi^{\tau\tau} = 2\tau v^\eta \pi^{\tau\eta}, \quad J_\pi^{\tau j} = \tau v^\eta \pi^{j\eta}, \quad (3.2.30)$$

$$J_\pi^{xx} = J_\pi^{yy} = J_\pi^{xy} = 0, \quad (3.2.31)$$

$$J_\pi^{i\eta} = \frac{1}{\tau} \pi^{i\eta} + \frac{1}{\tau} v^\eta \pi^{i\tau}, \quad (3.2.32)$$

$$J_\pi^{\eta\eta} = \frac{2}{\tau} v^\eta \pi^{\tau\eta} + \frac{2}{\tau} \pi^{\eta\eta}, \quad (3.2.33)$$

$$K_n^\mu = n^\lambda v^\mu D u_\lambda, \quad (3.2.34)$$

$$K_\pi^{\mu\nu} = (\pi^{\lambda\mu} v^\nu + \pi^{\lambda\nu} v^\mu) D u_\lambda, \quad (3.2.35)$$

$j = x, y, \lambda = \tau, x, y, \eta$ .  $J_n^\tau, J_\pi^{\mu\nu}$  は共変微分から現れたソース項を表す。  $K_n^\mu, K_\pi^{\mu\nu}$  は粘性テンソルの拘束条件  $n^\mu u_\mu = 0, \pi^{\mu\nu} u_\mu = 0, \pi_\mu^\mu = 0$  を保証している。

### 3.3 相対論的流体方程式の解析解

流体方程式は非線形であり、解くためには一般に数値計算が必要となる。しかし、ある特定の状況では、流体方程式を解析的に解くことができる。その最も簡単な例は定常状態である。  $\partial_i T^{\mu\nu} = 0$  のとき、  $\partial_t T^{\mu\nu} = 0$  となることはすぐ分かる。このような流体力学における解析解の存在する問題

は数値流体力学において重要な役割を持つ。解析解の知られている問題に対し流体シミュレーションを行い、その数値解と解析解の比較を行うことで流体アルゴリズムが正しく動いていることを確認できる。解析解と数値解との比較から、数値計算スキームの優劣を判断したり、数値計算スキームを改良する際の指針をたてることができる。本研究でも、開発した流体アルゴリズムに対し解析解との比較を行った。この節では、5章のテスト計算で利用する相対論的流体方程式の解析解を紹介する。

### 3.3.1 Riemann 問題

Riemann 問題は流体力学における古典的な初期値問題であり、数値流体力学において重要な役割を持っている。ここでは、相対論的流体力学におけるリーマン問題の解析解について説明する。その初期条件は、二つの一様状態が不連続面により区切られているというものである。リーマン問題は完全流体の場合には解析解が知られており、相対論的流体力学においては、初期速度が不連続面に対し水平方向の成分を持たない場合の解析解が1994年に導出された [137]。非相対論的な流体力学におけるリーマン問題では、不連続面に対し水平方向の速度成分は解に影響を与えないが、相対論的流体においては、ローレンツ因子を通して水平方向の速度成分が解に非自明な影響を与える。2000年には初期速度が水平方向の成分を持つ一般的な場合についても解析解が導出された [138]。

相対論的完全流体における流体方程式を流体変数を用いて書いておく。

$$\partial_t \begin{pmatrix} D \\ m^i \\ E \end{pmatrix} + \partial_j \begin{pmatrix} Dv^j \\ m^i v^j + p\delta^{ij} \\ m^j \end{pmatrix} = 0, \quad (3.3.1)$$

ここで、 $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$  として、保存量を次のように表した。

$$D \equiv \gamma n, \quad (3.3.2)$$

$$m^i \equiv (e + p)\gamma^2 v^i, \quad (3.3.3)$$

$$E \equiv (e + p)\gamma^2 - p, \quad (3.3.4)$$

リーマン問題の初期条件は図 3.1 のように与えられる。 $(e_L, p_L, \mathbf{v}_L)$  と  $(e_R, p_R, \mathbf{v}_R)$  で与えられる一様状態が不連続面により区切られている。初期の不連続面は  $x$  軸に垂直だとする。

不連続面においては微分方程式を考えることができないが、保存則は成立する。不連続面において電荷、エネルギー、運動量の保存を表す関係式は Rankine-Hugoniot 関係式と呼ばれる。リーマン問題の初期条件の二つの一様状態として任意のものを用意した場合、一般にその間の不連続面は Rankine-Hugoniot 関係式を満たさない。よって、初期の不連続面は不安定であり、次の瞬間には複数の不連続を含む波へと分裂する。Rankine-Hugoniot 関係式を満たす安定した不連続面を衝撃波と呼ぶ。Rankine-Hugoniot 関係式は次のように表される [139]。

$$[J^\mu]n_\mu = 0, \quad (3.3.5)$$

$$[T^{\mu\nu}]n_\nu = 0, \quad (3.3.6)$$

ここで、 $[q] \equiv q_a - q_b$  であり、変数  $q$  の衝撃波の前後の値を  $q_a, q_b$  と書いてある。 $n_\mu$  は 4 次元時空

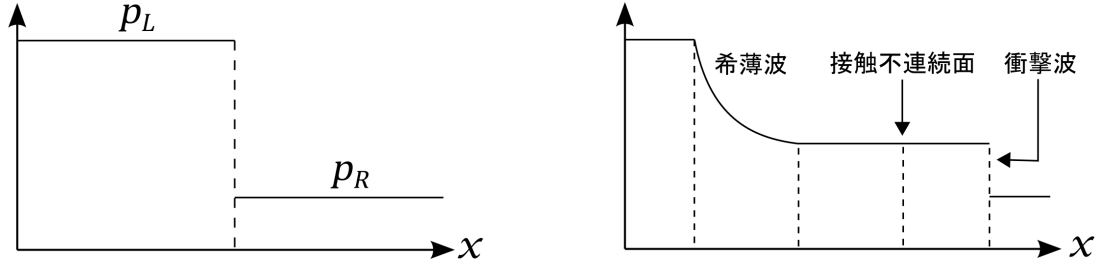


図 3.1: 左図はリーマン問題の初期条件における圧力分布. 右図はリーマン問題の解: 初期の不連続面が3つの不連続を持つ波 (希薄波, 接触不連続面, 衝撃波) へ分裂した様子.

における衝撃波面の超曲面に垂直なベクトルであり, 衝撃波の速度  $v_{sh}$  とローレンツ因子  $\gamma_{sh}$  を用いて,  $n_\mu = \gamma_{sh}(v_{sh}, 1, 0, 0)$  と与えられる.

この Rankine-Hugoniot 関係式の特別な場合として, 次の関係式がある.

$$p_a - p_b = 0, \quad (3.3.7)$$

$$v_a^x - v_b^x = 0. \quad (3.3.8)$$

不連続面に垂直方向の速度成分と圧力が連続になっていれば, Rankine-Hugoniot 関係式はすべて満たされ, 他の流体変数にはどのような跳びがあってもよい. この不連続面を衝撃波と区別して接触不連続面と呼ぶ.

安定な不連続面として, 衝撃波と接触不連続面の他に, 流体変数自身には跳びがないが, 流体変数の微分が不連続になっているものも許される. このような不連続面は希薄波と呼ばれる波として表れる. 希薄波は時間とともに薄まりながら進む波である. 希薄波の境界で流体変数の微分が不連続になる. 希薄波は座標に  $\xi = x/t$  の形を通して依存し, 希薄波を記述する関係式は次のように表される.

$$(v^x - \xi) \frac{dn}{d\xi} + \{n\gamma^2 v^x (v^x - \xi) + n\} \frac{dv^x}{d\xi} + n\gamma^2 v^y (v^x - \xi) \frac{dv^y}{d\xi} + n\gamma^2 v^z (v^x - \xi) \frac{dv^z}{d\xi} = 0, \quad (3.3.9)$$

$$(e + p)\gamma^2 (v^x - \xi) \frac{dv^x}{d\xi} + (1 - v^x \xi) \frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (3.3.10)$$

$$(e + p)\gamma^2 (v^x - \xi) \frac{dv^y}{d\xi} + v^y \frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (3.3.11)$$

$$(e + p)\gamma^2 (v^x - \xi) \frac{dv^z}{d\xi} + v^z \frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (3.3.12)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = c_s^2 \frac{e + p}{n} \frac{dn}{d\xi}, \quad (3.3.13)$$

この連立方程式において非自明な解が存在するのは, その行列式がゼロのときであり, 独立な方程式の数は4個となる.

リーマン問題における初期の不連続面が分裂して出現し得る波は衝撃波, 接触不連続面, 希薄波の3つである. 状態方程式が与えられたとして, 一つの状態を特徴づける独立な流体変数の数は5個である. 衝撃波に関しては, 衝撃波速度の自由度を除けば4つの関係式が存在する. リーマン問題の初期条件のインプットは2つの一様状態の流体変数で10個ある. 例えば, 初期の不連続面が3つの波へと分裂した場合, 左右の一様状態の間に二つの新たな状態が表れ, その中間状態は10個

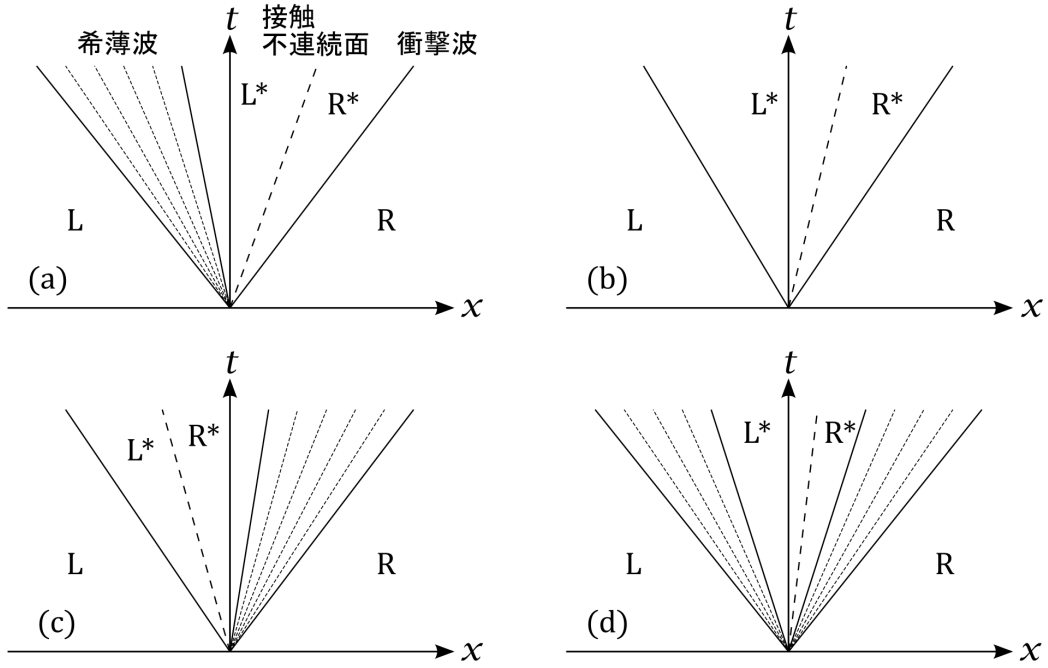


図 3.2: リーマン問題の可能な解のパターン. (a) 左側に希薄波, 中心に接触不連続面, 右側に衝撃波が発展.  $p_L \geq p_{L^*} = p_{R^*} > p_R$ . (b) 二つの衝撃波が接触不連続面を挟んで発展.  $p_L < p_{L^*} = p_{R^*} > p_R$ . (c) 左側に衝撃波, 中心に接触不連続面, 右側に希薄波が発展.  $p_L < p_{L^*} = p_{R^*} \leq p_R$ . (d) 二つの希薄波が接触不連続面を挟んで発展.  $p_L \geq p_{L^*} = p_{R^*} \leq p_R$ .

の変数を持つ. 3つの波として, 接触不連続面 (2つの方程式を持つ) 一つと, 衝撃波, 希薄波 (それぞれ4つの独立な方程式を持つ) の組み合わせから二つの波が表れれば方程式の数も合計10個となり, 10個の変数を持つ中間状態を決定することができ, 初期の二つの一様状態を三つの不連続面を持つ波と新たな二つの状態を通して結びつけることができる. 同じ考え方でこれ以外のパターンは許されることが分かる. このとき, 衝撃波, 希薄波は必ず接触不連続面を間に挟んで現れることが分かっている. よって, リーマン問題の可能な解のパターンは図3.3.1の4パターンとなる.

[137, 138] では次の, 比熱比  $\Gamma$  一定の状態方程式,

$$\frac{e+p}{n} = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p}{n}, \quad \frac{e+p}{n} c_s^2 = \frac{p}{n}, \quad (3.3.14)$$

の元でリーマン問題の解析解が求められた. まず, 実際に Rankine-Hugoniot 関係式から変数の自由度を減らす手順を示す. 式 (3.3.5), (3.3.6) の Rankine-Hugoniot 関係式を具体的に次ように書く

ことができる.

$$\left[ \frac{1}{D} \right] = -\frac{\gamma_{sh}}{j} [v^x], \quad (3.3.15)$$

$$[(e+p)\gamma v^x] = \frac{\gamma_{sh}}{j} [p], \quad (3.3.16)$$

$$[(e+p)\gamma v^y] = 0, \quad (3.3.17)$$

$$[(e+p)\gamma v^z] = 0, \quad (3.3.18)$$

$$\left[ (e+p)\gamma - \frac{p}{D} \right] = \frac{\gamma_{sh}}{j} [pv^x], \quad (3.3.19)$$

$v_{sh}$  は衝撃波面の速度であり,  $\gamma_{sh} \equiv (1 - v_{sh}^2)^{1/2}$ .  $j$  は衝撃波の前後で不変な質量流束で,

$$j \equiv \gamma_{sh} D_a (v_{sh} - v_a^x) = D_b (v_{sh} - v_b^x), \quad (3.3.20)$$

と表される. (3.3.15), (3.3.16), (3.3.19) から  $v_b^x$  を次のように書くことができる.

$$v_b^x = \frac{(e_a + p_a)\gamma_a v_a^x + \gamma_{sh}(p_b - p_a)n/j}{(e_a + p_a)\gamma_a + (p_b - p_a)(\gamma_{sh}v_a^x n/j + 1/\gamma_a)}. \quad (3.3.21)$$

リーマン問題では衝撃波の前の状態  $(e_a, p_a, \mathbf{v}_a)$  が初期条件で与えられている. 残りの変数は  $p_b, j$  である. 式 (3.3.16)–(3.3.19) より次の二つの関係式を導くことができる.

$$\left[ \left( \frac{e+p}{n} \right)^2 \right] = \left( \frac{e+p}{n^2} + \frac{e+p}{n^2} \right) [p], \quad (3.3.22)$$

$$j^2 = -\frac{[p]}{[(e+p)/n^2]}. \quad (3.3.23)$$

ここで, 状態方程式を使うと, (3.3.22) より, エンタルピー  $(e+p)/n$  を  $p_b$  の関数として表すことができる. このエンタルピーと状態方程式を (3.3.23) に代入することで,  $j$  についても  $p_b$  の関数として表すことができる. 今, 衝撃波の後ろの状態について,  $p_b$  以外の流体変数を  $p_b$  と既知の  $(e_a, p_a, \mathbf{v}_a)$  で表すことができる. これで, Rankine-Hugoniot 関係式から減らせる限りの自由度を減らしたことになる.  $v_b^x$  の表式は式 (3.3.21) により与えられる.

$$v_b^x = \mathcal{S}_{\rightleftharpoons}(p_b). \quad (3.3.24)$$

衝撃波の進行方向によって二つの表式がある.

希薄波に関しても同様のことができる

$$v_b^x = \mathcal{R}_{\rightleftharpoons}(p_b). \quad (3.3.25)$$

初期の不連続の左右の状態を  $L, R$ , 新しく表れる中間の状態を  $L^*, R^*$  と書く. 初期条件から図 3.3.1 の 4 つのパターンのどれが実現するか分かり, 中間の二つの状態の速度  $v_{R^*}^x, v_{L^*}^x$  を (3.3.24), (3.3.25) より圧力のみによる関数として書くことができる. 最後に接触不連続面における関係式 (3.3.8)

$$v_{R^*}^x(p) = v_{L^*}^x(p) \quad (3.3.26)$$

を満たす圧力を求めれば、すべての状態が決定される。

### 3.3.2 Landau-Khalatnikov 解

流体力学を最初に原子核衝突実験に応用したのが Landau である [103]。Landau の描像では、ローレンツ収縮により薄い円盤のようになった原子核同士が衝突することで、薄い円盤型の高温、高密度物質が生成される。この円盤の薄さは原子核の半径よりもはるかに小さいため、その後、流体は衝突軸方向 ( $z$  方向) に 1 次元的な発展をする。その初期条件は、

$$\begin{aligned} p &= p_0 \quad \text{for } |z| \leq \Delta/2, \\ p &= 0, \quad \text{for } |z| \geq \Delta/2, \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

$v^z = 0$ , である。  $\Delta$  の円盤の厚さを表している。後の時間には不連続面から希薄波が発生する。希薄波は真空へ向かって光速で進み、物質内部に向かって音速で進む [140]。時間が経つと、物質の中心に両側から希薄波が到達し、希薄波に挟まれた中心付近により複雑な流れが形成される。Landau-Khalatnikov 解は長い時間が経った後の、この複雑な領域を記述する解である [103, 141, 142]。

まず、2 次元の完全流体方程式を次のように書く、

$$\frac{\partial(s \cosh y)}{\partial t} + \frac{\partial(s \sinh y)}{\partial z} = 0, \quad (3.3.28)$$

$$\frac{\partial(T \sinh y)}{\partial t} + \frac{\partial(T \cosh y)}{\partial z} = 0, \quad (3.3.29)$$

ここで、 $s$  はエントロピー密度、 $T$  は温度、 $y$  は流速のラピディティであり、 $y = \tanh^{-1} v^z$  と定義されている。ポテンシャル  $\phi$  を導入することで、上記の 2 式 (3.3.28), (3.3.29) は次の関係式で表される。

$$d\phi = -T \cosh y \, dt + T \sinh y \, dz \quad (3.3.30)$$

この  $\phi$  が求まれば、流体の状態がすべて決まる。 $\phi$  をルジャンドル変換する。

$$d\chi = (t \cosh y - z \sinh y) dT + T(t \sinh y - z \cosh y) dy. \quad (3.3.31)$$

式 (3.3.31) は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} + (1 - c_s^2) \frac{\partial \chi}{\partial w}, \quad (3.3.32)$$

ここで、

$$w = \ln \frac{T}{T_0}, \quad (3.3.33)$$

と定義されている。この微分方程式に Landau の境界条件を課す。その境界条件は物質が中心で静止しており、注目している領域が希薄波で挟まれているというものである。その結果、 $\chi$  の解析解が次のように得られる。

$$\chi = -\frac{T_0 \Delta}{2c_s} e^w \int_{c_s y}^{-w} e^{(1+\beta)w'} I_0 \left( \beta \sqrt{w'^2 - c_s^2 y^2} \right) dw'. \quad (3.3.34)$$



この  $\chi$  により流体変数が決定される。  $\chi$  と流体変数の間の関係式は次のようにまとめられる。

$$y = \eta + \delta, \quad \delta \equiv \tanh^{-1} \left[ \frac{1}{T} \frac{\partial \chi / \partial y}{\partial \chi / \partial T} \right] \quad (3.3.35)$$

$$\tau^2 = \left( \frac{\partial \chi}{\partial T} \right)^2 - \left( \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \quad (3.3.36)$$

ここで,  $\tau$  は固有時間,  $\eta$  は Milne 座標のラピディティである。

ここで,  $w$  が非常に大きいとき, つまり,  $T \ll T_0$  の状況を考える。さらに,  $c_s^2 = 1/3$  とすると, 式 (3.3.34) は,

$$\chi \simeq T_0 \Delta \exp \left( -w + \sqrt{w^2 - c_s^2 y^2} \right) \quad , \quad (3.3.37)$$

となる。この  $\chi$  により, 次のように流速とエネルギー密度の解が求まる。

$$y = \frac{1}{2} \log \left( \frac{t+z}{t-z} \right) = \eta, \quad (3.3.38)$$

$$e = e_0 \exp \left\{ -\frac{4}{3} \left[ 2 \ln \left( \frac{\tau}{\Delta} \right) - \sqrt{\ln \left( \frac{\tau}{\Delta} \right)^2 - \eta^2} \right] \right\}. \quad (3.3.39)$$

流速は次節で見る Bjorken スケーリング解と同じになっている。このエネルギー密度の表式 (3.3.39) は, RHIC, LHC の原子核衝突実験における生成粒子数のラピディティ分布を良くフィッティングできることが分かっている [143–146]。しかし, RHIC, LHC の高エネルギー原子核衝突実験では, 原子核同士はすり抜けると理解されており, Landau の初期条件は適していないと思われる。にもかかわらずなぜ式 (3.3.39) が実験データをうまくフィッティングできるかという点は, まだ理解されていない。

### 3.3.3 Bjorken スケーリング解

Bjorken は Landau とは異なる, 高エネルギーの原子核衝突実験に適した初期条件を提案し, この初期条件の下で流体方程式を解析的に解いた [135]。この解は Bjorken スケーリング解と呼ばれる。原子核を  $z$  軸方向に光速近くに加速すると, ローレンツ収縮により原子核の幅はゼロに近づく。このとき,  $t-z$  の 2 次元空間で見ると, 系に物理的なスケールは無くなり,  $z$  軸方向のブースト変換で系は不変となる。衝突点では, 後の時間も流体が静止していると仮定する。この仮定を満たし, ブースト変換で不変となる 3 元速度の表式は次のようになる。

$$v^z = \frac{z}{t}. \quad (3.3.40)$$

実際, 高エネルギー原子核衝突実験では, 中心ラピディティ領域における粒子の生成量にブースト不変性が表れている [128–134]。Bjorken はこの描像を流体方程式の初期条件に利用した。2 次元完全流体方程式に (3.3.40) を代入すると,

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{e+p}{\tau} = 0, \quad (3.3.41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad (3.3.42)$$

と二つの独立の方程式となる．ここで、電荷密度  $n = 0$  とする．すると、式 (3.3.42) と熱力学関係式  $dp = sdT + nd\mu$  より

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0. \quad (3.3.43)$$

すべての熱力学量のラピディティ依存性は無くなる．また、式 (3.3.41) と熱力学関係式を使うと、

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{s}{\tau} = 0, \quad (3.3.44)$$

となり、エントロピーの時間発展が次のように決定される．

$$s\tau = s_0\tau_0 = \text{const}. \quad (3.3.45)$$

ここで、状態方程式として  $p = \lambda e$  の表式を用いると、その他の熱力学量の解析解が次のように得られる．

$$e = e_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1+\lambda}, \quad (3.3.46)$$

$$T = T_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\lambda}, \quad (3.3.47)$$

Bjorken はこの流体発展を元に、高エネルギー原子核衝突実験において局所熱平衡化が実現した時点での初期エネルギー密度を見積もる関係式を導いた．

$$e_{0,Bj} = \frac{1}{\pi R^2 \tau_0} \frac{dE_T}{dy}. \quad (3.3.48)$$

初期の局所熱平衡化時間を  $\tau_0 = 1\text{fm}$  とした場合、RHIC の中心衝突における初期エネルギー密度は  $5.5\text{GeV/fm}$  と計算された [147]．これは QGP 相への相転移に必要なエネルギー密度  $1\text{GeV/fm}$  よりも十分に高い．

高エネルギー原子核衝突実験における相対論的流体数値シミュレーションでは、衝突軸方向の流体発展は Bjorken スケーリング解で与えられるとして、衝突軸方向の次元を一つ落とした空間 2 次元の計算がよく行われた．中心ラピディティ領域では、この 2 次元の計算と空間 3 次元のシミュレーション結果にほとんど違いは見られなかった．この 2 次元の数値シミュレーションにより、 $v_2$  の解析が盛んに行われ、QGP の楕円フローの理解が進んだ．

1 次の粘性流体方程式においても、Bjorken スケーリング解と同様の解析解が得られている．まず、ずり粘性のみを考慮した場合を考える．ブースト不変性がある場合のずり粘性を含んだ 1 次の粘性流体方程式は次のように書くことができる．

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = -\frac{e + p + \tau^2 \pi_{NS}^{\eta\eta}}{\tau}, \quad (3.3.49)$$

ここで、 $\pi_{NS}^{\eta\eta}$  は式 (3.1.15) で与えられており、ブースト不変性がある場合、

$$\pi_{NS}^{\eta\eta} = -\frac{4\eta}{3\tau^3}. \quad (3.3.50)$$

と書かれる． $\eta/s$  が一定値である場合、式 (3.3.49)、(3.3.50) より、次の温度の時間発展の解析解を

得ることができる.

$$T = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/3} \left[ T_0 + \frac{2}{3\tau_0} \frac{\eta}{s} \left( 1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{2/3} \right) \right]. \quad (3.3.51)$$

次に 2 次の粘性流体方程式における Bjorken スケーリング解を考える. 体積粘性に注目し, 体積粘性の運動方程式 (3.1.19) において 2 次の項  $I_{\Pi}$  を無視すると,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau_{\Pi}} (\Pi - \Pi_{\text{NS}}), \quad (3.3.52)$$

となる. ここで,  $\Pi_{\text{NS}} = \zeta/\tau$  である. 体積粘性係数  $\zeta$  と緩和時間  $\tau_{\Pi}$  が一定値である場合, 式 (3.3.52) から体積粘性テンソルに関する次の解析解を得ることができる.

$$\Pi = \Pi_0 e^{-(\tau-\tau_0)/\tau_{\Pi}} + \frac{\zeta}{\tau_{\Pi}} e^{-\tau/\tau_{\Pi}} [\text{Ei}(\tau_0/\tau_{\Pi}) - \text{Ei}(\tau/\tau_{\Pi})], \quad (3.3.53)$$

ここで,  $\Pi_0$  は体積粘性の初期値,  $\text{Ei}(x)$  は指数積分関数である.

### 3.3.4 Bjorken 膨張背景におけるゆらぎの伝播

高エネルギー原子核衝突実験では, 初期状態ゆらぎの終状態への伝播を調べることで, 原子核衝突実験の初期条件, QGP の物性に関する情報を得ることができる. 流体方程式の線形解析を用いて, 原子核衝突実験における初期状態ゆらぎの伝播を解析的に理解する試みが行われた [88, 148]. 参考文献 [148] では, 衝突軸方向に Bjorken 膨張 (Bjorken スケーリング解) が存在する場合, 衝突軸に垂直な方向へのゆらぎの線形解析が行われた. 参考文献 [88] では, 背景に Bjorken 膨張がある場合, ラピディティー方向 (衝突軸方向) を含む空間 3 次元における線形ゆらぎの振る舞いが議論された.

Bjorken 膨張中のラピディティー方向のゆらぎの伝播は, Milne 座標を用いた流体コードのテスト問題としても有用である. 我々は, Bjorken 膨張中のラピディティー方向のゆらぎの伝播を流体コードのテスト問題として利用するため, 特定の初期条件を仮定し, Bjorken 膨張中のゆらぎの伝播に関する解析解を導いた [85]. その解析解を紹介する. まず, Milne 座標  $(\tau, \eta)$  の  $(1+1)$  次元空間における相対論的 Euler 方程式を考える.

$$(\partial_{\tau} + v^{\eta} \partial_{\eta})(\tau e) = -\frac{\tau(e+p)}{u^{\tau}} \partial_{\mu} u^{\mu} + \tau^2 (e+p) (u^{\eta})^2 - p, \quad (3.3.54)$$

$$(\partial_{\tau} + v^{\eta} \partial_{\eta})v^{\eta} = -\frac{1}{(u^{\tau})^2 (e+p)} \left( \frac{1}{\tau^2} \partial_{\eta} p + v^{\eta} \partial_{\tau} p \right) + \tau (v^{\eta})^3 - \frac{2}{\tau} v^{\eta}, \quad (3.3.55)$$

Bjorken 膨張が背景にあると仮定し, Bjorken 膨張への微小摂動を考える.

$$e = e_B + \delta e, \quad v^{\eta} = \delta v^{\eta}, \quad e_B = e_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1+\lambda}, \quad (3.3.56)$$

ここで,  $e_B$  はエネルギー密度に関する Bjorken スケーリング解 [135] であり,  $\delta e, \delta v^{\eta}$  は Bjorken スケーリング解のまわりの微小ゆらぎを表す. 状態方程式は  $p = \lambda e$  の形で与えられるとする. ここで  $\lambda$  は音速  $c_s$  の 2 乗,  $\lambda = c_s^2$  で与えられる. 式 (3.3.56) の表式を相対論的オイラー方程式 (3.3.54), (3.3.55) に代入し, ゆらぎの 2 次以上の項を無視すると, 次のゆらぎに関する線形方程式を得るこ

とができる.

$$\partial_\tau \delta e + (1 + \lambda) e_B \partial_\eta \delta v^\eta + \frac{1 + \lambda}{\tau} \delta e = 0, \quad (3.3.57)$$

$$\partial_\tau \delta v^\eta + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{1}{\tau^2 e_B} \partial_\eta \delta e + \frac{2 - \lambda}{\tau} \delta v^\eta = 0. \quad (3.3.58)$$

ここで, Fourier 変換を利用する.

$$\delta e(\tau, \eta) = \int \frac{dk}{2\pi} \delta \tilde{e}(\tau, k) e^{ik\eta}, \quad (3.3.59)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = \int \frac{dk}{2\pi} \delta \tilde{v}^\eta(\tau, k) e^{ik\eta}. \quad (3.3.60)$$

今, 方程式が線形であるため, 異なるモード間に相互作用は生じず, 式 (3.3.57), (3.3.58) はモード毎の  $\tau$  に関する常微分方程式となる.

ここで,  $\delta e$  と  $\delta v^\eta$  の,  $\tau = \tau_0$  における初期条件として, 次の表式を考える.

$$\delta e(\tau_0, \eta) = A_1 e^{ik\eta}, \quad (3.3.61)$$

$$\delta v^\eta(\tau_0, \eta) = A_2 e^{ik\eta}, \quad (3.3.62)$$

ここで,  $A_1, A_2$  は定数である. この初期条件とともに,  $\delta \tilde{e}(\tau, k), \delta \tilde{v}^\eta(\tau, k)$  の解を式 (3.3.57), (3.3.58) より導出し, 最後にフーリエ変換を実行することで,  $\delta e$  と  $\delta v^\eta$  の一般解を次のように得ることができる [85].

$$\begin{aligned} \delta e(\tau, \eta) = & \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-(3+\lambda)/2} \left[ (a_1 A_1 + i k e_0 (1 + \lambda) \tau_0 A_2) \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-\sqrt{D}/2} \right. \\ & \left. - (a_2 A_1 + i k e_0 (1 + \lambda) \tau_0 A_2) \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\sqrt{D}/2} \right] e^{ik\eta}, \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

$$\begin{aligned} \delta v^\eta(\tau, \eta) = & \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(\lambda-3)/2} \left[ \left( -a_2 A_2 + i \frac{k \lambda A_1}{\tau_0 e_0 (1 + \lambda)} \right) \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-\sqrt{D}/2} \right. \\ & \left. + \left( a_1 A_2 - i \frac{k \lambda A_1}{\tau_0 e_0 (1 + \lambda)} \right) \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\sqrt{D}/2} \right] e^{ik\eta}, \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

ここで,  $a_1, a_2, D$  は次のように与えられる.

$$a_1 = \frac{1}{2} (\lambda - 1 + \sqrt{D}), \quad a_2 = \frac{1}{2} (\lambda - 1 - \sqrt{D}), \quad (3.3.65)$$

$$D = (1 - \lambda)^2 - 4k^2 \lambda. \quad (3.3.66)$$

式 (3.3.63), (3.3.64) は  $D \neq 0$  の場合の解析解である. ここで,  $D$  の値は常に  $(1 - \lambda)^2$  より小さく, 波数  $k$  が大きいほど  $D$  は小さくなる. よって, 式 (3.3.63), (3.3.64) において第 1 項と第 2 項は常に  $\tau$  の負のべき乗に比例し,  $\tau$  とともに減衰する.  $\delta e$  と  $\delta v^\eta$  は  $D$  の符号によって異なる振る舞いを示す.

$D > 0$  の場合, 初期のゆらぎは伝播せずに減衰する. 式 (3.3.63), (3.3.64) の特定の場合として,

$A_1, A_2$  が次の関係式:

$$a_2 A_1 + i k e_0 (1 + \lambda) \tau_0 A_2 = 0, \quad (3.3.67)$$

を満たす場合, 式 (3.3.63), (3.3.64) の第 1 項のみ残り,  $\delta e$  と  $\delta v^\eta$  の解析解は次のようになる.

$$\delta e(\tau, \eta) = A_1 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(-3-\lambda-\sqrt{D})/2} e^{ik\eta}, \quad (3.3.68)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = A_2 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(-3+\lambda-\sqrt{D})/2} e^{ik\eta}. \quad (3.3.69)$$

波数の小さなゆらぎほど早く減衰することが分かる.

$D < 0$  の場合, 式 (3.3.63), (3.3.64) の第 1 項と第 2 項はそれぞれ進行波と後退波を表す. ここで,  $A_1$  と  $A_2$  が式 (3.3.67) の関係式を満たす場合,  $\delta e$  と  $\delta v^\eta$  の解析解は次のように進行波を表す.

$$\delta e(\tau, \eta) = A_1 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-(3+\lambda)/2} e^{i(k\eta-\theta)}, \quad (3.3.70)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = A_2 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(\lambda-3)/2} e^{i(k\eta-\theta)}, \quad (3.3.71)$$

ここで,  $\theta$  は  $\theta \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-D}\log(\tau/\tau_0)$  と定義されている. 今, ゆらぎの位相速度は  $\sqrt{-D}/(2k\tau)$  で与えられる. 波数の小さなゆらぎほど速く伝播する. 式 (3.3.70), (3.3.71) ではゆらぎの減衰速度は波数に依存しない.  $D = 0$  となる波数の値を臨界波数  $k_c$  と呼ぶことにすると,  $k_c$  は,

$$k_c = \frac{1 - c_s^2}{2c_s}, \quad (3.3.72)$$

と与えられる.

$D = 0$  の場合,  $\delta e$  と  $\delta v^\eta$  は次の解析解を持つ.

$$\delta e(\tau, \eta) = \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-(3+\lambda)/2} \left[ A_1 + \left( \frac{1-\lambda}{2} A_1 - i k e_0 (1+\lambda) \tau_0 A_2 \right) \log \frac{\tau}{\tau_0} \right] e^{ik\eta}, \quad (3.3.73)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(\lambda-3)/2} \left[ A_2 - \left( \frac{1-\lambda}{2} A_2 + i \frac{k\lambda A_1}{\tau_0 e_0 (1+\lambda)} \right) \log \frac{\tau}{\tau_0} \right] e^{ik\eta}. \quad (3.3.74)$$

ここで,  $A_1, A_2$  が次の関係式:

$$\frac{1-\lambda}{2} A_1 = i k e_0 (1+\lambda) \tau_0 A_2, \quad (3.3.75)$$

を満たす場合, 式 (3.3.73), (3.3.74) は次のようになる.

$$\delta e(\tau, \eta) = A_1 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-(3+\lambda)/2} e^{ik\eta}, \quad (3.3.76)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = A_2 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(\lambda-3)/2} e^{ik\eta}. \quad (3.3.77)$$

### 3.3.5 完全流体における Gubser 解

高エネルギー原子核衝突実験における系は、衝突した直後は、Bjorken スケーリング解で定性的に記述される衝突軸方向への 1 次元膨張を行う。しかし、時間が経つとともに衝突軸に垂直な方向への流れが成長し、空間 3 次元における多次元膨張へと遷移すると考えられている。このような、Bjorken スケーリング解よりもより現実的な、衝突軸方向の Bjorken スケーリング解に加え、衝突軸方向に垂直な平面での発展を含む、空間 3 次元における流体膨張を記述する解析解が導出された [149, 150]。この解析解の導出には、Bjorken スケーリング解と同様、空間の対称性に関する議論を利用する。以下でその導出の流れを見る。

Gubser 解の導出では、系のコンフォーマル対称性を前提とする。相対論的流体力学において  $p = e/3$ 、体積粘性  $\zeta = 0$  であるとき、系はコンフォーマル対称性を持っている。このとき、系の力学は次の Weyl 変換の下で不変となる。

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2} g_{\mu\nu}. \quad (3.3.78)$$

$g_{\mu\nu}$  はメトリックであり、 $\Omega$  は時空に依存していてもよい。次の座標を考える。

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 d\eta^2 - dx_\perp^2 - x_\perp^2 d\phi^2. \quad (3.3.79)$$

$t$ - $z$  平面において Milne 座標、 $x$ - $y$  平面において極座標を利用している。ここで、次の Weyl 変換を考える。

$$d\hat{s} = \frac{1}{\tau^2} ds^2 = \frac{d\tau^2 - dx_\perp^2 - x_\perp^2 d\phi^2}{\tau^2} - d\eta^2. \quad (3.3.80)$$

この  $d\hat{s}$  で表される新たな座標系において、次の変換則を満たす座標  $\rho, \theta$  を導入する。

$$\sinh \rho = -\frac{1 - q^2 \tau^2 + q^2 x_\perp^2}{2q\tau}, \quad \tan \theta = \frac{2qx_\perp}{1 + q^2 \tau^2 - q^2 x_\perp^2}. \quad (3.3.81)$$

この新たな座標を用いて  $d\hat{s}$  は次のように書ける。

$$d\hat{s} = d\rho^2 - \cosh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - d\eta^2. \quad (3.3.82)$$

今、 $(\rho, \theta, \phi)$  が 3 次元ド・ジッター空間  $dS_3$  をマップしており、 $d\hat{s}$  は  $dS_3 \times \mathbf{R}$  空間を表す。新たな座標系での 4 元速度を  $\hat{u}^\mu$  と示す。

次に、 $dS_3 \times \mathbf{R}$  空間において、系に対称性を仮定する。まず、ラピディティー方向は Bjorken スケーリング解と同じように、ローレンツブースト変換の下での対称性 ( $SO(1,1)$  対称性) と  $z$  軸の反転の下での対称性 ( $\mathbf{Z}_2$  対称性) を仮定する。 $SO(1,1)$  対称性により、ラピディティー方向の 4 速度  $\hat{u}_\eta$  はラピディティーに依存せず、さらに  $\mathbf{Z}_2$  対称性により、 $\hat{u}_\eta = 0$  と決まる。さらに、 $dS_3 \times \mathbf{R}$  空間において、3 次元の空間回転の下での不変性、 $SO(3)$  対称性を仮定する。これより、速度分布は、

$$\hat{u}_\rho = 1, \quad \hat{u}_\theta = \hat{u}_\phi = \hat{u}_\eta = 0, \quad (3.3.83)$$

と決まる。Gubser 解は  $SO(3) \times SO(1,1) \times \mathbf{Z}_2$  不変な解とも呼ばれる。次にエネルギー密度を考える。今、 $dS_3 \times \mathbf{R}$  においてエネルギー密度  $\hat{e}$  は  $\rho$  にのみ依存する。ここで、化学ポテンシャルがゼロの場合を考えると、エントロピー密度は  $\hat{s} \propto \hat{e}^{3/4}$  である。ある  $\rho$  において単位ラピディティー

あたりのエントロピーは  $(4\pi \cosh^2 \rho) \hat{s}$  で与えられる。完全流体ではエントロピーが保存するので、

$$\frac{d}{d\rho} \left( \hat{e}^{3/4} \cosh^2 \rho \right) = 0 \quad (3.3.84)$$

となる。これより、エネルギー密度が次のように求まる。

$$\hat{e} = \hat{e}_0 (\cosh \rho)^{-8/3} \quad (3.3.85)$$

最後に式 (3.3.83), (3.3.85) に (3.3.81) の座標変換則を利用し、座標  $(\tau, x_\perp, \phi, \eta)$  における解析解が次のように求まる。

$$v^\eta = v^\phi = 0, \quad (3.3.86)$$

$$v^\perp = \frac{u^\perp}{u^\tau} = \frac{2q^2 \tau x_\perp}{1 + q^2 \tau^2 + q^2 x_\perp^2}, \quad (3.3.87)$$

$$e = \frac{\hat{e}_0}{\tau^{4/3}} \frac{(2q)^{8/3}}{[1 + 2q^2(\tau^2 + x_\perp^2) + q^4(\tau^2 - x_\perp^2)^2]^{4/3}}. \quad (3.3.88)$$

ここで、 $\hat{e}_0$  は質量次元ゼロの定数、 $q$  は質量次元-1 の定数である。Gubser 解は、ラピディティー方向において Bjorken スケーリング解に従って発展し、 $x, y$  方向において放射状に膨張するような解となっている。Gubser 解は高エネルギー原子核衝突実験における流体発展の特徴を捉えており、その解析的理解に有用である。また、多次元における流体方程式の解析解が見つかった例は少ないため、Gubser 解は高エネルギー原子核衝突実験で利用される流体コードのテスト問題に適している。

### 3.3.6 2 次の粘性流体における Gubser 解

1 次の相対論的粘性流体方程式においても、上記の方法で  $SO(3) \times SO(1,1) \times \mathbf{Z}_2$  不変な解析解が得られている [149, 150]。しかし、この 1 次の相対論的粘性流体における Gubser 解は、特定の時空領域で温度がマイナスになってしまう問題を持っており、2 次の粘性項の重要性を示唆している。

2 次の粘性流体方程式における Gubser 解が参考文献 [151] において得られた。そこでは、2 次の粘性項と緩和時間として次の表式が用いられる。

$$I_\pi^{\mu\nu} = \frac{4}{3} \pi^{\mu\nu} \theta, \quad (3.3.89)$$

$$\tau_\eta = c \frac{\eta}{T s}, \quad (3.3.90)$$

$c$  は定数である。計算の流れは完全流体の場合と同じである。まずは、 $dS_3 \times \mathbf{R}$  空間に Weyl 変換で移動する。そして、完全流体のときと同じ対称性  $SO(3) \times SO(1,1) \times \mathbf{Z}_2$  を要請する。この要請により、速度場の解は完全流体のときと同じになり、式 (3.3.86), (3.3.87) で与えられる。まず、ずり粘性の直行条件より、 $\hat{\pi}_\rho^\mu = 0$  となる。その他のずり粘性テンソルの非対角成分は、それぞれ独立な常微分方程式に従うため、それらはゼロに設定する。また、 $\hat{\pi}_\theta^\theta = \hat{\pi}_\phi^\phi$  と想定すると、独立な粘性テン

ソルは 1 成分のみとなる．今，流体方程式は次の常微分方程式に帰着する．

$$\frac{1}{\hat{T}} \frac{d\hat{T}}{d\rho} + \frac{2}{3} \tanh \rho = \frac{1}{3} \bar{\pi}_\eta^\eta(\rho) \tanh \rho, \quad (3.3.91)$$

$$\frac{c}{\hat{T}} \frac{\eta}{s} \left[ \frac{d\bar{\pi}_\eta^\eta}{d\rho} + \frac{4}{3} (\bar{\pi}_\eta^\eta)^2 \tanh \rho \right] + \bar{\pi}_\eta^\eta = \frac{4}{3} \tanh \rho. \quad (3.3.92)$$

ここで， $\bar{\pi}_\eta^\eta = \hat{\pi}_\eta^\eta / (\hat{T} \hat{s})$  と定義されている．参考文献 [151] は，この常微分方程式を Mathematica の NDSolve 関数で解き，元の座標系へと座標変換を行うことで，2 次の粘性流体方程式における Gubser 解を導出した．この，2 次の粘性流体方程式における解析解は，2 次の粘性流体コードの貴重なテスト問題として利用できる．2 次の粘性流体における Gubser 解を用いて，高エネルギー原子核衝突実験で利用される相対論的粘性流体コードのテストが行われた [47, 49, 86, 151–154]．



## 第4章 Milne座標における相対論的流体コードの開発

ここでは, Milne 座標において相対論的流体方程式の数値アルゴリズムを構築する. まず, 相対論的完全流体計算のアルゴリズムを構築した後に, 2 次の相対論的粘性流体方程式の数値アルゴリズムを構築する.

### 4.1 完全流体アルゴリズム

我々の完全流体アルゴリズムは高精度衝撃波捕獲法 [155] に基づく. 高精度衝撃波捕獲法では, セル境界において Riemann 問題を定義し, Riemann 問題の厳密解, または近似解を用いてセル境界を通過する流速を評価する.

#### 4.1.1 $(\tau, \eta)$ 空間における流体方程式の差分化

Milne 座標において完全流体方程式を差分化する. ここでは, ラピディティー方向の発展に注目し, 流体変数が  $x, y$  方向に一様であるとする. エネルギー運動量保存則 (3.2.22)-(3.2.24) は次のように書ける.

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau\nu}) + \partial_\eta(\tau T^{\eta\nu}) = 0, \quad (4.1.1)$$

ここで,  $\nu = t, x, y, z$ . ここで, 4 元速度の  $x, y$  成分  $u^x, u^y$  がゼロのとき, 式 (4.1.1) は  $(\tau, \eta)$  の  $(1+1)$  次元流体方程式となる. 我々は保存方程式を解くために, Lagrange ステップと呼ばれる方法 [156] を用いる. 離散化された空間で固有時間を  $\tau^n$ , ラピディティーを  $\eta_i$  と表す.  $n, i$  は整数である. Lagrange ステップでは, 固有時間  $\tau^n$  から  $\tau^{n+1}$  までの間, セル境界が流体とともに移動する. 時間きざみを  $\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$ , 格子サイズを  $\Delta\eta = \eta_{i+1} - \eta_i$  と表す. 有限体積法と Lagrange ステップの考えに基づき, セル内で時空積分を行うことにより 式 (4.1.1) を差分化する (図 4.1),

$$\int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \int_{\eta_i + \delta\eta_i(\tau')}^{\eta_{i+1} + \delta\eta_{i+1}(\tau')} \partial_\alpha(\tau T^{\alpha\nu}) d\eta d\tau = 0, \quad (4.1.2)$$

ここで  $\alpha = \tau, \eta$ .  $\delta\eta_i(\tau')$  はセル境界が固有時間  $\tau^n$  から  $\tau = \tau^n + \tau' (0 \leq \tau' \leq \Delta\tau)$  までの間に動いた距離を表す. 今注目している,  $\eta = \eta_i$  と  $\eta_{i-1}$  の間のセルを  $i$  番目のセルと呼び,  $\tau = \tau^n$  において  $\eta = \eta_i$  に位置したセル境界を  $i$  番目のセル境界と呼ぶことにする.  $\eta_i + \delta\eta_i(\tau')$  は  $\tau = \tau^n + \tau'$  における  $i$  番目のセル境界の位置を表す. Gauss の法則を用いると, 式 (4.1.2) より次の差分方程式を

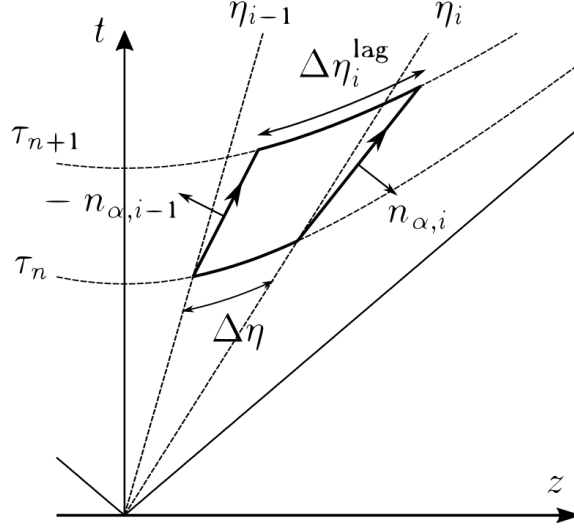


図 4.1: Milne 座標における Lagrange ステップ. 黒の太枠は積分領域を表す.

得ることができる.

$$(T^{\tau\nu})_i^{n+1} = \frac{\tau^n \Delta\eta}{\tau^{n+1} \Delta\eta_i^{\text{lag}}} (T^{\tau\nu})_i^n - \frac{1}{\tau^{n+1} \Delta\eta_i^{\text{lag}}} \left[ \int_{C_i} T^{\alpha\nu} n_{\alpha,i} ds - \int_{C_{i-1}} T^{\alpha\nu} n_{\alpha,i-1} ds \right], \quad (4.1.3)$$

ここで,  $\Delta\eta_i^{\text{lag}} \equiv \Delta\eta + (\delta\eta_i(\Delta\tau) - \delta\eta_{i-1}(\Delta\tau))$  はセル境界が動いた後の,  $\tau = \tau^{n+1}$  におけるセルサイズであり,  $C_i$  は  $i$  番目のセル境界の動く経路,  $n_{\alpha,i}$  は  $C_i$  に垂直な単位ベクトルを表す (Fig. 4.1). また, 固有時間  $\tau^n$  と  $\tau^{n+1}$  における, 保存量のセル内での平均値を次のように定義した.

$$(T^{\tau\nu})_i^n \equiv \frac{1}{\Delta\eta} \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} T^{\tau\nu}(\tau^n, \eta) d\eta, \quad (4.1.4)$$

$$(T^{\tau\nu})_i^{n+1} \equiv \frac{1}{\Delta\eta_i^{\text{lag}}} \int_{\eta_{i-1} + \delta\eta_{i-1}(\Delta\tau)}^{\eta_i + \delta\eta_i(\Delta\tau)} T^{\tau\nu}(\tau^{n+1}, \eta) d\eta. \quad (4.1.5)$$

式 (4.1.3) の第 2 項はセル境界を通過する保存量の流速を表している.

式 (4.1.3) における  $\Delta\eta_i^{\text{lag}}$  と流速項の具体的な表式を導出する. ここでは, Lagrange ステップの間, セル境界は一定の  $z$  方向速度で移動し, セル境界上の圧力も一定であると仮定する.  $i$  番目のセル境界の  $z$  方向の 3 元速度を  $V_i^z$ , セル境界上の圧力を  $P_i$  と示す. まず, セル境界の移動距離  $\delta\eta_i(\tau')$  を計算するため,  $\eta = \eta_i$  の点が  $\eta = 0$  となる系へとローレンツブースト変換で移動する. ラピディティ方向の変位  $\delta\eta_i(\tau')$  はブースト変換の下で不変であり, ローレンツ系に依存しない. ブースト変換された系における,  $i$  番目のセル境界の  $z$  方向の 3 元速度を  $V_{0,i}^z$  と示す.  $V_i^z$  と  $V_{0,i}^z$  は次のブースト変換則を満たす.

$$V_i^z = \frac{\sinh\eta_i + V_{0,i}^z \cosh\eta_i}{\cosh\eta_i + V_{0,i}^z \sinh\eta_i}. \quad (4.1.6)$$

速度  $V_{0,i}^z$  一定のセル境界が,  $\eta = 0$  の点から, 固有時間  $\tau'$  の間に移動する距離は,

$$\delta\eta_i(\tau') = \frac{1}{2} \log \left( \frac{(1 + V_{0,i}^z) \delta t(\tau') + \tau^n}{(1 - V_{0,i}^z) \delta t(\tau') + \tau^n} \right), \quad (4.1.7)$$

と与えられる．ここで、 $\delta t(\tau')$  は、セル境界の移動した時間を表し、

$$\delta t(\tau') = \frac{1}{1 - (V_{0,i}^z)^2} \left\{ -\tau^n + \sqrt{(\tau^n)^2 + (1 - (V_{0,i}^z)^2)(2\tau^n\tau' + (\tau')^2)} \right\}, \quad (4.1.8)$$

と書かれる．連立方程式 (4.1.8) は  $z = V_{0,i}^z(t - \tau^n)$  と  $(\tau^n + \tau')^2 = t^2 - z^2$  を、 $t = \tau^n + \delta t(\tau')$  とともに解くことで得られる．これより、 $\Delta\eta_i^{\text{lag}}$  の表式が求まった．

次に、ブースト変換する前の元の系に戻り、流速項を評価する．式 (4.1.3) の流速積分における単位ベクトル  $n_{\alpha,i}$  は次のように書かれる．

$$n_{\alpha,i} = \gamma_i(\sinh\eta - V_i^z \cosh\eta, \tau(\cosh\eta - V_i^z \sinh\eta)), \quad (4.1.9)$$

ここで、 $\gamma_i = \{1 - (V_i^z)^2\}^{-1/2}$ ．流速積分の被積分関数は、

$$T^{\alpha t} n_{\alpha,i} = \gamma_i P_i V_i^z, \quad (4.1.10)$$

$$T^{\alpha z} n_{\alpha,i} = \gamma_i P_i, \quad (4.1.11)$$

$$T^{\alpha j} n_{\alpha,i} = 0, \quad (j = x, y), \quad (4.1.12)$$

となる．経路  $C_i$  上の積分要素  $ds$  は、

$$ds = \gamma_i^{-1} \frac{d\tau'}{\cosh(\eta_i + \delta\eta_i(\tau')) - V_i^z \sinh(\eta_i + \delta\eta_i(\tau'))}, \quad (4.1.13)$$

と書ける． $\tau'$  の積分領域は  $[0 : \Delta\tau]$  である．次に、式 (4.1.13) を  $\tau'$  について展開し、式 (4.1.3) の流速項において  $\tau'$  に関する積分を実行する．これにより、 $\Delta\tau$  の 3 次までで、流速項の表式が次のように得られる．

$$\begin{aligned} \int_{C_i} T^{\alpha t} n_{\alpha,i} ds &= P_i(\sinh\eta_i + V_{0,i}^z \cosh\eta_i) \\ &\times \left\{ \Delta\tau + \frac{(V_{0,i}^z)^2}{2\tau^n} \Delta\tau + \frac{1}{2(\tau^n)^2} ((V_{0,i}^z)^4 - (V_{0,i}^z)^2) \Delta\tau^3 \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{C_i} T^{\alpha z} n_{\alpha,i} ds &= P_i(\cosh\eta_i + V_{0,i}^z \sinh\eta_i) \\ &\times \left\{ \Delta\tau + \frac{(V_{0,i}^z)^2}{2\tau^n} \Delta\tau^2 + \frac{1}{2(\tau^n)^2} ((V_{0,i}^z)^4 - (V_{0,i}^z)^2) \Delta\tau^3 \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\int_{C_i} T^{\alpha j} n_{\alpha,i} ds = 0, \quad j = x, y. \quad (4.1.16)$$

#### 4.1.2 Milne 座標における Riemann 問題

3.3.1 節で説明したように、デカルト座標において Riemann 問題の初期条件は次のように表される．

$$\mathbf{V}(t = t_0, x, y, z) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & (z < z_i), \\ \mathbf{V}_R & (z > z_i), \end{cases} \quad (4.1.17)$$

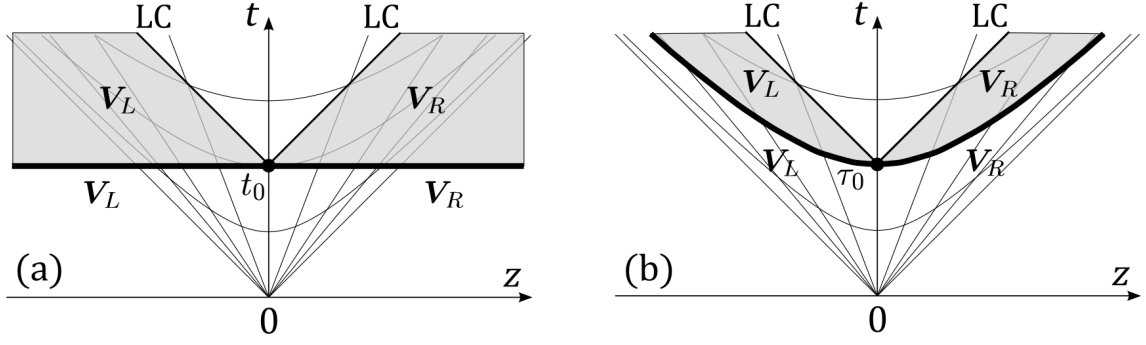


図 4.2: デカルト座標における Riemann 問題 (a) と Milne 座標におけるリーマン問題 (b).  $z_i = \eta_i = 0$  の場合. (a) と (b) の太線はそれぞれ時間  $t = t_0$  一定の線と固有時間  $\tau = \tau_0$  一定の線を表し, その上で初期条件が定義される. 黒丸は不連続面の位置を表す. LC は光円錐を示す.

ここで,  $t_0$  は初期時刻,  $z_i$  は初期不連続面の位置を表す.  $\mathbf{V}$  は流体の状態を表しており, 流体変数の情報を持っている,  $\mathbf{V} = (n, v^x, v^y, v^z, p)$ .  $\mathbf{V}_L$  は不連続面の左側の状態,  $\mathbf{V}_R$  は不連続面の右側の状態を表す. 3.3.1 節で見たように, 後の時間には, 不連続面から衝撃波, 接触不連続面, 希薄波の組み合わせで, 3 種類の波が生じる.  $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$  はそれぞれ  $z < z_i, z > z_i$  の領域では  $z$  に依存しないため,  $z = z_i$  の点から情報が届くまで, 時間発展せずに  $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$  であり続ける. よって, 少なくとも  $z = z_i$  から広がる光円錐の外の状態は  $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$  のまま初期の状態を保ち続ける.

次に, Milne 座標における Riemann 問題を考える. 我々は, Milne 座標における Riemann 問題の初期条件を次のように設定する.

$$\mathbf{V}(t = \tau_0, x, y, z) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & (\eta < \eta_i), \\ \mathbf{V}_R & (\eta > \eta_i), \end{cases} \quad (4.1.18)$$

ここで,  $\tau_0$  は初期固有時間,  $\eta_i$  は初期不連続面の位置を表す. ここで, Milne 座標における時空点  $(\tau_0, \eta_i)$  は, 式 (4.1.17) のデカルト座標における点  $(t_0, z_i)$  と同じ位置を表している. ここで, 式 (4.1.18) における  $\mathbf{V}$  の要素は, 式 (4.1.17) のものと同様であり,  $(n, v^x, v^y, v^z, p)$  を表す. つまり, 不連続面の両側の状態では, 3 元速度のデカルト座標成分  $u^i/u^t (i = x, y, z)$  がラピディティー方向に一様に広がっている. 一方, 3 元速度の Milne 座標成分  $u^i/u^\tau (i = x, y, \eta)$  はラピディティーに依存する.

ここで, 式 (4.1.17) と式 (4.1.18) で与えられる初期値問題を比較する. まず, 不連続面の位置が  $z_i = \eta_i = 0$  の場合を考える. 図 4.2 にそれぞれの初期条件を示した. 図 4.2(a) の太線は時間  $t = t_0$  一定の線を, 図 4.2(b) の太線は固有時間  $\tau = \tau_0$  一定の線を表しており, その線上で初期条件が定義されている. 黒丸は不連続面の位置を表す. 図 4.2(a) では, 上で述べたように,  $z = z_i$  から広がる光円錐の外側の状態 (灰色の領域) が  $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$  で与えられている. 図 4.2(a) と (b) を比べると, 図 4.2(b) の  $\tau = \tau_0$  一定の線は図 4.2(a) の灰色の領域に含まれていることが分かる. つまり, 式 (4.1.17) で定義される Riemann 問題の解析解は式 (4.1.18) で与えられる初期条件を満たしている. これより, 式 (4.1.17) と式 (4.1.18) で与えられる二つの初期値問題は同じ解析解を与えることが分かる.

初期不連続面の位置が  $z_i \neq 0, \eta_i \neq 0$  の場合にも, 式 (4.1.17) と式 (4.1.18) で与えられる二つの初期値問題は同じ解析解を与えることを見る. まず, 式 (4.1.18) における状態  $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$  のような, ある固有時刻で  $\partial_\eta \mathbf{V} = 0$  を満たす状態は,  $\partial_\tau \mathbf{V} = 0$  となり定常状態となることを示す.  $(\tau, \eta)$  の (1+1)

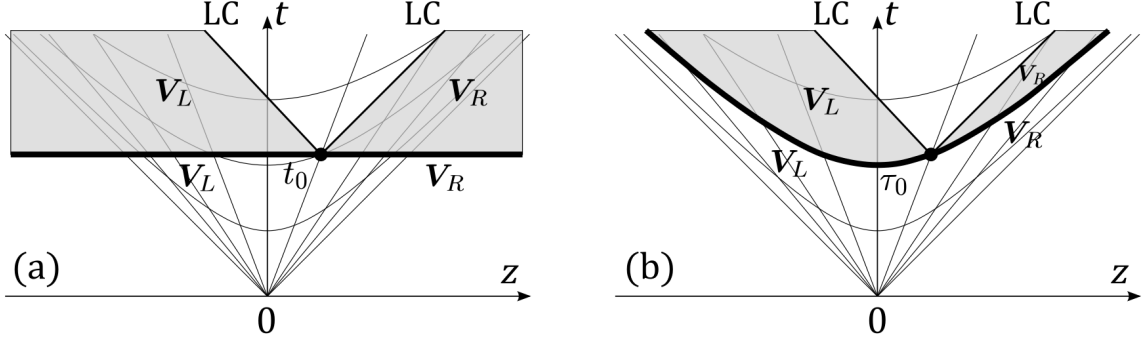


図 4.3: デカルト座標における Riemann 問題 (a) と Milne 座標におけるリーマン問題 (b).  $z_i = \eta_i \neq 0$  の場合. (a) と (b) の太線はそれぞれ時間  $t = t_0$  一定の線と固有時間  $\tau = \tau_0$  一定の線を表し, その上で初期条件が定義される. LC は光円錐を示す.

次元の場合を考える. エネルギー運動量保存則 (3.2.23), (3.2.24) をエネルギー運動量テンソルのデカルト座標成分を用いて書くと,

$$\partial_\tau(\tau \cosh \eta T^{tt} - \tau \sinh \eta T^{tz}) + \partial_\eta(-\sinh \eta T^{tt} + \cosh \eta T^{tz}) = 0, \quad (4.1.19)$$

$$\partial_\tau(\tau \cosh \eta T^{tz} - \tau \sinh \eta T^{zz}) + \partial_\eta(-\sinh \eta T^{tz} + \cosh \eta T^{zz}) = 0, \quad (4.1.20)$$

となる. ここで, ラピディティーについて流体変数  $\mathbf{V}$  が一様であるとする, エネルギー運動量テンソルのデカルト座標成分もラピディティーについて一様である,  $\partial_\eta T^{tt} = 0$ ,  $\partial_\eta T^{tz} = 0$ ,  $\partial_\eta T^{zz} = 0$ . これらの条件とともに, 式 (4.1.19), (4.1.20) に加え, 式 (4.1.19), (4.1.20) のどちらかをラピディティーで微分した式を解くと,

$$\partial_\tau T^{tt} = 0, \quad \partial_\tau T^{zz} = 0, \quad \partial_\tau T^{tz} = 0, \quad (4.1.21)$$

と得ることができる. つまり,  $\partial_\tau \mathbf{V} = 0$  となる. この結論より, Milne 座標における Riemann 問題 (4.1.18) においても, デカルト座標の場合 (4.1.17) と同じように,  $(\tau_0, \eta_i)$  から広がる光円錐の外の状態は  $\mathbf{V}_R$ ,  $\mathbf{V}_L$  のまま時間発展しない. この様子を図 4.3(b) に示した. 図 4.3(a) と (b) を比べると, 式 (4.1.17) と式 (4.1.18) で定義される初期値問題は,  $(\tau_0, \eta_i)$  から広がる光円錐上で同じ境界条件を満たすことが分かる. よって, 式 (4.1.17) と式 (4.1.18) で与えられる二つの初期値問題は同じ解析解を与える.

### 4.1.3 $(\tau, \eta)$ 空間におけるアルゴリズム

ここで, 差分式 (4.1.3) を解くアルゴリズムを説明する. Milne 座標における流体変数を  $\mathbf{W}$  と表す,  $\mathbf{W} = (n, v^x, v^y, v^\eta, p)$ . ある時刻  $\tau^n$  における, 保存量  $T^{\tau\nu}$  ( $\nu = t, x, y, z$ ) と  $\mathbf{W}$  のセル内での平均値  $(T^{\tau\nu})_i^n$ ,  $\mathbf{W}_i$  が分かっているとする.

1. セル内で  $\mathbf{W}$  の補間を行う.  $\mathbf{W}_i$  の値を用いて, セル毎に  $\mathbf{W}$  の分布を補間する.  $i$  番目のセル内における  $\mathbf{W}$  の補間関数を  $\mathbf{W}_i^I(\eta)$  と示す.  $\mathbf{W}_i^I(\eta) = \mathbf{W}_i$  とすると, 空間 1 次精度が達成される. 空間  $n$  次精度のスキームとは, セルサイズ  $\Delta x$  を小さくしたとき, 数値誤差がセルサイズの  $n$  乗,  $\Delta x^n$  に比例して減少するスキームのことである. 我々は空間 2 次精度のスキーム (線形補完) として MC limiter [156], 空間 3 次精度スキームとして Piecewise Parabolic

Method (PPM) [157–159] を利用する. MC limiter と PPM の詳細については付録 A に示した. 原子核衝突実験への応用では基本的に PPM を用いる. 補間操作により,  $i$  番目のセル境界の左側における  $\mathbf{W}$  の値が  $\mathbf{W}_{L,i} = \mathbf{W}_i^I(\eta_i)$  と,  $i$  番目のセル境界の右側における  $\mathbf{W}$  の値が,  $\mathbf{W}_{R,i} = \mathbf{W}_{i+1}^I(\eta_i)$  と得られる. ここで, 例えば  $\mathbf{W}_{S,i}(S = L, R)$  の持つ速度成分を座標変換し,  $\mathbf{V}_{S,i} = (n_{S,i}, (u^x/u^t)_{S,i}, (u^y/u^t)_{S,i}, (u^z/u^t)_{S,i}, p_{S,i})$  を計算すれば,  $i$  番目のセル境界における Riemann 問題の初期条件を  $\mathbf{V}_{S,i}$  により与えることができる. しかしこの場合, 差分式の流速項が  $(\tau, \eta) = (\tau^n, \eta_i)$  における物理量で評価されることになるが, 実際は, 固有時間  $\Delta\tau$  の間には  $\eta_i$  から離れた点の情報もセル境界に届く.  $\tau = \tau^n$  において,  $\eta_i$  から  $\sigma_S(S = L, R)$  離れた点までの情報が  $\Delta\tau$  の間にセル境界に影響を与えるとする. この影響を取り入れるため, 補間関数  $\mathbf{W}_i^I(x)$  を  $\sigma_S$  の領域で積分する.

$$\overline{\mathbf{W}}_{L,i} = \frac{1}{\sigma_S} \int_{\eta_i - \sigma_L}^{\eta_i} \mathbf{W}_i^I(\eta) d\eta, \quad (4.1.22)$$

$$\overline{\mathbf{W}}_{R,i} = \frac{1}{\sigma_S} \int_{\eta_i}^{\eta_i + \sigma_R} \mathbf{W}_{i+1}^I(\eta) d\eta. \quad (4.1.23)$$

デカルト座標において流体の静止系では, 情報の伝わる速度は音速  $c_s$  であり,  $\sigma_S = c_s \Delta t$  と与えられる. Milne 座標においては, ヤコビアンをかけ  $\sigma_S = c_s \Delta\tau/\tau$  とする.

2. それぞれのセル境界において, ローレンツ変換により  $\eta = 0$  の点に移動する.  $\eta = 0$  の点において, 座標変換により  $\overline{\mathbf{W}}_{S,i}$  から  $\overline{\mathbf{V}}_{S,i}$  を計算する. ローレンツ変換の下で  $\mathbf{W}$  は不変である.  $\eta = 0$  の点では,  $u^{x,y}/u^t = u^{x,y}/u^\tau$ ,  $u^z/u^t = \tau u^\eta/u^\tau$  が成り立つため,

$$\overline{\mathbf{V}}_{S,i} = (\overline{n}_{S,i}, \overline{v}^x_{S,i}, \overline{v}^y_{S,i}, \tau^n \overline{v}^\eta_{S,i}, \overline{p}_{S,i}), \quad (4.1.24)$$

と得られる.

3. 式 (4.1.24) を初期条件として Riemann 問題を解く. この Riemann 問題の解析解における接触不連続面の速度, 圧力により, 式 (4.1.7), (4.1.8), (4.1.14), (4.1.15) における  $V_{0,i}^z$ ,  $P_i$  が与えられる. Riemann 問題を解く際は two shock approximation [84] を利用する. この近似では Riemann 問題を解く際に数値的に高コストとなる希薄波を衝撃波で置き換える. 我々が注目する低バリオン数密度の状態方程式を用いた Riemann 問題の解析解は参考文献 [82] において得られている. Riemann 問題を解いた後, 元の系へと逆ブースト変換で戻る. 差分式 (4.1.3) における  $\Delta\eta_i^{\text{lag}}$  は不変であり, 流速項は  $V_{0,i}^z$  で書かれているため, この逆ブースト変換では何もする必要はない.
4. 差分式 (4.1.3), (4.1.7), (4.1.8), (4.1.14)-(4.1.16) を計算する. 保存量の次の時刻  $\tau^{n+1}$  における値が得られる.
5. Lagrange 座標を元の Euler 座標へと戻す Remap を行う [156]. Remap では保存量をセル内で補完する. Remap における補間でも空間 2 次精度の MC limiter, または空間 3 次精度の PPM を利用する.
6. 最後に  $\tau^{n+1}$  における保存量から流体変数  $\mathbf{W}$  を計算する. まず,  $T^{\tau\alpha}(\alpha = \tau, x, y, \eta)$  を  $T^{\tau\mu}(\mu = t, x, y, z)$  に座標変換する.  $T^{\tau\mu}$  から  $\mathbf{W}$  を計算する流れはデカルト座標の場合 [82]

と同じである.

以上が Milne 座標における (1+1) 次元のアルゴリズムとなる. 本論文では特に断らない限り, ステップ 1 の流速積分の前の補間操作では PPM を, ステップ 5 の Remap では MC limiter を用いる. Remap においても MC limiter ではなく PPM を用いることは計算の精度に大きな影響を与えない上に, 真空への膨張問題で計算が不安定になってしまったため, Remap では MC limiter を用いる. 上記のアルゴリズムは,  $\tau = \tau^n$  における物理量を用いて  $\tau = \tau^{n+1}$  における物理量を計算しており, 時間 1 次精度と呼ばれる. 膨張系においては, 時間とともに圧力が下がっていくが, 我々は Lagrange ステップにおいて, セル境界上で圧力が一定と近似している. 膨張系において, この近似は流速を大きく見積もることになり, 数値誤差の範囲で圧力の減少が実際より早くなる. この点を改善する方法として, 時間精度の高次化がある. 今回, 原子核衝突実験への応用において, 我々は時間方向の高次精度化は行わず, 時間刻みに依存する誤差が十分小さくなるような  $\Delta\tau$  を選んで計算を行う.

#### 4.1.4 多次元系におけるアルゴリズム

多次元の問題を解く際は次元分割法 [160] を用いる. 次元分割法では, 1 次元の計算を繰り返すことで多次元の流体発展を記述する. まず, 式 (3.2.12)-(3.2.14) から出発する.

$$\partial_\tau T^{\tau\alpha} + \partial_i T^{i\alpha} + \partial_\eta T^{\eta\alpha} = S^\alpha, \quad (4.1.25)$$

ここで, ソース項  $S^\alpha$  は次のように与えられる,

$$S^\alpha = \left( -\frac{1}{\tau} T^{\tau\tau} - \tau T^{\eta\eta}, -\frac{1}{\tau} T^{\tau x}, -\frac{1}{\tau} T^{\tau y}, -\frac{3}{\tau} T^{\tau\eta} \right). \quad (4.1.26)$$

次元分割法により, 式 (4.1.25) を次の (1+1) 次元方程式に分割することができる,

$$\partial_\tau T^{\tau\alpha} + \partial_x T^{x\alpha} = 0, \quad (4.1.27)$$

$$\partial_\tau T^{\tau\alpha} + \partial_y T^{y\alpha} = 0, \quad (4.1.28)$$

$$\partial_\tau T^{\tau\alpha} + \partial_\eta T^{\eta\alpha} = S^\alpha. \quad (4.1.29)$$

式 (4.1.27)-(4.1.29) を繰り返し解くことで (3+1) 次元の計算を実行することができる.

ラピディティー方向の発展 (4.1.29) を解く際は, 式 (4.1.29) を式 (4.1.1) に書き換える. 式 (4.1.1) を解くアルゴリズムは 4.1.3 章で説明した.  $x, y$  方向の発展を解くアルゴリズムはデカルト座標の場合 [82] と同じである. 式 (4.1.27) の差分式は 4.1.1 章と同様の流れで得ることができ,

$$(T^{\tau\tau})_i^{n+1} = \frac{\Delta x}{\Delta x_i^{\text{lag}}} (T^{\tau\tau})_i^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta x_i^{\text{lag}}} (P_i V_{0,i}^x - P_{i-1} V_{0,i-1}^x), \quad (4.1.30)$$

$$(T^{\tau x})_i^{n+1} = \frac{\Delta x}{\Delta x_i^{\text{lag}}} (T^{\tau x})_i^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta x_i^{\text{lag}}} (P_i - P_{i-1}), \quad (4.1.31)$$

$$(T^{\tau y})_i^{n+1} = \frac{\Delta x}{\Delta x_i^{\text{lag}}} (T^{\tau y})_i^n, \quad (4.1.32)$$

ここで,  $P_i, V_{0,i}^x$  は式 (4.1.24) を初期条件とした Riemann 問題の解析解より得られる. Lagrange ステップの後のセルサイズは次のように書ける.

$$\Delta x_i^{\text{lag}} = \Delta x + (V_{0,i}^x - V_{0,i-1}^x) \Delta \tau. \quad (4.1.33)$$

$i$  方向の発展を解き時間を  $k\Delta\tau$  進める演算子を  $L_i^k$  と書く.  $(x, \eta)$  空間における 2 次元の流体発展は, 次のように  $L_x^k, L_\eta^k$  を実行することで記述できる.

$$(T^{\tau\alpha})^{n+1} = L_x^{1/2} L_\eta^1 L_x^{1/2} (T^{\tau\alpha})^n. \quad (4.1.34)$$

$(x, y, \eta)$  3 次元の発展を解く流れは次のようになる.

$$(T^{\tau\alpha})^{n+1} = L_x^{1/6} L_y^{1/6} L_\eta^{1/3} L_y^{1/6} L_x^{1/3} L_\eta^{1/6} L_y^{1/3} L_x^{1/6} L_\eta^{1/3} L_x^{1/6} L_y^{1/6} L_\eta^{1/3} L_x^{1/6} (T^{\tau\alpha})^n. \quad (4.1.35)$$

## 4.2 粘性流体アルゴリズム

### 4.2.1 Strang splitting

次に相対論的粘性流体方程式を解く数値計算アルゴリズムを Milne 座標において構築する. 我々は, Strang splitting [160] を用い, 保存則 (3.2.11)-(3.2.14) を完全流体計算と粘性の補正の計算の 2 段階に分けて計算する. まず, 保存電荷カレントとエネルギー運動量テンソルを次のように完全流体部分と粘性テンソルパートに分割する:  $N^\mu = N_{\text{id}}^\mu + N_{\text{vis}}^\mu$ ,  $T^{\mu\nu} = T_{\text{id}}^{\mu\nu} + T_{\text{vis}}^{\mu\nu}$ , ここで,  $N_{\text{id}}^\mu \equiv nu^\mu$ ,  $N_{\text{vis}}^\mu \equiv n^\mu$ ,  $T_{\text{id}}^{\mu\nu} \equiv eu^\mu u^\nu - p\Delta^{\mu\nu}$ ,  $T_{\text{vis}}^{\mu\nu} \equiv \pi^{\mu\nu} - \Pi\Delta^{\mu\nu}$ , 添え字 “id” と “vis” は完全流体パートと粘性テンソルパートを意味している. 完全流体発展を記述する式は完全流体における保存則と同様の形で与えられ,

$$\partial_\tau N_{\text{id}}^\tau + \partial_i N_{\text{id}}^i = -\frac{1}{\tau} N_{\text{id}}^\tau, \quad (4.2.1)$$

$$\partial_\tau T_{\text{id}}^{\tau\nu} + \partial_i T_{\text{id}}^{i\nu} = S_{\text{id}}^\nu, \quad (4.2.2)$$

となる. ここで,  $S_{\text{id}}^\nu = (-T_{\text{id}}^{\tau\tau}/\tau - \tau T_{\text{id}}^{\eta\eta}, -T_{\text{id}}^{\tau x}/\tau, -T_{\text{id}}^{\tau y}/\tau, -3T_{\text{id}}^{\tau\eta}/\tau)$ . 粘性の補正の計算は次の式で記述される.

$$\partial_\tau (N_{\text{id}}^\tau + N_{\text{vis}}^\tau) + \partial_i N_{\text{vis}}^i = -\frac{1}{\tau} N_{\text{vis}}^\tau, \quad (4.2.3)$$

$$\partial_\tau (T_{\text{id}}^{\tau\nu} + T_{\text{vis}}^{\tau\nu}) + \partial_i T_{\text{vis}}^{i\nu} = S_{\text{vis}}^\nu, \quad (4.2.4)$$

ここで,  $S_{\text{vis}}^\nu = (-T_{\text{vis}}^{\tau\tau}/\tau - \tau T_{\text{vis}}^{\eta\eta}, -T_{\text{vis}}^{\tau x}/\tau, -T_{\text{vis}}^{\tau y}/\tau, -3T_{\text{vis}}^{\tau\eta}/\tau)$ . 以上で保存則が 2 種類の方程式群に分割された.

粘性テンソルの運動方程式 (3.2.25)-(3.2.27) を解く際も Strang splitting を利用する. 我々は粘



性テンソルの運動方程式を次の3つの方程式群に分割する．一つ目は移流方程式である．

$$(\partial_\tau + v^i \partial_i) n^\mu = 0, \quad (4.2.5)$$

$$(\partial_\tau + v^i \partial_i) \pi^{\mu\nu} = 0, \quad (4.2.6)$$

$$(\partial_\tau + v^i \partial_i) \Pi = 0, \quad (4.2.7)$$

二つ目は緩和方程式,

$$\partial_\tau n^\mu = -\frac{1}{\gamma\tau_n} (n^\mu - n_{\text{NS}}^\mu), \quad (4.2.8)$$

$$\partial_\tau \pi^{\mu\nu} = -\frac{1}{\gamma\tau_\eta} (\pi^{\mu\nu} - \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}), \quad (4.2.9)$$

$$\partial_\tau \Pi = -\frac{1}{\gamma\tau_\Pi} (\Pi - \Pi_{\text{NS}}), \quad (4.2.10)$$

三つ目はソース項のための方程式である．

$$\partial_\tau n^\mu = -I_n^\mu - J_n^\mu - K_n^\mu, \quad (4.2.11)$$

$$\partial_\tau \pi^{\mu\nu} = -I_\pi^{\mu\nu} - J_\pi^{\mu\nu} - K_\pi^{\mu\nu}, \quad (4.2.12)$$

$$\partial_\tau \Pi = -I_\Pi. \quad (4.2.13)$$

相対論的完全流体計算では、時間刻み  $\Delta\tau$  は CFL 条件を満たすように決められる．しかし、相対論的粘性流体力学では、保存則で記述される時間スケールに加え、粘性テンソルの運動方程式が緩和時間  $\tau_n, \tau_\eta, \tau_\Pi$  で特徴付けられる別の時間スケールを持つ．緩和方程式を差分法で解く場合、時間刻みを緩和時間より小さく取らなければ計算が不安定になってしまう．よって、緩和時間が流体の時間スケールに比べはるかに小さい場合、差分法では時間刻みを緩和時間より小さく取らなければならず、大きな計算コストがかかってしまう．この2次の粘性流体方程式の持つ問題は Piecewise Exact Solution (PES) 法 [83] により回避された．PES 法では、式 (4.2.8)-(4.2.10) を差分法で解く代わりに次の形式解を利用する．

$$n^\mu(\tau) = (n_0^\mu - n_{\text{NS}}^\mu) \exp\left[-\frac{\tau - \tau_0}{\gamma\tau_n}\right] + n_{\text{NS}}^\mu, \quad (4.2.14)$$

$$\pi^{\mu\nu}(\tau) = (\pi_0^{\mu\nu} - \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}) \exp\left[-\frac{\tau - \tau_0}{\gamma\tau_\eta}\right] + \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}, \quad (4.2.15)$$

$$\Pi(\tau) = (\Pi_0 - \Pi_{\text{NS}}) \exp\left[-\frac{\tau - \tau_0}{\gamma\tau_\Pi}\right] + \Pi_{\text{NS}}. \quad (4.2.16)$$

ここで、 $n_0^\mu, \pi_0^{\mu\nu}, \Pi_0$  は  $\tau = \tau_0$  における粘性テンソルの値である．アルゴリズムでは、緩和時間が CFL 条件から決められた時間刻み  $\Delta\tau$  より小さいときは PES 法を用い、緩和時間が  $\Delta\tau$  より大きいときは差分法を用いて式 (4.2.8)-(4.2.10) を計算する．

数値計算では、粘性テンソルの空間成分  $n^x, n^y, n^\eta, \pi^{xx}, \pi^{yy}, \pi^{\eta\eta}, \pi^{xy}, \pi^{y\eta}, \pi^{\eta x}, \Pi$  の時間発展を直接計算する．粘性テンソルの時間成分  $n^\tau, \pi^{\tau\tau}, \pi^{\tau x}, \pi^{\tau y}, \pi^{\tau\eta}$  の値は粘性テンソルの直行条件、 $n^\mu u_\mu = 0, \pi^{\mu\nu} u_\nu = 0$  から得られる．

### 4.2.2 アルゴリズム

分解された相対論的粘性流体方程式 (4.2.1)-(4.2.13) を解く流れを説明する. ここで, 保存量を  $U = U_{\text{id}} + U_{\text{vis}}$  と表す. ここで,  $U_{\text{id}} \equiv (N_{\text{id}}^\tau, T_{\text{id}}^{\tau\nu})$ ,  $U_{\text{vis}} \equiv (N_{\text{vis}}^\tau, T_{\text{vis}}^{\tau\nu})$  ( $\nu = \tau, x, y, \eta$ ) である. また, 流体変数と粘性テンソルの空間成分を,  $V_{\text{id}} \equiv (n, p, v^i)$ ,  $V_{\text{vis}} \equiv (n^i, \pi^{ij}, \Pi)(i, j = x, y, \eta)$  と示す.

1. 完全流体方程式 (4.2.1), (4.2.2) を計算する. 前節で説明した Riemann 解法を利用する. このステップでは, 保存量  $U_{\text{id}}(\tau)$  が  $U_{\text{id}}^*(\tau + \Delta\tau)$  へと発展する.  $*$  は, この物理量が完全流体計算のみで発展させられたことを示す. この完全流体計算では,  $V_{\text{id}}(\tau)$  を用いて, 式 (4.2.1), (4.2.2) における数値流速と Milne 座標に由来するソース項を評価する. 保存量  $U_{\text{id}}^*(\tau + \Delta\tau)$  から, 流体変数  $V_{\text{id}}^*(\tau + \Delta\tau)$  の値を計算する.
2. 粘性テンソルの運動方程式 (4.2.5)-(4.2.13) を解き,  $V_{\text{vis}}(\tau + \Delta\tau)$  を計算する. 移流方程式 (4.2.5)-(4.2.7) の計算には高精度風上差分法を用いる. 緩和方程式 (4.2.8)-(4.2.10) では時間刻みが緩和時間より短いとき PES 法を, 時間刻みが緩和時間より長いとき差分法を用いる. 式 (4.2.11)-(4.2.13) には予測子修正子法を用いる. 緩和方程式 (4.2.8)-(4.2.10) における Navier-Stokes 項  $n_{\text{NS}}^\mu, \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}, \Pi_{\text{NS}}$  と, 式 (4.2.11)-(4.2.13) における粘性テンソルの大きさについて 2 次の項  $I, K$  は流体変数の空間微分と時間微分を含む.  $n_{\text{NS}}^\mu, \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}, \Pi_{\text{NS}}$  と  $I, K$  の時間微分項は, ステップ 1 で計算された  $V_{\text{id}}^*(\tau + \Delta\tau)$  を用いて,

$$\partial_\tau V_{\text{id}} = (V_{\text{id}}^*(\tau + \Delta\tau) - V_{\text{id}}(\tau))/\Delta\tau. \quad (4.2.17)$$

と評価する.  $n_{\text{NS}}^\mu, \pi_{\text{NS}}^{\mu\nu}, \Pi_{\text{NS}}$  と  $I, K$  の空間微分項は中心差分で評価する. ここで, 粘性テンソルの中間ステップの値  $V_{\text{vis}}(\tau + \Delta\tau/2)$  を後のために保存しておく.

3. 保存則における粘性の補正 (4.2.3), (4.2.4) を計算する. ここで, 保存量  $U_{\text{id}}^*(\tau + \Delta\tau)$  と  $U_{\text{vis}}(\tau)$  が,  $U_{\text{id}}(\tau + \Delta\tau)$  と  $U_{\text{vis}}(\tau + \Delta\tau)$  へと発展する. 式 (4.2.3), (4.2.4) の空間微分項は中心差分で評価する. また, 保存量  $U_{\text{vis}}(\tau + \Delta\tau)$  から  $V_{\text{id}}(\tau + \Delta\tau)$  の値を計算する. 粘性がある場合に, 保存量から  $U$  から流体変数  $V_{\text{id}}$  を計算する方法は参考文献 [83] に基づく. ここで, 後のために中間ステップの流体変数の値  $V_{\text{id}}(\tau + \Delta\tau/2)$  を保存しておく.
4. 上記の 3 ステップにより, 次の時間ステップ  $\tau + \Delta\tau$  の物理量が計算された. さらに, 中間ステップの値  $V_{\text{id}}(\tau + \Delta\tau/2)$ ,  $V_{\text{vis}}(\tau + \Delta\tau/2)$  を用いながら, 上記の 3 ステップを繰り返すことで時間 2 次精度が達成される. 我々の上記の 3 ステップの計算では, 完全流体計算が計算時間の主要な部分を占める. よって, 2 回目の完全流体計算はスキップし, ステップ 2 とステップ 3 をもう中間ステップの値を用いて計算する.

### 4.3 境界条件

空間 2 次以上の精度のスキームでは, あるセルにおいて時間ステップを一つ進めるために, そのセルの両側の複数のセルの情報が必要になる. 計算領域の境界のセルでは, 片側 (計算領域の外) のセルの情報がないため, 境界条件を課す必要がある. 数値計算では, 計算領域の外に余分なセル (ゴーストセル) を用意し, ゴーストセルにおける物理量の値を境界条件から決める. 系の境界で

流体が一様に分布している場合は、境界のセルの情報をゴーストセルにコピーすればよい。また、系の外に向かって流れが生じているようなとき、境界条件の影響が小さい場合がある。そのようなときも、ゴーストセルに境界のセルの情報をコピーすることにする。

次章におけるテスト計算の内、Landau-Khalatnikov 解、完全流体と粘性流体における Gubser 解における計算では、ゴーストセルに境界のセルの情報をコピーする。6 章の KH 不安定性の解析でもこの境界条件を利用する。6 章ではこの境界条件は適切な取扱いでないが、境界の影響が届いていない系の中心領域にのみ注目することにする。次章の Milne 座標における衝撃波管問題では境界の影響が大きいため、ゴーストセルに衝撃波管問題の解析解を代入する。衝撃波管問題では、さらに境界の影響を抑えるため、PPM を利用しているときでも、境界のセルでは 2 次精度補間を MC limiter とともに用いる。真空への膨張テストでは、計算領域の中に真空と物質の境界が存在する。真空と物質との間の境界条件は、その境界が光速で真空に向かって動き、境界における圧力がゼロというものである。真空への膨張テストでは、真空と物質との境界では Remap を行わず、Lagrange グリッドを用いて真空と物質との境界を追跡する。また、計算を安定させるため、真空と物質との境界では 2 次精度補間を minmod limiter [161] とともに用いる。

## 第5章 流体コードのテスト計算

ここで、前章で開発した Milne 座標を用いた相対論的流体コードのテスト計算を行う。3 章で紹介した解析解の知られている問題に我々の流体コードを適用する。解析解を初期条件として数値計算をスタートし、後の時刻に解析解を再現できているかを見る。状態方程式は  $e = 3p$ , バリオン数密度はゼロとする。

### 5.1 完全流体テスト

#### 5.1.1 衝撃波管問題

衝撃波管問題は 3.3.1 節で紹介した Riemann 問題の一つである。Riemann 問題において、初期条件の速度をゼロした場合に対応する。衝撃波管問題では衝撃波、接触不連続面、希薄波の 3 種類の波が生じるため、流体コードのテスト問題に適している。この衝撃波管問題を我々の Milne 座標を利用した流体コードのテスト問題として利用するため、式 (4.1.18) の初期値問題が式 (4.1.17) のデカルト座標における Riemann 問題と等しい性質を用いる。数値計算では式 (4.1.18) の初期値問題を解き、式 (4.1.17) の Riemann 問題の解析解と比較を行う。

比較の際にはデカルト座標で表された Riemann 問題の解析解を Milne 座標で表しなおす。初期不連続面の位置を  $(t_0, z_i)$ ,  $(\tau_0, \eta_i)$  と表す。  $\tau_0$  は数値計算における初期固有時刻と一致する。ここで、  $t_0, z_i$  と  $\tau_0, \eta_i$  は座標変換により次の関係を満たしている、  $\tau_0 = (t_0^2 - z_i^2)^{1/2}$ ,  $\eta_i = \tanh^{-1}(z_i/t_0)$ 。まず、固有時間  $\tau_f = \tau_0 + \Delta\tau$  において、  $\eta = \eta_i$  から一定の  $z$  方向速度  $V^z$  で動いた不連続面（衝撃波、接触不連続面、希薄波）の位置  $\eta_f$  は次のように表される。

$$\eta_f = \frac{1}{2} \log \frac{(1 + V^z)\delta t + \tau_0 \cosh \eta_i + \tau_0 \sinh \eta_i}{(1 - V^z)\delta t + \tau_0 \cosh \eta_i - \tau_0 \sinh \eta_i}, \quad (5.1.1)$$

ここで、  $\delta t$  は

$$\delta t = \frac{1}{1 - (V^z)^2} \left\{ -\tau_0 (\cosh \eta_i - V^z \sinh \eta_i) + \left( \tau_0^2 (\cosh \eta_i - V^z \sinh \eta_i)^2 + (1 - (V^z)^2) (\Delta\tau^2 + 2\tau_0 \Delta\tau) \right)^{1/2} \right\}. \quad (5.1.2)$$

である。希薄波の状態は、デカルト座標に  $\xi = (z - z_i)/(t - t_0)$  の形を通して依存する。Milne 座標においては、希薄波の状態は、

$$\xi = \frac{\tau \sinh \eta - \tau_0 \sinh \eta_i}{\tau \cosh \eta - \tau_0 \cosh \eta_i}, \quad (5.1.3)$$

を通して座標系に依存する。速度場の  $v^z$  と  $v^\eta$  の座標変換則は式 (3.2.7), (3.2.8) で与えられている。

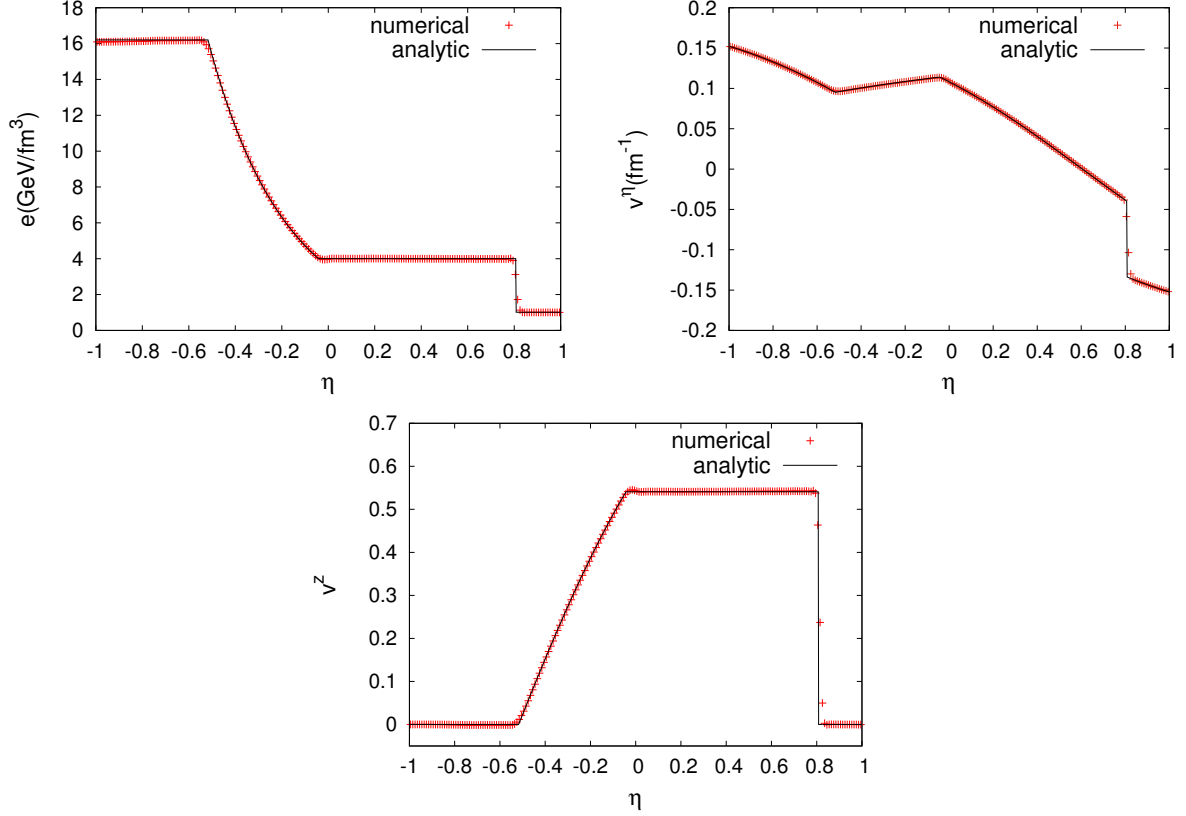


図 5.1: 衝撃波管問題における解析解（黒線）と数値解（赤点）の比較.  $\tau = 5\text{fm}$  における結果を横軸ラピディティとして示す. 初期不連続面は  $\eta = 0$  に位置する. 上側左図はエネルギー密度  $e$ , 上側右図はラピディティ方向の 3 元速度  $v^\eta$ , 下図は  $z$  方向の 3 元速度の結果.

ここでは, 初期不連続面が  $\eta = 0$  に位置する場合と,  $\eta = 1$  に位置する場合の 2 つの場合についてテスト計算を行う. 初期時刻は  $\tau_0 = 1\text{fm}$  とする. どちらの場合も  $z$  方向の初期速度はゼロ  $v^z = 0$  とする. 数値計算では  $z$  方向速度  $v^z$  ではなくラピディティ方向速度  $v^\eta$  の時間発展に注目する.  $v^z = 0$  の場合,  $v^\eta$  の初期条件は,

$$v^\eta = \frac{1}{\tau_0} \frac{-\sinh\eta}{\cosh\eta}, \quad \tau = \tau_0, \quad (5.1.4)$$

となり, ラピディティに依存して有限の値を持つ. Milne 座標で静止した状態を見ると, 中心に向かって流れが生じているように見える. 数値計算では, 格子サイズを  $\Delta\eta = 0.01$ , 固有時間ステップサイズを  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  とする.

一つ目のテスト問題では,  $\eta > 0$  ( $\eta < 0$ ) における温度を  $T_L = 400\text{ MeV}$  ( $T_R = 200\text{ MeV}$ ) とする. 図 5.1 に  $\tau = 5\text{fm}$  におけるエネルギー密度, ラピディティ方向速度  $v^\eta$ ,  $v^\eta$  を式 (3.2.8) により座標変換して得られた  $z$  方向速度  $v^z$  の数値計算結果と解析解を示す.  $\eta = 0$  からラピディティ正の領域に衝撃波が, ラピディティ負の領域に希薄波が發展している. 数値計算結果が解析解を良く再現できていることを確認できる.

二つ目のテスト計算では初期不連続面の位置を  $\eta = 1$  とする. その他の条件,  $T_L$ ,  $T_R$ ,  $v^z$  は一つ目のテスト計算と同じである. デカルト座標で見ると, この二つのテスト問題は完全に同じものとなるが, Milne 座標では違った問題として見える. 再び, 図 5.2 に  $\tau = 5\text{fm}$  におけるエネルギー密度  $e$ , 3 元速度  $v^\eta, v^z$  の数値計算結果と解析解を示す. 一つ目のテスト問題と異なり, 衝撃波が  $\eta = 1$

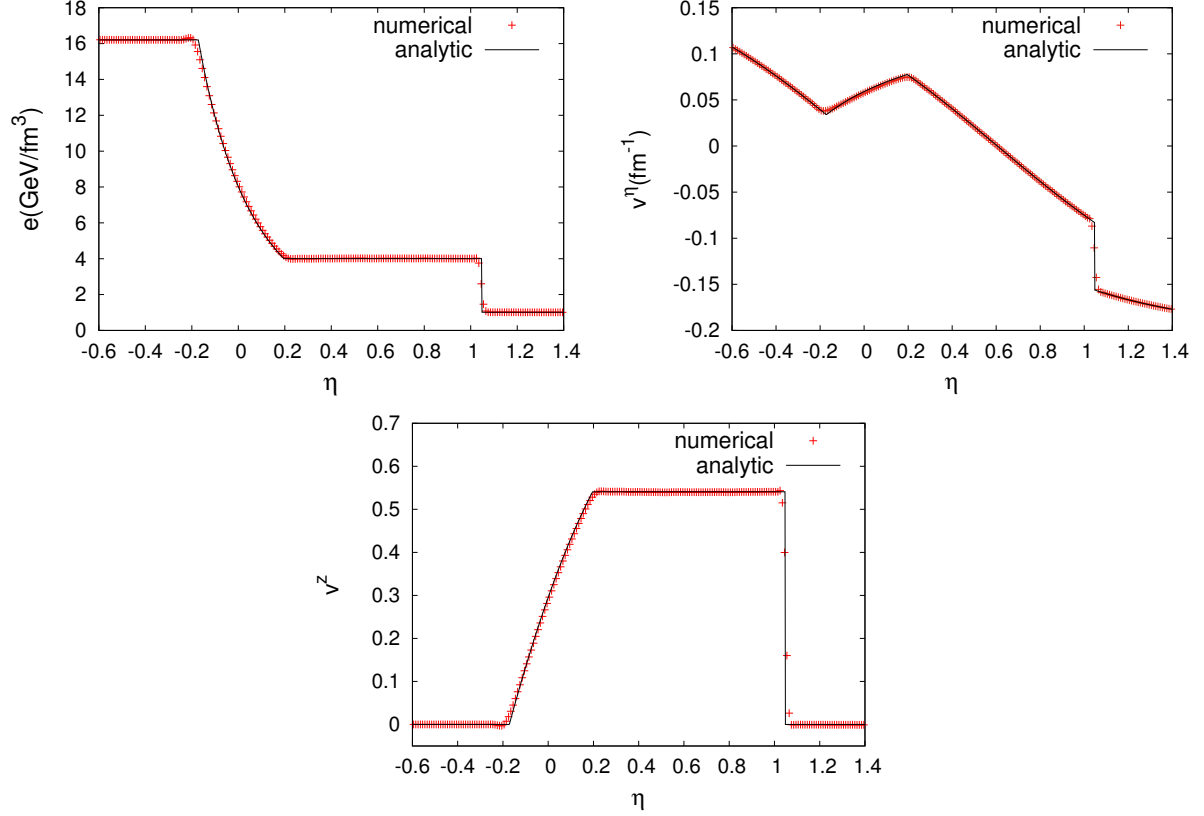


図 5.2: 衝撃波管問題における解析解（黒線）と数値解（赤点）の比較.  $\tau = 5\text{fm}$  における結果を横軸ラピディティとして示す. 初期不連続面は  $\eta = 1$  に位置する. 上側左図はエネルギー密度  $e$ , 上側右図はラピディティ方向の 3 元速度  $v^\eta$ , 下図は  $z$  方向の 3 元速度の結果.

の位置からほとんど動いていないことが分かる. ここでも, 数値解と解析解の一致を得ることができ, 我々のアルゴリズムが正しく動いていることが分かる.

### 5.1.2 真空への膨張

真空への 1 次元膨張を考える. 真空への膨張問題も Riemann 問題の特別な場合であり, Riemann 問題において, 初期条件の片側の状態を真空とした初期値問題である. 後の時刻に, 真空と物質との間に希薄波が発展する. 原子核衝突実験における系では, 真空中に高温物質が生成され, 高温物質が真空中に膨張していくというものであるため, この真空への膨張問題は, 原子核衝突実験で利用される流体コードのテスト問題に適している. 前節の衝撃波管問題と同様, この問題を我々の Milne 座標を用いた流体コードのテスト問題に利用する. 初期条件を次のように設定する.

$$\begin{aligned} p &= 1000 \text{ fm}^{-4}, & v^\eta &= -\frac{\sinh\eta}{\cosh\eta} & \text{for } |\eta| \leq 1.5, \\ p &= 0, & v^\eta &= 0, & \text{for } |\eta| > 1.5, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

ここで,  $|\eta| \leq 1.5$  の領域の  $v^\eta$  は  $v^z = 0$  に対応し,  $|\eta| > 1.5$  の領域は真空となっている. 前節の衝撃波管問題では, 計算領域の外側から内側への流れが存在し, 数値計算の誤差の要因になっている可能性があった. このテスト問題では, 計算領域の境界は真空になっているため, 境界条件による人工的な数値エラーを気にしなくてよい.

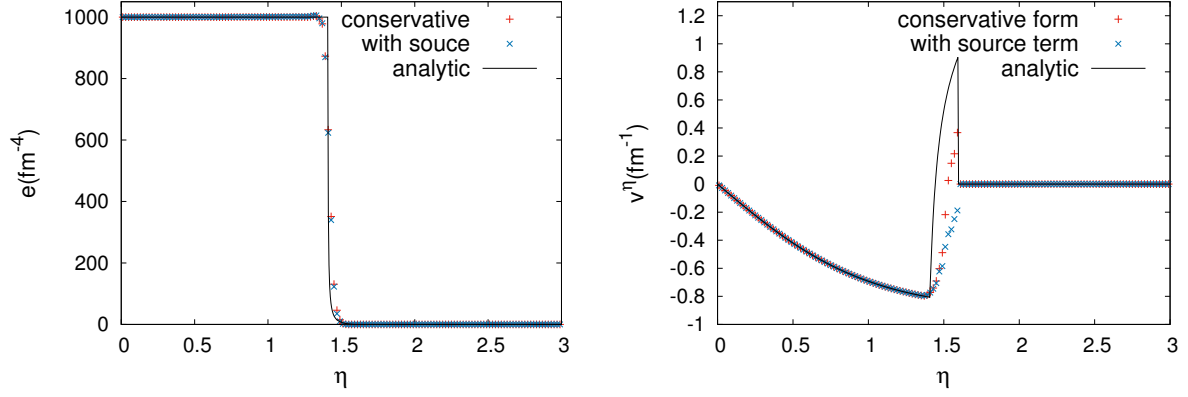


図 5.3: 真空への膨張問題の  $\tau = 1.1\text{fm}$  におけるエネルギー密度  $e$  (左図), 3 元速度のラピディティー成分  $v^\eta$  (右図) の分布. 赤点は保存型の流体コードの結果, 青点はソース項を持つ流体コードの結果, 黒線は解析解を示す.

ここで, Milne 座標におけるメトリック由来のソース項を回避した保存型のアルゴリズムと, ソース項を持つ保存式を直接差分化したアルゴリズムを比較する. ソース項を持つアルゴリズムとして, 式 (4.1.29) を直接 4.1.1 節と同様の方法で差分化し, 4.1.3 節と同様の流れでアルゴリズムを構築した. このソース項を持つ流体コードでは  $T^{\tau\tau}$ ,  $T^{\tau\eta}$  の値が Lagrange ステップにおいてアップデートされる. セルサイズは  $\Delta\eta = 0.02$ , 時間きざみは  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$ , 初期時刻は  $\tau_0 = 1\text{fm}$  とする.

図 5.3 は  $\tau = 1.1\text{ fm}$  におけるエネルギー密度  $e$ , 3 元速度  $v^\eta$  の結果を示している. 赤の点が 4.1.1 節で説明した保存型の流体コードによる結果であり, 黒の点がソース項を持つ流体コードによる結果である.  $0 < \eta < 1.46$  の領域では, 流体が静止しており, Milne 座標では内側に向かって流れが存在するように見える.  $1.46 < \eta < 1.58$  の領域には希薄波が広がっている. 希薄波は静止した流体に向かって音速で侵入し, 真空に向かって光速で広がっていく. 計算の初期, 希薄波の領域には大きな速度勾配が生じ, どちらの流体コードも解析解を再現しきれていないが, 保存型の流体コードの方が解析解に近い結果が得られている.

図 5.4 に  $\tau = 4\text{fm}$  におけるエネルギー密度  $e$ , 3 元速度  $v^\eta$ ,  $v^z$  の結果を解析解とともに示す.  $|\eta| < 0.27$  の領域では流体は静止しており,  $0.27 < |\eta| < 2.89$  の領域に希薄波が広がっている. 真空と物質の境界は  $\eta = \pm 2.89$  に位置し, 光速で真空側に進んでいる. 保存型のアルゴリズム, ソース項有りのアルゴリズムともにエネルギー密度, 3 元速度の  $z$  成分  $v^z$  の解析解を良く再現している. エネルギー密度の結果において, 真空と物質の境界付近に注目して見ると, 保存型のアルゴリズムによる結果の方がわずかに解析解に近い結果が得られている. また,  $|\eta| < 0.27$  の流体が静止した領域においても, ソース項を持つアルゴリズムの方が時間とともにエネルギー密度の解析解をわずかに下回る傾向が見られた. 3 元速度のラピディティー成分  $v^\eta$  においては, 真空付近において二つのコードの結果の違いが顕著に見え, 保存型のアルゴリズムの方が解析解に近い結果が得られている.

真空と物質との境界では圧力がゼロである. また, 真空と物質との境界では, 流速は光速, ローレンツ因子は無限大となるため, 真空付近では計算が不安定になりやすい. 真空付近における二つのコードの結果の違いは計算の安定性に大きく影響する. 数値誤差により圧力が負になってしまったり, 流速が光速を超えてしまうことがある. 保存型のアルゴリズムは, ソース項を持つアルゴリズムよりも高い安定性を実現することができた. 今, 初期不連続面を  $\eta = 1.5$  に設定しているが, 初期

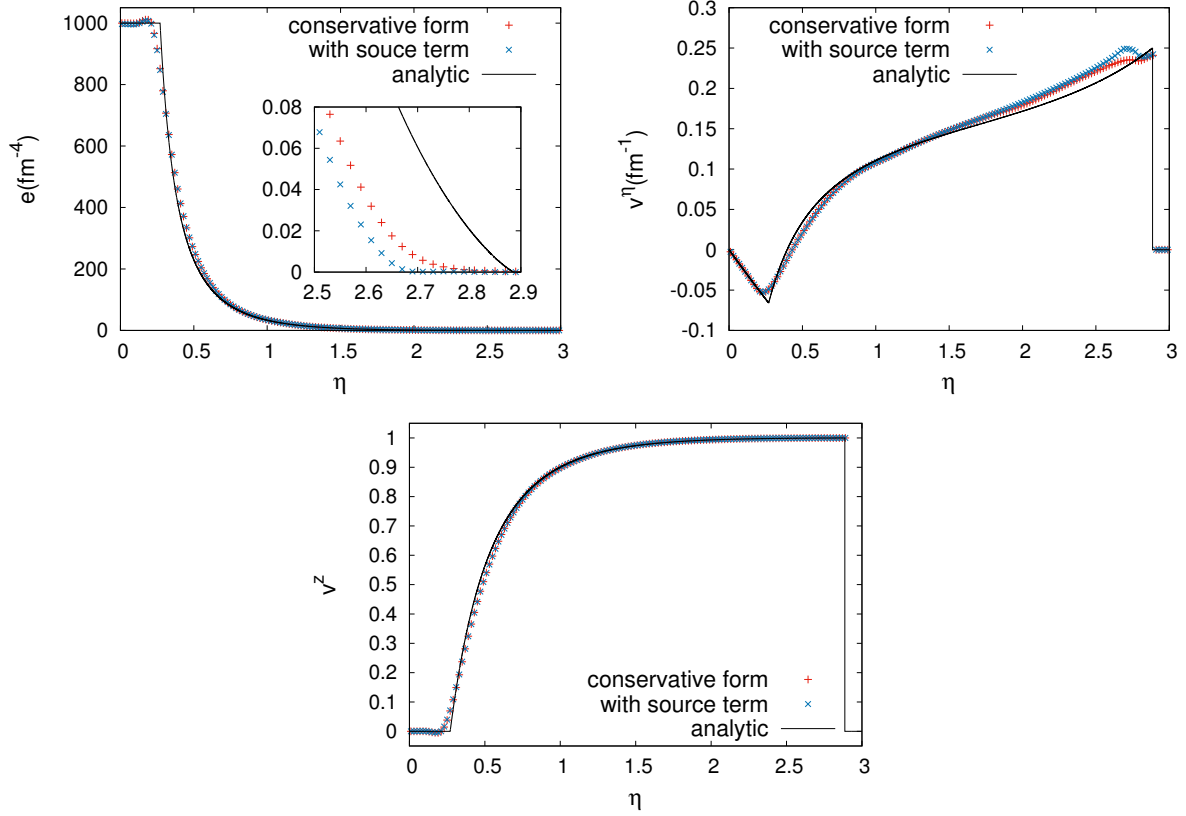


図 5.4: 真空への膨張問題.  $\tau = 4\text{fm}$  におけるエネルギー密度  $e$  (左上図), 3 元速度のラピディティー成分  $v^\eta$  (右上図), 3 元速度の  $z$  成分  $v^z$  (下図) の分布. 赤点は保存型の流体コードの結果, 青点はソース項を持つ流体コードの結果, 黒線は解析解を示す.

不連続面の位置をよりラピディティーの大きな位置に置くと, 初期の  $v^\eta$  の勾配がより大きくなり, 流体コードにとってさらに厳しいテスト問題になる. 初期不連続面を  $\eta = 1.7$  に置いた場合, ソース項有りのアルゴリズムは数値的な不安定性を起こしてしまった. 保存型のアルゴリズムは初期不連続面を  $\eta = 2$  に置いた場合でも安定に計算を行うことができた.

二つのコードの結果の違いを定量的に見るため, 次のように定義される L1 norm [161] を計算した.

$$L(u, N_{\text{cell}}) = \sum_i |u(\eta_i; N_{\text{cell}}) - u_{\text{exact}}(\eta_i)| \Delta\eta, \quad (5.1.6)$$

ここで,  $u$  はエネルギー密度  $e$ , 3 元速度のラピディティー成分  $v^\eta$  などの物理量,  $u(\eta_i; N_{\text{cell}})$  はセル数  $N_{\text{cell}}$  での数値計算による  $\eta = \eta_i$  における  $u$  の計算結果,  $u_{\text{exact}}(\eta_i)$  は  $\eta = \eta_i$  における  $u$  の解析解,  $\Delta\eta$  は格子サイズを表す. 式 (5.1.6) で定義される L1 norm により, 物理量  $u$  の数値計算結果の解析解からの誤差を評価する. 図 5.5 に横軸をセル数としてエネルギー密度  $e$ , 3 元速度のラピディティー成分  $v^\eta$  の L1 norms を示す. 図 5.5 の L1 norm の傾きは, セルサイズを小さくしていったときに, 数値解がどれほどの速さで解析解に収束するかを示す. 真空への膨張問題では, 分布に不連続面が存在するため, L1 norm の傾きは両コードとも 1 次精度スキームのものと同一になる. しかし, L1 norm の絶対値に注目すると, 保存型のアルゴリズムの方が解析解からの誤差が小さいことが分かる.



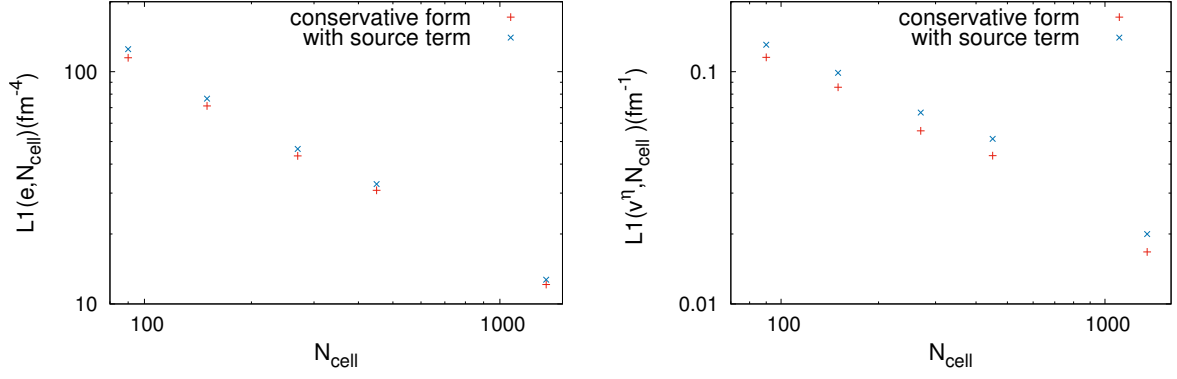


図 5.5: 真空への膨張問題におけるエネルギー密度  $e$  (左図) と 3 元速度  $v^\eta$  (右図) の L1 norm. 横軸は数値計算におけるセル数. 赤点が保存型のアルゴリズム, 青点がソース項有りのアルゴリズムの結果を示す.

### 5.1.3 Landau-Khalatnikov 解

3.3.2 節で紹介した Landau-Khalatnikov 解 [103, 141, 142] は原子核衝突実験の時空発展に適した解析解である. この Landau-Khalatnikov 解の漸近系 (3.3.39) を用いてテスト計算を行う. エネルギー密度の解は式 (3.3.39) で与えられており, 流速の解は  $v^\eta = 0$  である. 式 (3.3.39) が持つパラメータを,  $e_0 = 10 \text{ GeV/fm}^3$ ,  $\Delta = 0.5 \text{ fm}$  と設定する. 式 (3.3.39) は  $\Delta$  に比べ十分時間が経った後に有効となるので, 数値計算では, 初期時刻を  $\tau_0 = 500 \text{ fm}$  とする. セルサイズを  $\Delta\eta = 0.1$ , 時間きざみを  $\Delta\tau = 0.1 \text{ fm}$ , または  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta = 5 \text{ fm}$  として計算を行う. 図 5.6 に  $\tau = 510, 600, 700, 1000 \text{ fm}$  における Landau-Khalatnikov 解に関する数値計算結果と解析解を示す.  $\Delta\tau = 5 \text{ fm}$  と  $\Delta\tau = 0.1 \text{ fm}$  のどちらの計算も解析解を良く再現している. 固有時間が大きいときラピディティー方向の空間スケールは  $\tau\Delta\eta$  と引き延ばされるため, 時間きざみを大きくとることができる. ラピディティーが大きな領域では, 数値解と解析解のずれを確認できる. これは, Landau-Khalatnikov 解 (3.3.39) がラピディティーの大きな領域では有効でないため [141, 142] だと思われる.

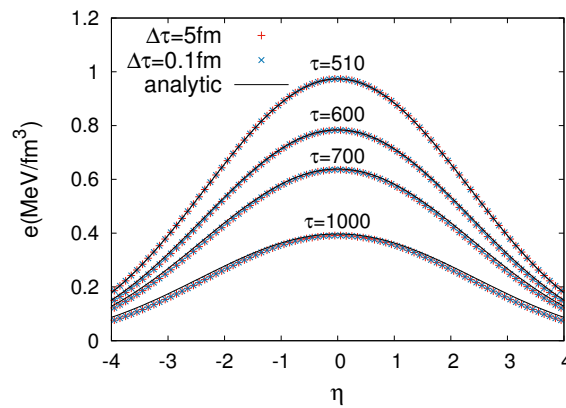


図 5.6: Landau-Khalatnikov 解の解析解 (黒線) と  $\Delta\tau = 0.1 \text{ fm}$  (青点),  $5 \text{ fm}$  (赤点) としたときの数値計算結果. 上から  $\tau = 510, 600, 700, 1000 \text{ fm}$  におけるエネルギー密度の結果.

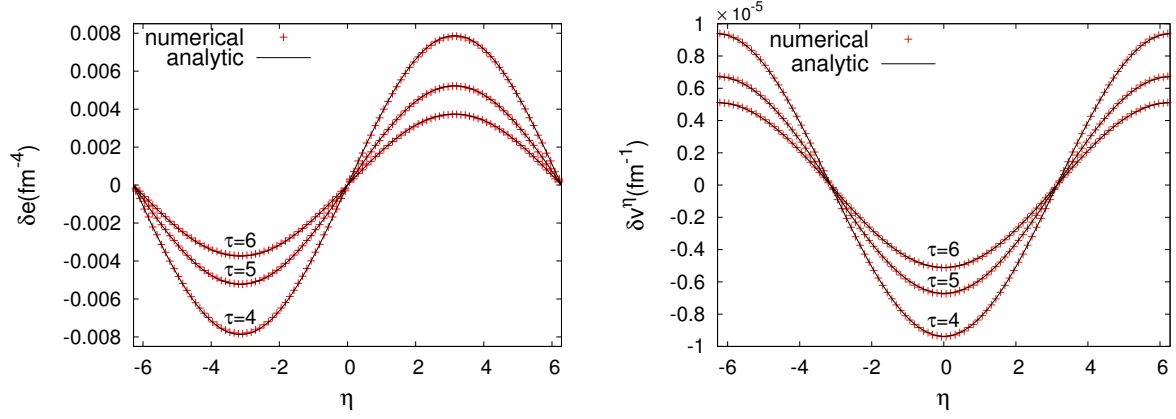


図 5.7: Bjorken 膨張中のゆらぎの伝播における  $D > 0$  の場合の解析解（黒線）と数値解（赤点）.  $\tau = 4, 5, 6$  fm におけるエネルギー密度のゆらぎ（左図）と 3 元速度（右図）.

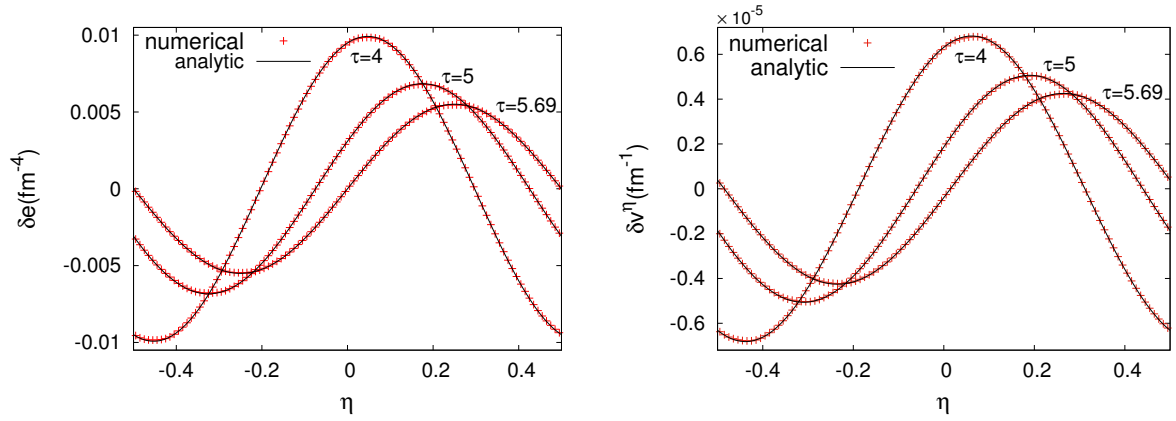


図 5.8: Bjorken 膨張中のゆらぎの伝播における  $D < 0$  の場合の解析解（黒線）と数値解（赤点）.  $\tau = 4, 5, 5.694$  fm におけるエネルギー密度のゆらぎ（左図）と 3 元速度（右図）.

#### 5.1.4 Bjorken 膨張背景におけるゆらぎの伝播

3.3.4 節で紹介した Bjorken 膨張における衝突軸方向のゆらぎの伝播をテスト問題として利用する. その解析解は式 (3.3.63), (3.3.64) で与えられる. ここでは, 式 (3.3.67) が満たされている場合を考える. 式 (3.3.63), (3.3.64) は  $D \equiv (1 - \lambda)^2 - 4k^2\lambda \neq 0$  の値により異なる振る舞いを示す. 式 (3.3.67) を満たすとき, 式 (3.3.63), (3.3.64) は,  $D > 0$  の場合,

$$\delta e(\tau, \eta) = A \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(-3-\lambda-\sqrt{D})/2} \sin(k\eta), \quad (5.1.7)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = \frac{\lambda - 1 - \sqrt{D}}{2ke_0(1 + \lambda)\tau_0} A \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(-3+\lambda-\sqrt{D})/2} \cos(k\eta), \quad (5.1.8)$$

また,  $D < 0$  の場合,

$$\delta e(\tau, \eta) = A \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-(3+\lambda)/2} \sin(k\eta - \theta), \quad (5.1.9)$$

$$\delta v^\eta(\tau, \eta) = \frac{A}{2ke_0(1 + \lambda)\tau_0} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{(\lambda-3)/2} \left[ (\lambda - 1)\cos(k\eta - \theta) + \sqrt{-D}\sin(k\eta - \theta) \right], \quad (5.1.10)$$

と書くことができる．数値計算の初期時刻は  $\tau_0 = 1$  とする．Bjorken スケーリング解における初期エネルギー密度は  $e_0 = 1000 \text{ fm}^{-4}$  とする． $D > 0$  の場合として，波数  $k = 0.5$ ,  $D = 0.111$ ,  $A = 0.1 \text{ fm}^{-4}$  と設定し，セルサイズ  $\Delta\eta = 0.1256$ , 時間刻み  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  として数値計算を行う．また， $D < 0$  の場合として，波数  $k = 2\pi$ ,  $D = -52.193$ ,  $A = 0.1 \text{ fm}^{-4}$  と設定し，セルサイズ  $\Delta\eta = 0.01$ , 時間刻み  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  として数値計算を行う．

図 5.7 と 5.8 は Bjorken 膨張中のゆらぎの伝播の  $D > 0$  と  $D < 0$  の場合の数値解と解析解を示す．図 5.7 ( $D > 0$  の場合) では，ゆらぎが伝播せず減衰していることが分かる．図 5.8 ( $D < 0$  の場合) では，ゆらぎが伝播しながら減衰していることが分かる．数値解と解析解の良好な一致を得ることができた．式 (3.3.67) が満たされない場合では，式 (3.3.63) (3.3.64) の二つのモードが残り，二つのモードの干渉により，ゆらぎが増幅される場合もある．同様の，Bjorken 膨張中を伝播するゆらぎの増幅は参考文献 [88] でも議論されている．

### 5.1.5 完全流体における Gubser 解

これまで空間 1 次元のテスト計算を行ってきたが，ここで，3.3.5 節で紹介した Gubser 解を用いて空間多次元のテスト計算を行う．Gubser 解は高エネルギー原子核衝突実験における多次元的な膨張の特徴を捉えており，原子核衝突実験で利用される流体コードのテスト問題に適している．Gubser 解を用いて原子核衝突実験で利用される相対論的完全流体コードのテスト計算が行われている [44–46, 85, 152]．Gubser 解においてラピディティー方向は Bjorken スケーリング解で与えられているため，ラピディティー方向の記述に関するテスト問題には適切でないが，多次元系における数少ないテスト問題として有用である．また，我々の Milne 座標における次元分割法の手順の正当性を確認することができる．

完全流体における Gubser 解は式 (3.3.86)-(3.3.88) で与えられる．式 (3.3.86)-(3.3.88) における，パラメータを  $q = 1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $e_0 = 400$  と設定する．数値計算の初期時刻を  $\tau_0 = 1 \text{ fm}$ , セルサイズを  $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ fm}$ ,  $\Delta\eta = 0.1$ , 時間刻みを  $\Delta\tau = 0.1\Delta x$  とする．図 5.9, 5.10 において，Gubser 解に関する数値計算結果と解析解とを比較した． $y = 0$  における， $x$  軸方向の分布を示している．図 5.9 の左図は  $\tau = 3 \text{ fm}$ , 右図は  $\tau = 5 \text{ fm}$  における結果であり，3 次元的な膨張によりエネルギー密度が時間とともに下がっている．これまでのテスト計算では，アルゴリズムにおいて，流速評価の前の補間操作において空間 3 次精度の PPM を利用していた．今回，PPM の代わりに MC limiter による空間 2 次精度の補間を行った場合でも計算を行った．PPM を用いた計算（赤点）はエネルギー密度，3 元速度において解析解を良く再現している．MC limiter を用いた計算（青点）はエネルギー密度の結果において解析解を上回っている．3 元速度の結果においては，MC limiter を用いた計算は解析解をわずかに下回っている．MC limiter を用いた計算は，多次元的な膨張を再現しきれず，エネルギー密度の減少が遅くなっている．MC limiter の代わりに他の 2 次精度スキームである minmod limiter, superbee limiter [161] を用いた場合でも同じ傾向が見られた．1 次元的な膨張においてはこのような傾向は現れなかった．参考文献 [151] では，2 次精度スキームを用いて，粘性がある場合の Gubser 解のテストが行われた．そこでは，解析解を再現するために，スキームの持つ数値粘性に結びつくパラメータを調整する必要があり，原子核衝突実験への応用で用いているパラメータの値とは異なる値が利用された．PPM を用いた我々の計算は，Gubser 解の多次元的な発展をきれいに再現することができた．後に紹介するように，我々の計算は粘性がある場合の Gubser

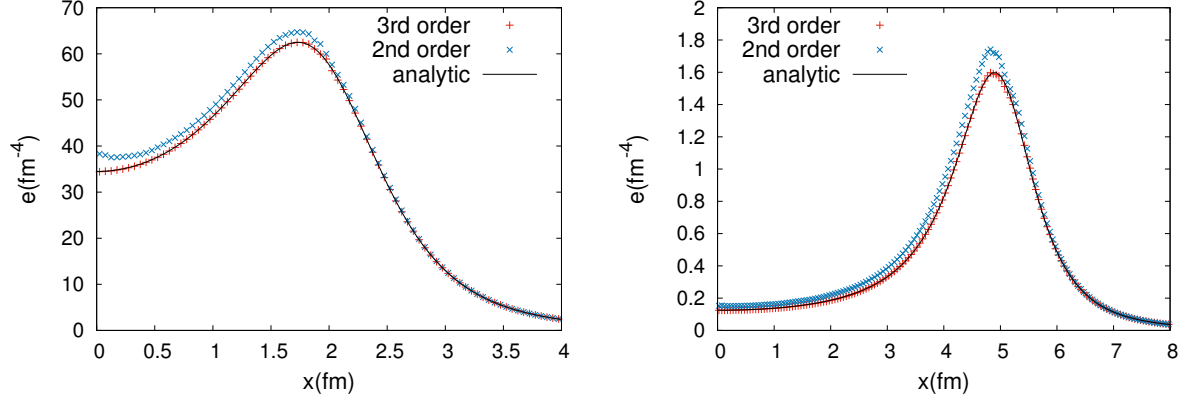


図 5.9:  $\tau = 3$  fm (左図) と  $\tau = 5$  fm (右図) における Gubser 解の  $y = 0$  におけるエネルギー密度分布. PPM を用いた計算 (赤点) と MC limiter を用いた計算 (青点) による結果と解析解 (黒線) の比較.

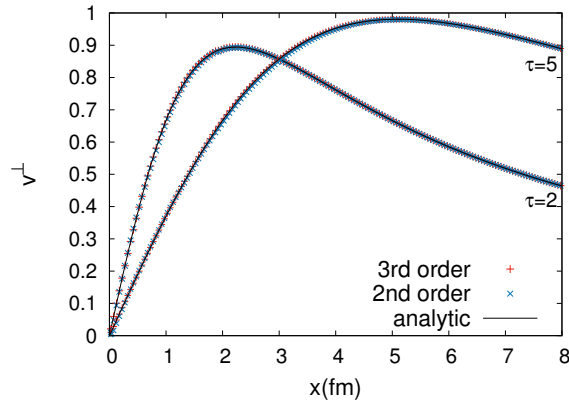


図 5.10:  $\tau = 3$  fm と  $\tau = 5$  fm における Gubser 解の  $y = 0$  における動径方向の 3 元速度分布. PPM を用いた計算 (赤点) と MC limiter を用いた計算 (青点) による結果と解析解 (黒線) の比較.

解を参考文献 [151] よりも良い精度で再現することができた. 我々の新しい流体コードは数値粘性が小さく, 原子核衝突実験における QGP の粘性係数の評価に適している.

### 5.1.6 保存則テスト

ここで, 我々の流体コードがエネルギー運動量保存則を保っているかテストする. Milne 座標において保存量は  $\tau T^{\tau\nu}$  ( $\nu = t, x, y, z$ ) である. 我々の保存型のアルゴリズムにおいて, 時間きざみを一つ進める際の保存量の時間発展は次のように表される,

$$\tau^{n+1}(T^{\tau\nu})_i^{n+1} = \tau^n(T^{\tau\nu})_i^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta}(F_i^\nu - F_{i-1}^\nu), \quad (5.1.11)$$

ここで,  $F_i^\nu$  は時間  $\Delta\tau$  の間に  $i$  番目のセル境界を通過する保存量の流速を表す. 式 (5.1.11) は Lagrange ステップと Remap の二つのステップをまとめて表したものである. 式 (5.1.11) を全てのセルについて足し上げると,

$$\sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} \tau^{n+1}(T^{\tau\nu})_i^{n+1} = \sum_{i=i_{min}}^{i_{max}} \tau^n(T^{\tau\nu})_i^n - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta}(F_{i_{max}}^\nu - F_{i_{min}-1}^\nu), \quad (5.1.12)$$

$\Delta\eta$	$E_0$ (GeV)	conservative form		with source term	
		$\varepsilon_E$	$\sum  M^{n+1} - M^n $ (GeV)	$\varepsilon_E$	$\sum  M^{n+1} - M^n $ (GeV)
0.02	1117	7.48E-10	6.00E-07	6.42E-04	2.02E-02
0.1	1117	2.85E-10	1.68E-07	3.77E-03	1.10E-01
0.2	1133	6.46E-10	1.65E-07	7.48E-03	7.90E-02
0.5	1148	1.48E-10	7.17E-08	4.36E-02	1.60E-01

表 5.1: 数値計算におけるエネルギー運動量保存則の破れ.

となり, 全保存量の変化は系の境界における流速にのみ依存する. ソース項を持つ式 (3.2.15)–(3.2.18) を用いたアルゴリズムでは, 式 (5.1.12) は成り立たず, ソース項において保存則を破る誤差が生じる.

Milne 座標におけるソース項が, 数値計算においてエネルギー運動量保存に与える影響を見る. 高エネルギー原子核衝突実験における衝突軸方向の分布としてよく利用される, 次の初期条件を用いて数値計算を行う.

$$e(\tau_0, \eta) = e_0 \exp \left[ -\frac{(|\eta_s| - \eta_{\text{flat}}/2)^2}{\sigma_\eta^2} \theta(|\eta| - \eta_{\text{flat}}/2) \right] \theta(Y_b - |\eta|), \quad (5.1.13)$$

$$v^\eta(\tau_0, \eta) = 0, \quad (5.1.14)$$

ここで,  $Y_b = 5.3$  はビームラピディティーであり,  $\sigma_\eta = 2.1$  と  $\eta_{\text{flat}} = 2.6$  である. 中心に  $\eta_{\text{flat}}$  の長さの平坦なエネルギー密度領域があり, その外側は幅  $\sigma_\eta$  で減衰するようになっている. また,  $e_0 = 30 \text{ GeV/fm}^3$  とする. 上記のパラメータは RHIC における典型的な値である [26, 46]. ここでは, Milne 座標由来のソース項の効果に注目し, ラピディティー方向 1 次元の計算を行う. 参考文献 [46] では, 上記のラピディティー方向の初期条件に加え, Glauber モデルによる  $(x, y)$  平面の初期条件を用いた 3 次元の計算によるエネルギー保存則のテストが行われている. そのテスト計算では, 参考文献 [46] の流体コードにおいて  $\Delta\eta = 0.2$  のとき, 3 % 以内の精度でエネルギー保存則が保たれていると報告された.

我々の流体コードにおけるエネルギー運動量保存則をテストするため, 次の全エネルギー, 全運動量を計算する.

$$E(\tau^n) = \tau^n \Delta\eta \sum_{\text{all grid}} (T^{\tau^0})_i^n, \quad (5.1.15)$$

$$M(\tau^n) = \tau^n \Delta\eta \sum_{\text{all grid}} (T^{\tau^z})_i^n. \quad (5.1.16)$$

$\tau_0 = 1 \text{ fm}$  から  $\tau = 10 \text{ fm}$  まで数値計算を行う. セルサイズは  $\Delta\eta = 0.02, 0.1, 0.2, 0.5$  の場合について計算を行い, 時間きざみは  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  とする. 初期の全運動量はゼロとなる. 保存型のアルゴリズムとソース項を持つアルゴリズムでそれぞれ計算を行い比較する.

テスト計算の結果, ソース項を持つアルゴリズムでは,  $\Delta\eta = 0.5$  の場合, 固有時間とともに全エネルギーと全運動量が増加した. それ以外のセルサイズの計算では, 全エネルギーと全運動量は初期に増加し, 時間がたった後減少した. 保存型のアルゴリズムでは固有時間とともに全エネルギーと全運動量に不規則なずれが見られた. 数値計算における, 合計のエネルギー運動量保存の破れを

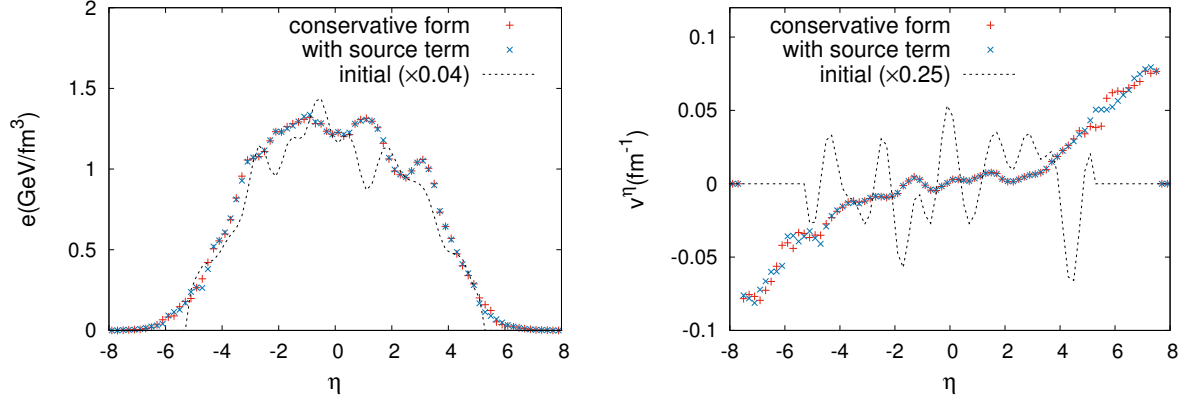


図 5.11: ゆらぎを含む初期条件を用いた場合の  $\tau = 10\text{fm}$  におけるエネルギー密度（左図）と 3 元速度（右図）の数値計算結果. 保存型のアルゴリズムの結果（赤点）とソース項を持つアルゴリズムの結果（青点）、初期条件（点線）を示す.

評価するため、各時間ステップでエネルギー運動量保存の破れを計算し、それを全ての時間について足し上げた次の量に注目する.

$$\varepsilon_E \equiv \sum_{\text{all step}} \frac{|E(\tau^n) - E(\tau^{n-1})|}{E(\tau_0)}, \quad (5.1.17)$$

$$\varepsilon_M \equiv \sum_{\text{all step}} \frac{|M(\tau^n) - M(\tau^{n-1})|}{|M(\tau_0)|}. \quad (5.1.18)$$

その結果を表 5.1 に示す. 全てセルサイズの計算において、保存型のアルゴリズムはソース項を持つアルゴリズムと比べ、高い精度でエネルギー運動量保存則を保つことができています. ソース項を持つアルゴリズムでも、 $\Delta\eta = 0.5$  の場合にエネルギー保存則の破れは 4.36% であり、高い精度でエネルギー運動量保存則を保っている. しかし、保存型のアルゴリズムではセルサイズに依存せず、高い精度で保存則が保たれているのに対し、ソース項を持つアルゴリズムでは、セルサイズが大きいほど保存則の破れが大きくなっている.

次に、ゆらぎを持った初期条件の場合について、エネルギー運動量保存則をテストする. 上記のなめらかな初期条件 (5.1.13), (5.1.14) に次のようにゆらぎを加える,

$$e(\tau_0, \eta) = e^{\text{flat}}(\tau_0, \eta) \left( 1 + \sum_{n=0}^{10} \delta e_n \cos \left( n \frac{2\pi(\eta - \eta_n^e)}{L} \right) \right), \quad (5.1.19)$$

$$v^\eta(\tau_0, \eta) = \sum_{n=0}^{10} \delta v_n^\eta \cos \left( n \frac{2\pi(\eta - \eta_n^v)}{L} \right), \quad (5.1.20)$$

ここで、 $e^{\text{flat}}$  は式 (5.1.13) で与えられ、 $\eta_n^e$  と  $\eta_n^v$  は  $\eta = -Y_b \sim Y_b$  の範囲をランダムにとる. 全ての  $n$  について  $\delta e_n = 0.05$ ,  $\delta v_n^\eta = 0.05 \text{ fm}^{-1}$  と設定した. 参考文献 [46] と同様、原子核衝突実験でよく利用されるセルサイズ  $\Delta\eta = 0.2$  の場合について計算を行う. 時間きざみは  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  とする. 図 5.11 に、 $\tau = 10 \text{ fm}$  におけるエネルギー密度と 3 元速度  $v^\eta$  の結果を示す. 中心ラピディティ付近では、保存型の流体コードとソース項を持つ流体コードの結果が一致している. ラピディティが  $|\eta| > 4$  の領域では、両コードによる結果にわずかな違いが見られる. これは、真空付近の計算において数値誤差が大きくなっているためだと思われる.

	$\varepsilon_E$	$\varepsilon_M$
conservative	1.38E-09	8.59E-09
with source	1.27E-02	5.61E-02

表 5.2: ゆらぎを持つ初期条件を用いた際のエネルギー運動量保存則の破れ. 初期全エネルギーは  $E_0 = 2224$  GeV, 初期全運動量は  $M_0 = -94$  GeV.

エネルギー運動量保存則の破れを表 5.2 に示した. どちらのアルゴリズムにおいても, 保存則の破れが, なめらかな初期条件の場合に比べおよそ一桁大きくなっている. 保存型のアルゴリズムは, それでも非常に高い精度で保存則を保つことができている. 一方, ソース項を持つアルゴリズムは, エネルギー運動量保存則を数% 破っている. 多次元の問題や, 衝撃波やジェットが存在するような場合では, ソース項を持つアルゴリズムにおいて保存則の破れはさらに大きくなる可能性があり, ソース項を持つアルゴリズムはエネルギー運動量保存則を精度良く保つため, セルサイズの大きさに注意する必要がある.

## 5.2 粘性流体テスト

### 5.2.1 粘性流体における Bjorken スケーリング解

粘性流体における Bjorken スケーリング解については 3.3.3 節で紹介した. この解析解を用いて, 我々の相対論的粘性流体コードをテストする. まずは, Navier-Stokes 極限において, ずり粘性のみを考慮した場合を考える. そのときの温度発展の解析解は式 (3.3.51) で与えられる. 数値計算ではセルサイズを  $\Delta\eta = 0.1$ , 時間刻みを  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  と設定する. 初期時刻は  $\tau_0 = 1$ , 初期温度を  $T_0 = 300$  MeV とする. また, Navier-Stokes 極限を考えるため, 緩和時間を  $\tau_\eta = 0.0001$  fm と十分小さくとる. 今, 緩和時間  $\tau_\eta$  は時間刻み  $\Delta\tau$  より小さく, PES 法が常に式 (4.2.8)-(4.2.10) において実行される. 図 5.12 の左図に, 完全流体と粘性流体における Bjorken スケーリング解に関する数値計算結果と解析解を示す. ずり粘性が有限の場合, 温度の減少が完全流体の場合に比べ遅くなっている. 完全流体, 粘性流体共に解析解を正確に再現している.

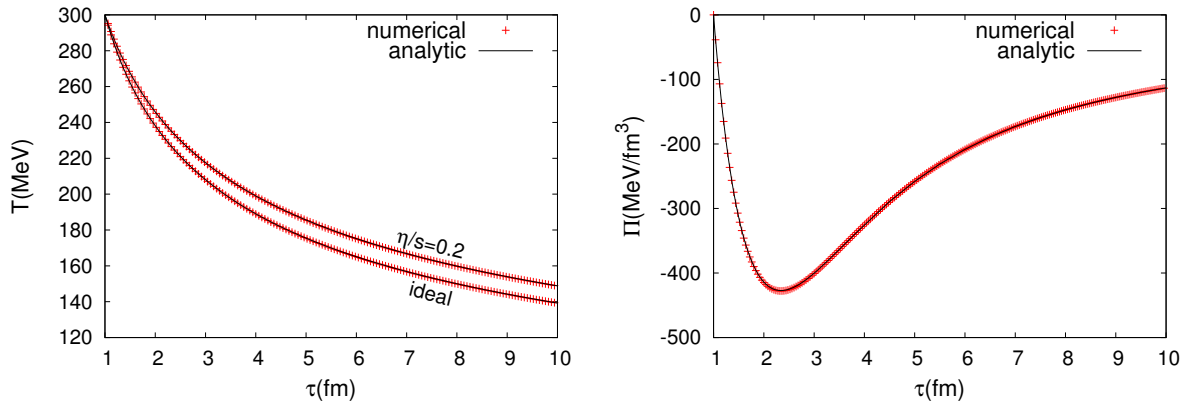


図 5.12: 左図: 完全流体と粘性流体 ( $\eta/s = 0.2$ ) における Bjorken スケーリング解の温度発展. 数値計算 (赤点) と解析解 (黒線) の比較. 右図: 2 次の粘性流体方程式における Bjorken スケーリング解. 体積粘性テンソルの時間発展の数値計算結果 (赤点) と解析解 (黒線) の比較. 体積粘性係数  $\zeta = 1000$  MeV/fm<sup>2</sup>.



次に2次の粘性流体方程式における Bjorken スケーリング解を考え、粘性テンソルの運動方程式を解くアルゴリズムをテストする。ここでは、体積粘性に注目する。Bjorken 膨張における体積粘性テンソルの解析解は式 (3.3.53) で与えられている。数値計算では初期時刻を  $\tau_0 = 1$  fm, 体積粘性テンソルの初期値を  $\Pi_0 = 0$ , 体積粘性係数を  $\zeta = 1000$  MeV/fm<sup>2</sup>, 緩和時間を  $\tau_\Pi = 1$  fm とする。セルサイズは  $\Delta\eta = 0.1$ , 時間刻みは  $\Delta\tau = 0.1\tau_0\Delta\eta$  として数値計算を行う。図 5.12 の右側に体積粘性の時間発展の数値計算結果と解析解を示す。数値計算と解析解の良い一致を得ることができている。

### 5.2.2 2 次の粘性流体における Gubser 解

3.3.6 節において紹介した 2 次の粘性流体方程式における Gubser 解 [151] を用いてテスト計算を行う。この解析解は 2 次の粘性流体方程式における多次元的な発展を記述しており、流体コードにとってこれまでのテスト計算よりも難易度の高いものであり、2 次の粘性流体コードのテスト問題として便利である。2 次の粘性流体における Gubser 解を用いて、原子核衝突実験で利用される 2 次の粘性流体コードのテスト計算が行われている [47, 49, 86, 151–154]。

我々は [151] と同じセットアップで計算を行う。ずり粘性係数は  $\eta/s = 0.2$ , 緩和時間は  $\tau_\eta = 5\eta/(Ts)$  とする。数値計算の初期時刻は  $\tau_0 = 1$  fm, セルサイズ  $(\Delta x, \Delta y, \Delta\eta) = (0.05 \text{ fm}, 0.05 \text{ fm}, 0.1)$ , 時間刻み  $\Delta\tau = 0.1\Delta x$  とする。

図 5.13 に  $\tau = 1.2, 2, 3$  fm における温度と 3 元速度の  $y = 0$  における  $x$  方向の分布を示す。数値解と解析解の良い一致を得ることができている。5.1.5 節の完全流体における Gubser 解のテスト計算では、我々の数値計算はおおよそ  $\tau = 7$  fm まで解析解を再現することができた。一方で、粘性の効果を含んだ図 5.13 のテスト計算では、約  $\tau = 4$  fm 以降、数値解の解析解からの誤差が大きくなった。

図 5.14 に  $\tau = 1.2, 2, 3$  fm における、ずり粘性テンソル  $\pi^{xx}$ ,  $\pi^{yy}$ ,  $\pi^{\eta\eta}$ ,  $\pi^{xy}$  の計算結果と解析解を示す。 $\pi^{xy}$  については、 $y = 0, x = 0$  の軸上で値がゼロになるため、 $x = y$  の線上の分布を示している。 $\pi^{xx}$ ,  $\pi^{yy}$ ,  $\pi^{\eta\eta}$  については、数値解と解析解の良い一致を見ることができる。しかし、 $\pi^{xy}$  の結果については、 $\tau = 2$  fm において数値解と解析解のずれが確認できる。この誤差は時間とともに成長し、 $\tau = 5$  fm 付近で計算が破綻した。

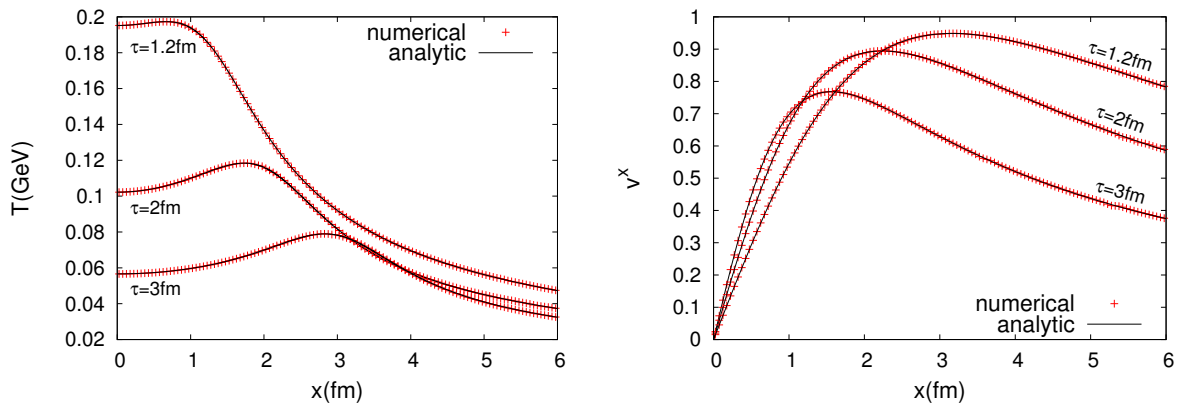


図 5.13: 粘性流体における Gubser 解の  $\tau = 1.2, 2, 3$  fm における温度分布 (左図) と 3 元速度分布 (右図)。赤点が数値計算結果, 黒線が解析解を表す。



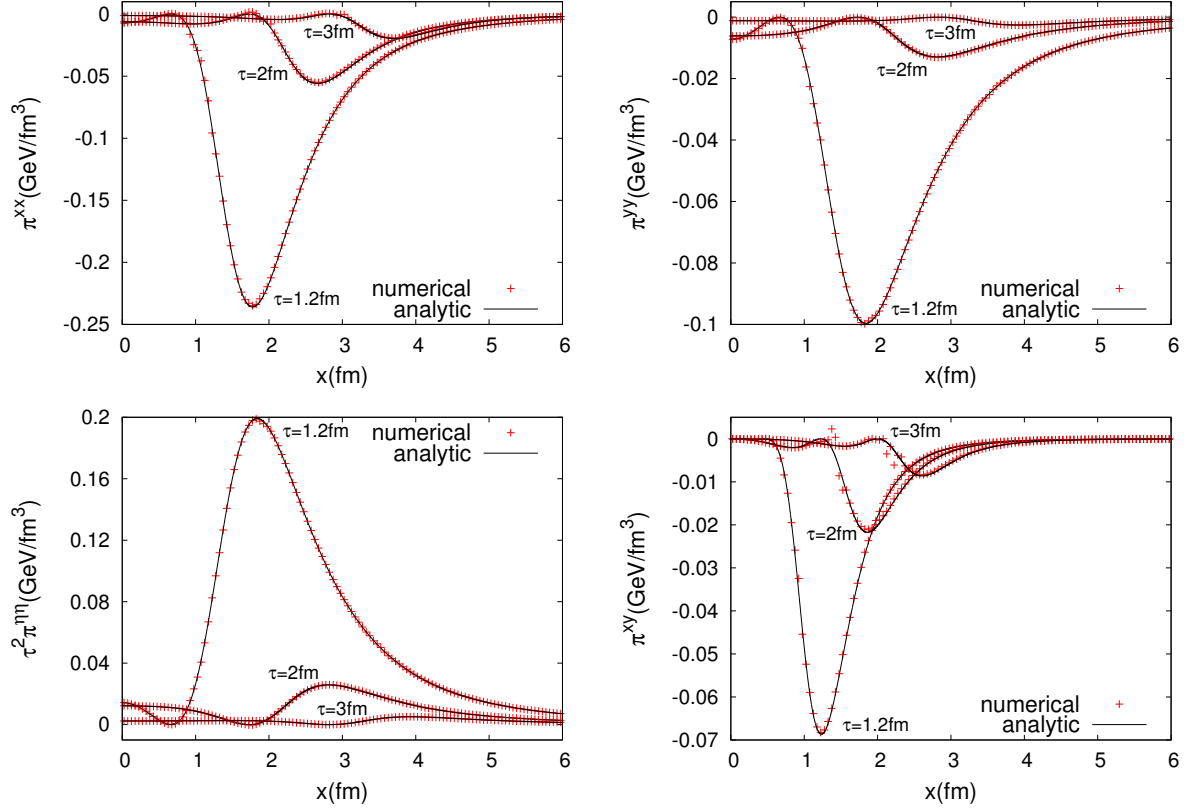


図 5.14: 粘性流体における Gubser 解.  $\tau = 1.2, 2, 3$  fm におけるずり粘性テンソル  $\pi^{xx}$  (左上図),  $\pi^{yy}$  (右上図),  $\tau^2\pi^{\eta\eta}$  (左下図),  $\pi^{xy}$  (右下図) の分布. 数値解 (赤点) と解析解 (黒線) の比較.

粘性テンソルの運動方程式においては, 粘性テンソルの大きさについて 1 次の寄与を持つ移流項の評価が重要になると考えられる. 図 5.14 の計算では, 移流項において空間 3 次精度の風上差分法を PPM とともに用いている. また, 多次元問題を解くために次元分割法を用いている. ここで, 移流項において, PPM の他に, 2 次精度風上差分法を MC limiter とともに用いた場合と, Corner Transport Upwind (CTU) スキーム [162] を用いた場合の比較を行った. CTU は風上差分法を次元分割法を使わずに多次元問題へ拡張したものである. これらのスキームの詳細については付録 B で説明する. 図 5.15 に  $\tau = 3$  fm におけるずり粘性テンソルの, 3 つの数値計算による結果と解析解を示した.  $\pi^{xx}$ ,  $\pi^{yy}$ ,  $\tau^2\pi^{\eta\eta}$  においては, 3 つのスキームとも解析解との良い一致が得られている. 一方,  $\pi^{xy}$  の結果においてはスキームの違いを見ることができる. MC limiter を次元分割法とともに用いた計算は  $x = 2$  fm 付近で解析解を上回っている. MC limiter を用いた計算と比べ, PPM, CTU を用いた計算は解析解に近い結果を得ることができている.

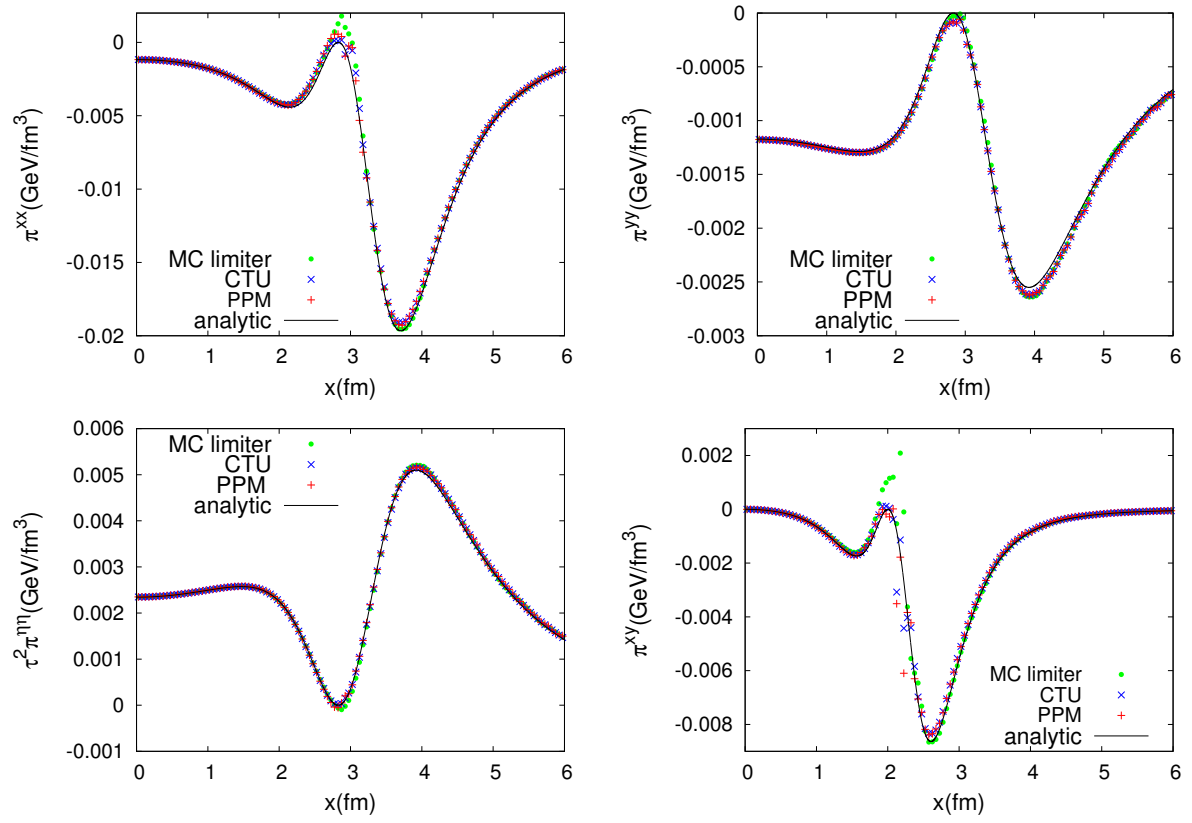


図 5.15: 粘性流体における Gubser 解.  $\tau = 3$  fm におけるずり粘性テンソル  $\pi^{xx}$ ,  $\pi^{yy}$ ,  $\tau^2 \pi^{\eta\eta}$ ,  $\pi^{xy}$  の分布. 赤点が PPM による結果, 青点が CTU の結果, 緑点が MC limiter による結果, 黒線が解析解を示す.

## 第6章 高エネルギー原子核衝突実験における Kelvin-Helmholtz 不安定性

高エネルギー原子核衝突実験の現象論的解析に進む前に、高エネルギー原子核衝突実験において Kelvin-Helmholtz (KH) 不安定性が生じる可能性を議論する。KH 不安定性は、二つの速度の異なる並行な流れの境界に生じる不安定性である [163]。二つの流れの境界にゆらぎを加えると、ゆらぎが増幅され渦を形成する。原子核衝突実験においては、初期条件におけるカラーフラックスチューブ構造が KH 不安定性を起こす可能性が議論された [89]。参考文献 [89] では完全流体を用いた解析が行われ、KH 不安定性の成長速度は QGP の寿命と比べ遅く、KH 不安定性が成長しきる前に QGP の寿命が終わると計算された。近年、衝突軸に垂直な平面内だけでなく、衝突軸方向の初期状態ゆらぎが注目されている [72, 74, 75]。ここで、我々は、参考文献 [89] と異なる衝突軸方向の初期条件を考える。そして、新しい相対論的粘性流体コードを用いて、衝突軸方向の構造に起因する KH 不安定性について議論する。

### 6.1 初期条件

ここでは、簡単のために、 $(x, \eta)$  の 2 次元を考える。高エネルギー原子核衝突実験において光速近くまで加速された原子核は不確定性原理から衝突軸方向 ( $z$  方向) に 1 fm 程度の厚さを持つ。その結果、高エネルギー原子核衝突実験におけるパートンパートン散乱は  $z = 0$  から 1fm 程度の有限の領域内で起こると考えられる。初期状態にカラーフラックスチューブ構造を考えると、それぞれのチューブは  $|z| < 1$  fm 以内の異なる点から伸びると考えられる。

ここで、二つのカラーフラックスチューブが  $x > 0$  と  $x < 0$  の領域に位置していると想定する。そして、 $x > 0$  に位置するカラーフラックスチューブは  $z = -\Delta z$  の位置を中心に、 $x < 0$  に位置するカラーフラックスチューブは  $z = \Delta z$  の位置を中心に伸びていると考える。それぞれのカラーフラックスチューブ内の流速、エネルギー密度は Bjorken スケーリング解で記述されとする。この場合、 $x > 0$  ( $x < 0$ ) の領域のエネルギー密度  $e_U$  ( $e_D$ )、流速  $v_U^\eta$  ( $v_D^\eta$ ) は、Bjorken スケーリング解  $e_B = e_0(\tau_0/\tau)^{4/3}$ ,  $v_B^\eta = 0$  を  $z$  軸方向に  $+\Delta z(-\Delta z)$  平行移動することで得られる。

$$e_U(\tau, \eta) = e_B(t, z + \Delta z) = e_0 \left( \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau^2 - 2\tau \sinh \eta \Delta z - \Delta z^2}} \right)^{4/3}, \quad (6.1.1)$$

$$e_D(\tau, \eta) = e_B(t, z - \Delta z) = e_0 \left( \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau^2 + 2\tau \sinh \eta \Delta z - \Delta z^2}} \right)^{4/3}, \quad (6.1.2)$$

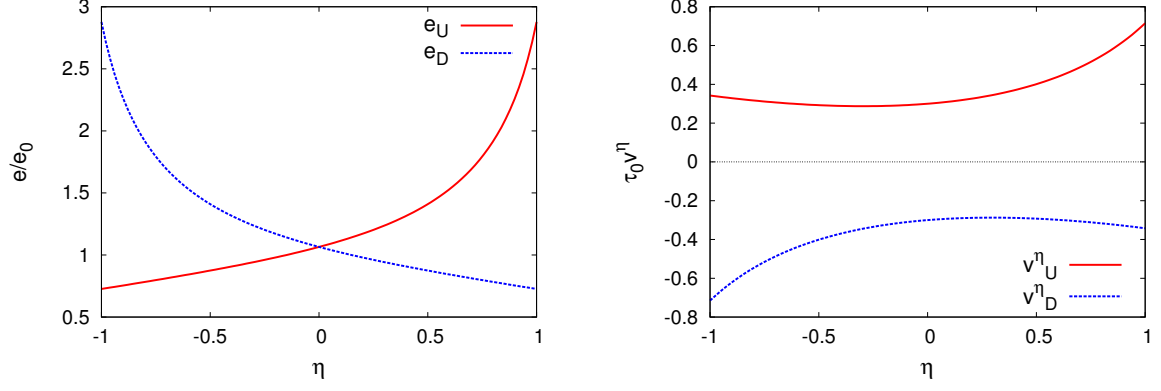


図 6.1: 並進変換された Bjorken スケーリング解におけるエネルギー密度 (左図) と 3 元速度 (右図) の  $\tau = \tau_0 = 1\text{fm}$  における分布. 赤線は式 (6.1.1), (6.1.3), 青線は式 (6.1.2), (6.1.4) の分布を表す.

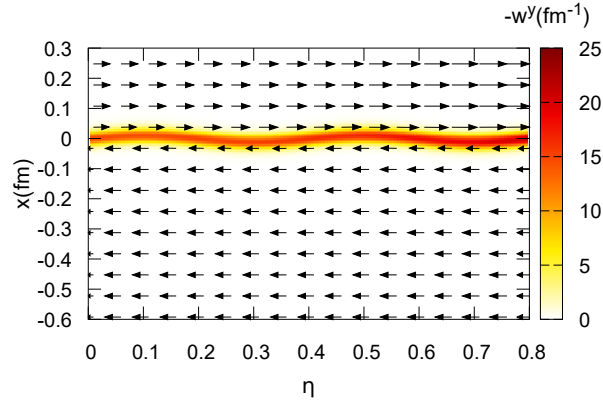


図 6.2: 式 (6.1.5), (6.1.6) の初期条件における渦度  $-w^y$  と速度場  $(\tau v^\eta, v^x)$  の分布.

$$v_U^\eta(\tau, \eta) = v_B^\eta(t, z + \Delta z) = \frac{\Delta z}{\tau^2} \frac{\cosh \eta}{1 - \frac{\Delta z}{\tau} \sinh \eta}, \quad (6.1.3)$$

$$v_D^\eta(\tau, \eta) = v_B^\eta(t, z - \Delta z) = -\frac{\Delta z}{\tau^2} \frac{\cosh \eta}{1 + \frac{\Delta z}{\tau} \sinh \eta}, \quad (6.1.4)$$

$\tau_0$  は初期固有時間,  $e_0$  は初期エネルギー密度である. 以下では  $\Delta z = 0.3 \text{ fm}$  と設定する. 図 6.1 に  $x > 0$  と  $x < 0$  の領域のエネルギー密度  $e_U, e_D$  と 3 元速度  $v_U^\eta, v_D^\eta$  の分布を示す. Bjorken スケーリング解を並進変換したことでエネルギー密度と 3 元速度に  $x > 0$  と  $x < 0$  の領域で異なるラピディティ依存性が現れる. 同時に,  $x > 0$  と  $x < 0$  の領域で 3 元速度  $v^\eta$  に差ができています.

さらに, 二つのフラックスチューブの境界にゆらぎを  $x_b = 0.01 \sin(2\pi\eta/\lambda)$  と導入する.  $\lambda$  はゆらぎの波長である. 最終的に, 我々のエネルギー密度  $e$ , 3 元速度  $v^\eta$  の初期条件は次のようになる.

$$e(\tau_0, x, \eta) = \frac{e_U(\tau_0, \eta) + e_D(\tau_0, \eta)}{2} + \frac{e_U(\tau_0, \eta) - e_D(\tau_0, \eta)}{2} \tanh\left(\frac{x - x_b}{\Delta}\right), \quad (6.1.5)$$

$$v^\eta(\tau_0, x, \eta) = \frac{v_U^\eta(\tau_0, \eta) + v_D^\eta(\tau_0, \eta)}{2} + \frac{v_U^\eta(\tau_0, \eta) - v_D^\eta(\tau_0, \eta)}{2} \tanh\left(\frac{x - x_b}{\Delta}\right), \quad (6.1.6)$$

ここで,  $x > 0$  と  $x < 0$  の領域のエネルギー密度, 3 元速度は  $\Delta$  の幅でなめらかにつながっている. ここで,  $\lambda = 0.4$ ,  $\Delta = 0.02 \text{ fm}$ , 初期エネルギー密度 (初期温度) を  $e_0 = 741 \text{ GeV/fm}^3$  ( $T_0 = 800$

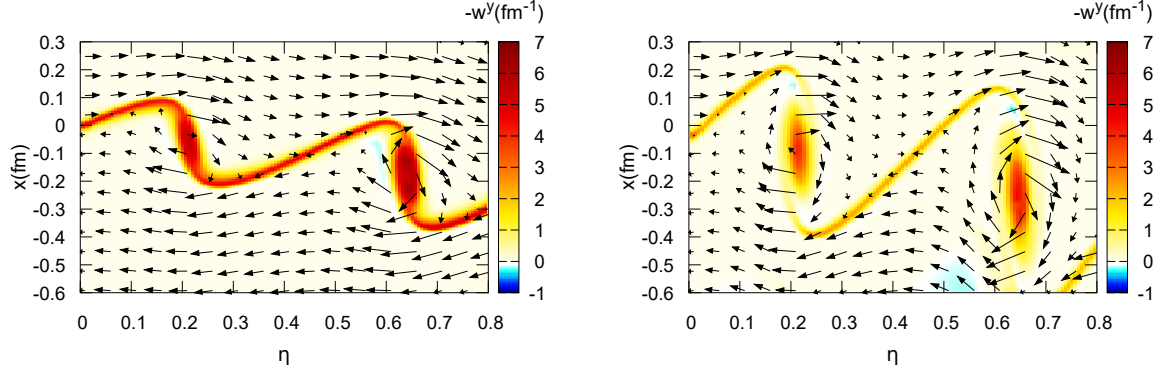


図 6.3: Bjorken 膨張中における KH 不安定性.  $\tau = 4\text{fm}$  (left) と  $7\text{fm}$  (right) における完全流体計算の結果. カラーマップは渦度  $-w^y$ , 矢印は速度場  $(\tau v^\eta, v^x)$  を表す.

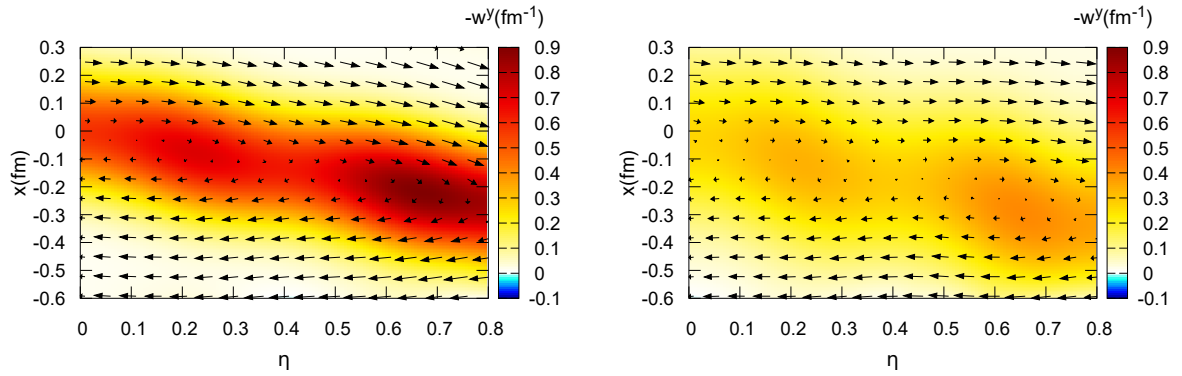


図 6.4: Bjorken 膨張中における KH 不安定性.  $\tau = 4\text{fm}$  (left) と  $7\text{fm}$  (right) における  $\eta/s = 0.01$  の粘性流体計算による結果. カラーマップは渦度  $-w^y$ , 矢印は速度場  $(\tau v^\eta, v^x)$  を表す.

MeV) とする. 図 6.2 に, 以上の初期条件における渦度  $w^y$  の分布を示す. ここで,  $w^y$  は次のように定義されている,

$$w^y = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial u^x}{\partial \eta} - \tau^2 \frac{\partial u^\eta}{\partial x} \right). \quad (6.1.7)$$

図 6.2 の矢印は速度場  $(\tau v^\eta, v^x)$  を示している. 流体計算では, 初期時刻  $\tau_0 = 1\text{ fm}$ , セルサイズ  $(\Delta x, \Delta \eta) = (0.005\text{ fm}, 0.00625)$ , 時間刻み  $\Delta \tau = 0.2 \Delta x$  とする. 状態方程式として理想気体の状態方程式  $e = 3p$  を利用する.

## 6.2 数値計算結果

まず, 完全流体計算を行う. 図 6.3 に  $\tau = 4\text{ fm}$  と  $\tau = 7\text{ fm}$  における渦度と速度場の分布の結果を示す. KH 不安定性による渦の形成を確認することができる. 今回の計算では  $\tau \sim 3\text{ fm}$  程度で渦の形成が見られた. また,  $\tau = 7\text{ fm}$  では  $\eta = 0.6$  に位置する渦が  $x < 0$  の方向に動いている. 我々の初期条件 (6.1.5), (6.1.6) では, 図 6.1 から分かるように  $e_U$  が  $e_D$  よりも大きくなっている. これは,  $x > 0$  の領域の  $|v^z|$  の方が,  $x < 0$  の領域の  $|v^z|$  よりも大きく, 時間の遅れにより,  $x > 0$  の領域におけるエネルギー密度の減少速度がより遅くなっているためである. このエネルギー密度の差により, 後の時刻では  $x$  が負の方向に向かって流れが生じている. 二つの渦は, Bjorken 膨張の効果により時間とともに大きく引き延ばされていき, その結果, 渦度は時間とともに小さくなって

いく．図 6.1 から分かるようにラピディティーの大きな領域ほど速度差が大きい．速度差が大きい方が，KH 不安定性の成長速度が速いため， $\eta \sim 0.6$  に位置する渦の方が， $\eta \sim 0.2$  に位置する渦よりも早く成長している．初期の境界面のゆらぎ  $x_b$  の波長  $\lambda$  を大きくすると，KH 不安定性の成長速度は遅くなる．今回， $\lambda > 0.5$  とした場合には， $|\eta| < 0.8$  の領域ではゆらぎの成長速度は遅く，渦を形成する前に Bjorken 膨張の効果により拡散される結果となった．

次に粘性流体計算を行う．ここでは，ずり粘性の運動方程式 (3.2.26) における 2 次の粘性項と緩和時間として，粘性流体における Gubser 解で利用されたもの， $I_\pi^{\mu\nu} = 4/3\pi^{\mu\nu}\theta$ ， $\tau_\eta = 5\eta/(Ts)$ ，を用いる．ずり粘性は  $\eta/s = 0.01$  とする．図 6.4 に  $\tau = 4, 7$  fm における結果を示す．完全流体計算のとき（図 6.3）と異なり，渦の形成は確認されなかった．完全流体計算のときと同様， $x$  が負の方向への流れは生じている．粘性流体では，Kolmogorov 長より小さなスケールの渦は粘性の効果により存在できない．今回考えている波長の大きさ（ $\tau_0 = 1$  fm において  $\lambda = 0.4$ ）は Kolmogorov 長よりも小さいと予想できる． $|\eta| < 0.8$  の領域では，長波長のゆらぎは Bjorken 膨張により拡散され，一方短波長のゆらぎは粘性の効果で打ち消され，KH 不安定性を起こす波長領域は存在しなかった．KH 不安定性が生じるとすると，速度差の大きいより大きなラピディティー領域か，衝突軸方向の膨張の効果がより小さい状況であると予想される．

## 第7章 相対論的流体模型の構築

4章で開発した相対論的流体コードを用いた相対論的流体模型を構築する。相対論的流体模型では、まず、原子核衝突実験の初期状態模型を用いて、流体シミュレーションの初期条件を計算する。その後、相対論的流体シミュレーションを行う。流体の膨張とともに温度が冷えると、流体近似が破れる前にハドロン描像の分子動力学計算へ移行し終状態の計算を行う。

### 7.1 初期条件

流体力学の数値計算を行うには初期条件が必要である。しかし、原子核衝突実験における初期状態については、早い局所熱平衡化の問題 [95, 96] など、明らかになっていない点が多く不定性がある。高エネルギー原子核衝突実験における流体計算の初期条件を用意する様々なモデルが存在する。代表的な初期条件モデルとしては、現象論的な MC-Glauber モデル [164]、ボルツマン方程式に基づいた AMPT(Multiphase transport model) [165]、カラーグラス凝縮描像と有効場の理論を利用する MC-KLN(Monte Carlo Kharzeev-Levin-Nardi model) [166, 167] と IP-Glasma モデル [168]、カラーグラス凝縮描像と摂動論的 QCD による mini-jet 計算を用いる EKRT [64] などが存在する。これらの初期条件を用いた流体計算は RHIC, LHC における楕円異方性の観測結果を良く再現することができた。さらに、以上のモデルの中でも AMPT, IP-Glasma, EKRT を用いた流体計算は、LHC で測定された高次の次方位角異方性 ( $v_2, v_3, v_4$ ) の事象毎のゆらぎ [169] を再現することができた [17, 64, 170]。

我々は近年開発された現象論的な初期条件モデル、T<sub>R</sub>ENTo [171] を利用し、原子核衝突実験における初期条件を計算する。T<sub>R</sub>ENTo は原子核衝突実験の初期条件をパラメトライズし、そのパラメータを実験から決めるという立場に基づく。T<sub>R</sub>ENTo は元々は空間 2 次元のモデルであったが、衝突軸方向を含めた空間 3 次元への拡張が参考文献 [172] で行われた。T<sub>R</sub>ENTo は流体計算の初期時刻  $\tau_0$  におけるエントロピー密度の空間分布を計算する。

$$s(\tau_0, \mathbf{x}, \eta_s) \propto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \eta_s), \quad (7.1.1)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x, y)$  で、 $\eta_s$  は Milne 座標におけるラピディティを表す。この章以降では、粒子の擬ラピディティを  $\eta$  で表す代わりに、Milne 座標のラピディティを  $\eta_s$  と表す。 $f(\mathbf{x})$  は  $\eta_s = 0$  におけるエントロピー分布を表す。T<sub>R</sub>ENTo はまず、Woods-Saxon 分布の重みとともに、2つの原子核中の核子の  $(x, y)$  平面における位置をランダムに決め、二つの原子核の分布をそれぞれ  $\pm b/2$  だけ平行移動する。 $b$  は衝突係数である。ここで、核子核子散乱の断面積に従い、二つの原子核の核子同士で  $(x, y)$  平面において近い位置にいる核子は衝突に参加したと判定する。次に、核子の厚み関

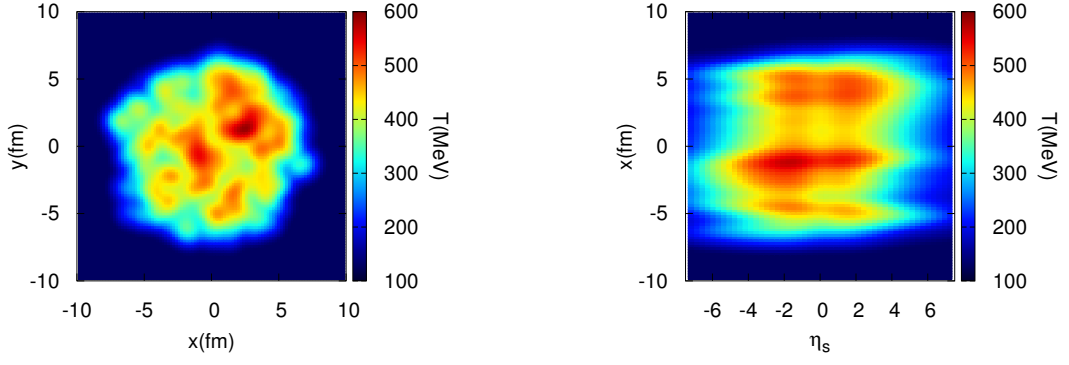


図 7.1: T<sub>RENT</sub>o により計算された初期条件の例. 左図は  $(x, y)$  平面における温度分布, 右図は  $(x, \eta_s)$  平面における温度分布.

数  $T_p$  と原子核の厚み関数  $\tilde{T}_A$  を次のように定義する.

$$T_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi w^2} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2w^2}\right) \quad (7.1.2)$$

$$\tilde{T}_A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{part}}} w_i T_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (7.1.3)$$

ここで,  $w$  は核子の幅,  $N_{\text{part}}$  は衝突に参加した核子の数,  $\mathbf{x}_i$  は核子の位置,  $w_i$  はガンマ分布の重みを表す. ガンマ分布の分散を  $1/k$  と示す. この  $w_i$  のゆらぎにより, 実験で観測される生成粒子数の負の二項分布ゆらぎを再現することができる [173]. 二つの原子核を  $A, B$  とラベルする. 厚み関数を用いて  $\eta_s = 0$  におけるエントロピー密度分布は次のように計算される.

$$f(\mathbf{x}) \propto \left( \frac{\tilde{T}_A^p + \tilde{T}_B^p}{2} \right)^{1/p}, \quad (7.1.4)$$

ここで,  $p$  はパラメータである. この  $p$  の値により, T<sub>RENT</sub>o は初期のエントロピー密度分布を柔軟に変化させることができ, 複数の初期条件モデルと同様の初期条件を再現することができる.  $p = 1$  の場合は MC-Glauber model,  $p \sim -0.67$  の場合は MC-KLN,  $p \sim 0$  のときは IP-Glasma と EKRT モデルに近い初期条件を与える [171].  $f(\mathbf{x})$  を特徴付けるパラメータは  $p, k, w$  の 3 つである.

衝突軸方向の分布  $g(\mathbf{x}, \eta_s)$  は, 厚み関数  $\tilde{T}_A(\mathbf{x}), \tilde{T}_B(\mathbf{x})$  と 4 つのパラメータ  $\mu_0, \sigma_0, \gamma_0, J$  で特徴付けられる.  $\mu_0$  は分布の中心がどれだけ衝突軸方向へシフトするかを特徴づける.  $\sigma_0$  は分布の衝突軸方向における幅を決める.  $\gamma_0$  は分布の非対称度を表す.  $J$  はラピディティーと擬ラピディティーの間のヤコビアンを表す. 例えば, 原子核  $A$  が  $B$  よりも大きい場合,  $\tilde{T}_A(\mathbf{x})$  の方が  $\tilde{T}_B(\mathbf{x})$  よりも大きくなりやすい. その場合,  $\gamma_0$  の値に応じて, エネルギー密度分布が非対称になり, 原子核  $A$  の進む方向のエネルギー密度が大きくなる. 加えて  $\mu_0$  の値に応じて分布が原子核  $A$  の進む方向へシフトする. 同じ大きさの原子核同士の衝突でも, 場所  $\mathbf{x}$  によって,  $\tilde{T}_A(\mathbf{x})$  と  $\tilde{T}_B(\mathbf{x})$  の大きさはゆらぎを持ち, 衝突軸方向のエネルギー密度分布のゆらぎを生じる. T<sub>RENT</sub>o により計算された初期条件の例を図 7.1 に示した. T<sub>RENT</sub>o により計算されたエントロピー密度分布を格子 QCD 状態方程式を通して温度分布に変換してある.



TREnto は以上の 7 個のパラメータと絶対値を決める全体にかかる係数  $N$  をパラメータとして持つ。ベイズ推定による実験データ解析からこれらのパラメータが評価されている [66, 172]。その解析では、パラメータ  $p$  はほぼゼロになると評価されており、IP-Glasma と EKRT の初期条件を支持している。本研究では、 $N$  と  $\sigma_0$  以外のパラメータについては、参考文献 [172] で評価された値：  $p = 0$ ,  $k = 2$ ,  $w = 0.59\text{fm}$ ,  $\mu_0 = 0\text{fm}$ ,  $\gamma_0 = 7.3$ ,  $J = 0.75$  を用いる。  $N$  と  $\sigma_0$  の値は荷電粒子数の擬ラピディティー分布の実験結果を再現するように決定した。  $\sigma_0$  の値についてはほとんどの場合、参考文献 [172] で評価された  $\sigma_0 = 2.9$  の値で実験値を良く再現した。初期条件における流速分布は  $v^x = v^y = v^{\eta_s} = 0$  とする。ラピディティー方向の初期流速は Bjorken スケーリング解のものである。流体計算を始める初期時刻は  $\tau_0 = 0.6\text{fm}$  とする。

## 7.2 相対論的粘性流体計算

TREnto による初期条件を用いて、我々の新しいアルゴリズムによる相対論的粘性流体計算を行う。流体計算では流体の状態方程式が必要になる。我々は格子 QCD 計算により得られた状態方程式 [174] を用いる。参考文献 [174] において、流体計算で利用しやすいよう熱力学量の振る舞いがパラメトライズされている。この状態方程式では温度  $T \sim 167\text{ MeV}$  付近で QGP 相とハドロン相の間のクロスオーバーが起きる。音速は温度  $T \sim 167\text{MeV}$  で極小値を取る。

2 次の相対論的粘性流体方程式として、式 (3.1.20), (3.1.21) を利用する。体積粘性係数については、参考文献 [127, 175] などで Boltzmann 方程式の解析から得られた次の表式を用いる。

$$\frac{\zeta}{s} = b \frac{\eta}{s} \left( \frac{1}{3} - c_s^2 \right)^2, \quad (7.2.1)$$

ここで、 $s$  はエントロピー、 $c_s$  は音速、 $b$  はパラメータである。  $c_s$  は状態方程式 [174] と同じものを利用する。さらにずり粘性係数とエントロピーの比  $\eta/s$  については、温度に依存しない一定値とした場合と温度依存性  $\eta/s(T)$  を考慮した場合で計算を行った。  $\eta/s(T)$  については参考文献 [64] と同様のパラメトリゼーションを利用する。

$$\frac{\eta}{s}(T) = \left( \frac{\eta}{s} \right)_{\min} + c_1(T_c - T)\theta(T_c - T) + c_2(T - T_c)\theta(T - T_c), \quad (7.2.2)$$

$(\eta/s)_{\min}$ ,  $c_1[\text{GeV}^{-1}]$ ,  $c_2[\text{GeV}^{-1}]$  はパラメータである。温度  $T_c$  で  $\eta/s$  が極小値を取るようパラメトライズされている。状態方程式の相転移温度を参考にし  $T_c = 167\text{MeV}$  とした。また、 $(\eta/s)_{\min} = 0.08$  とした。  $(\eta/s = 0.17, b = 40)$ ,  $(c_1 = 20, c_2 = 0.7, b = 40)$ ,  $(c_1 = 0, c_2 = 0.7, b = 40)$ ,  $(c_1 = 20, c_2 = 0.7, b = 40)$  の場合の  $\zeta/s$  と  $\eta/s$  の振る舞いを図 7.2 に示した。格子 QCD の状態方程式において、温度  $T_c = 167\text{MeV}$  付近で音速が極小値を取っていることから、体積粘性係数は  $T_c$  付近で増幅されている。数値計算の格子サイズは  $\Delta x = \Delta y = 0.2\text{fm}$ ,  $\Delta\eta_s = 0.3$ , 時間きざみは  $\Delta\tau = 0.5\Delta x$ , 計算領域は  $L_x = L_y = 14.4\text{fm}$ ,  $L_{\eta_s} = 6.45$  とした。

## 7.3 フリーズアウト

時間が経ち、流体膨張とともに温度が冷えていくと、流体近似が次第に有効でなくなっていく。我々は温度がある温度  $T_{\text{sw}}$  (switching temperature) まで冷えると、流体計算からハドロン描像の分

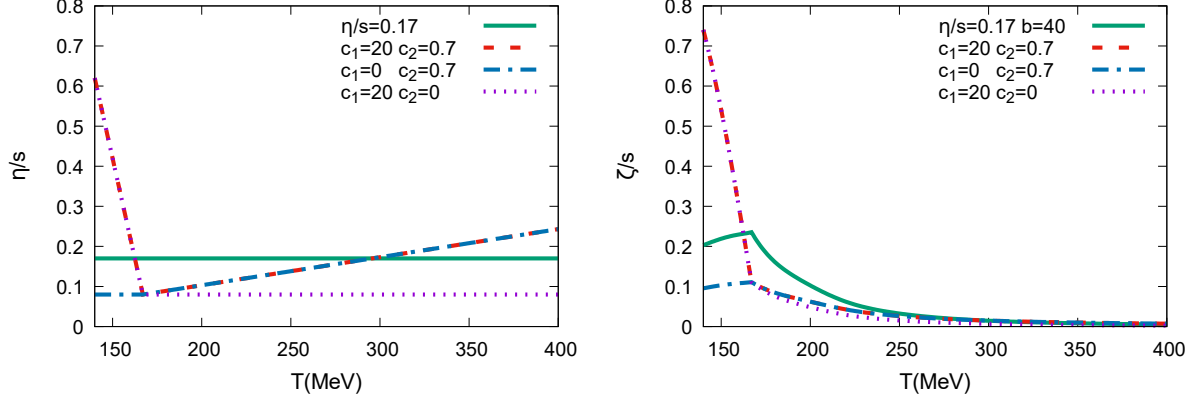


図 7.2: ずり粘性係数 (左図) と体積粘性係数 (右図) の温度依存性. 緑線:  $(\eta/s = 0.17, b = 40)$ , 赤線:  $((\eta/s)_{\min} = 0.08, c_1 = 20, c_2 = 0.7, b = 40)$ , 青線:  $((\eta/s)_{\min} = 0.08, c_1 = 0, c_2 = 0.7, b = 40)$ , 紫線:  $((\eta/s)_{\min} = 0.08, c_1 = 20, c_2 = 0, b = 40)$ .

子動力学計算へと移行する. そのためには, 流体描像から粒子描像へ移る必要がある. 我々は, 全ての空間領域の温度が  $T_{\text{sw}}$  以下になるまで流体計算を行う. そして, 流体計算の中で温度が  $T = T_{\text{sw}}$  一定の超曲面 (4 次元時空の中の 3 次元超曲面) を切り出しておく. 我々は  $T_{\text{sw}} = 150\text{MeV}$  として計算を行う. 流体計算が終了した後, 次の Cooper-Frye 公式 [176] を利用して, 粒子分布を計算する.

$$E \frac{dN_i}{d^3p} = \frac{g_i}{2\pi} \int_{\Sigma} f_i(x, p) p^\mu d^3\sigma_\mu, \quad (7.3.1)$$

$E$  はエネルギー,  $p$  は運動量,  $N$  は粒子数,  $\Sigma$  は温度一定の超曲面,  $\sigma_\mu$  は超曲面に垂直な単位ベクトル,  $g_i$  は粒子の縮退度,  $f_i(x, p)$  は分布関数である. 流体計算において, 温度一定の超曲面を計算するアルゴリズムには CORNELIUS [177] を利用する. 今回, 分布関数は局所熱平衡分布で与えられ, 温度と化学ポテンシャルで決定される. 合計の粒子数がポアソン分布のゆらぎを持つよう, 確率的に粒子のサンプリングを行う. ここでは, 一つの流体計算における  $T = T_{\text{sw}}$  一定の超曲面データに対し, 複数回粒子のサンプリングを行う (オーバーサンプリング). そして, サンプリングした粒子分布毎に独立に分子動力学計算を行う. 分子動力学計算には多くのグループが利用している UrQMD [178, 179] を利用する. UrQMD により, 終状態のハドロン同士の散乱, ハドロンの崩壊が記述される. 全ての相互作用が終了するまで UrQMD の計算を行う.

## 7.4 事象毎ゆらぎ

TRenTo はモンテカルロ計算を利用し, 実行する度に異なる初期条件を返すことができる. 実験環境における事象毎ゆらぎを再現するため, 上記の一連の初期条件から UrQMD までの模型計算を複数回実行し, 観測量の解析を行う. 我々は今回, 衝突係数を区別せずに, 2000 イベントの初期条件を計算した. 実験では生成粒子数の多さで中心度を区別して解析を行う. 我々は計算時間を減らすため, 初期条件の中心ラピディティーにおけるエントロピーの大きさで中心度を区別することにする. 2000 イベントの初期条件を中心ラピディティーにおけるエントロピーの大きい順に並べ, 上位の 10% の 200 イベントが中心度 0 – 10% のイベントと同定される. 今回, 4 つの中心度 0 – 5%, 10 – 20%, 30 – 40%, 50 – 60% のイベントを計算した.

粒子化におけるオーバーサンプリングの回数は 10 とした. これにより, 最終的なイベント数が

10 倍されることになる。方位角異方性の解析では、十分な統計性が必要となる。オーバーサンプリングを行うことで、計算コストを節約しつつ理論計算の統計を上げることができる。

## 第8章 LHC 実験の解析による QGP の粘性係数の評価

我々の相対論的流体模型を用いて LHC 実験における観測量を解析する。モデル計算と実験結果からの比較から、QGP のずり粘性と体積粘性の振る舞いを議論する。実験としては LHC の ALICE におけるビームエネルギー  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$  の鉛鉛衝突実験に注目する。

### 8.1 荷電粒子数の擬ラピディティー分布

まず、単位擬ラピディティー当たりの荷電粒子生成数  $dN/d\eta$  を計算する。この章では  $\eta$  は粒子の擬ラピディティーを表す。中心衝突 0–5% における  $dN/d\eta$  の理論計算と実験データとの比較から T<sub>RENT</sub>o のパラメータ、特に全体の係数  $N$  を決定する。粘性が大きいほどエントロピー生成が生じ、生成粒子数が増加する。よって、模型において粒子生成数の絶対値に関する  $N$  は、異なる粘性係数の値毎に実験結果を再現するよう決定する。いくつかの輸送係数の値を利用した場合の、荷電粒子生成数の擬ラピディティー依存性の計算結果と実験結果 [181, 182] を図 8.1 に示す。中心度 0-5 %, 10-20 %, 30-40 %, 50-60 % の場合について計算を行った。模型計算には色バンドで統計エラーを示している。中心衝突 0–5% の実験データを再現するようパラメータを決めた理論計算は、その他の 3 つの中心度の場合においても実験データを良く再現している。T<sub>RENT</sub>o では生成粒子数の中心度依存性はパラメータ  $p$  でコントロールされる。我々は今回、ベイズ解析 [66, 172] により見積もられた値  $p = 0$  を利用することで、先行研究と同様、荷電粒子数の中心度依存性を再現することができた。

図 8.1 の左上のグラフはずり粘性のみを  $\eta/s$  一定で導入した場合であり、 $\eta/s = 0.08, 0.17, 0.2$  の場合で計算を行った。このとき対応する  $N$  の値は、それぞれ  $N = 116, 110, 106$  である。 $dN/d\eta$  の分布の衝突軸方向の幅は  $\sigma_0$  で決定される。3 つの計算における  $\sigma_0$  の値は  $\sigma_0 = 2.9$  であり、ベイズ解析 [172] により評価された値と同様である。

図 8.1 の右上のグラフは一定値の  $\eta/s$  に体積粘性を導入した計算である。 $\eta/s = 0.17$  で、 $b = 40, 60$  の 2 通りの計算を行った。対応する  $N$  の値は、 $N = 94, 86$  である。 $\sigma_0$  の値は、二つの計算とも  $\sigma_0 = 2.7$  である。体積粘性が  $dN/d\eta$  の  $\eta$  方向の幅を広げる効果を持っていたため、初期条件でのエントロピー密度分布の衝突軸方向の幅を小さくしている。

図 8.1 の下のグラフは、 $\eta/s$  の温度依存性と体積粘性を考慮した計算を示す。 $b = 40$  で固定し、 $(c_1, c_2) = (20, 0.7), (0, 0.7), (20, 0)$  の 3 通りの計算を行った。対応する  $N$  の値は、 $N = 92, 98, 99$  である。3 つの計算とも  $\sigma_0 = 2.9$  である。

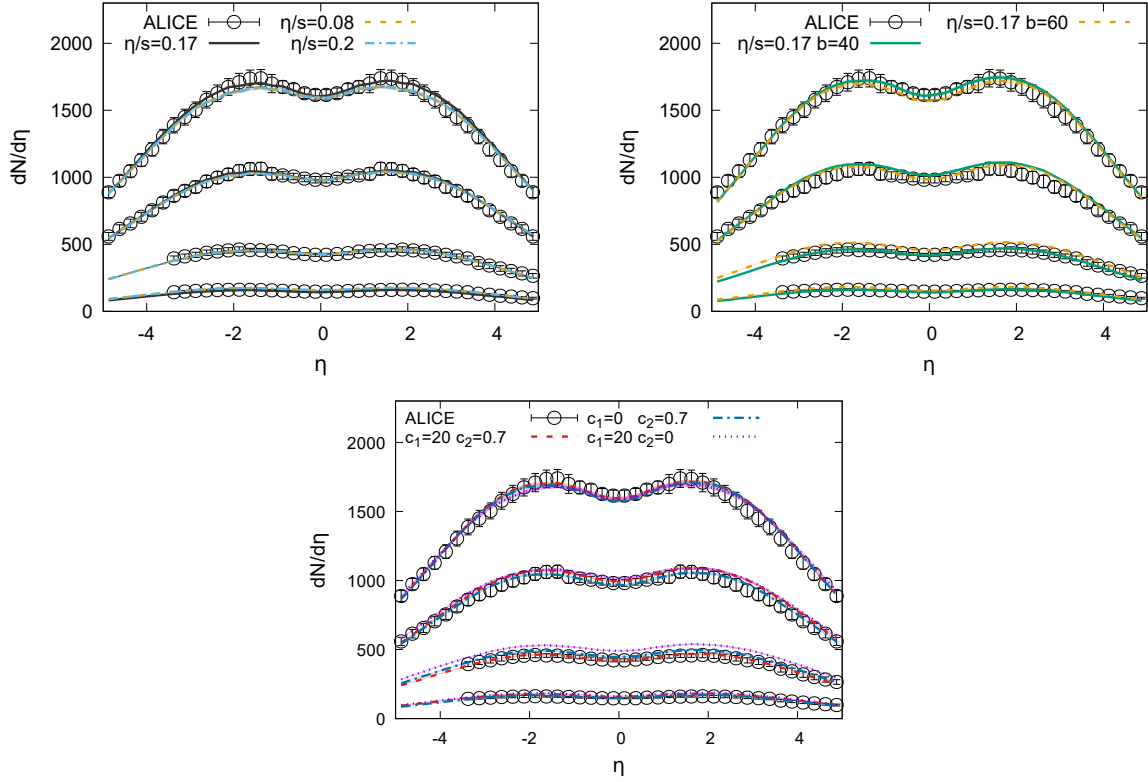


図 8.1: 荷電粒子生成数の擬ラピディティ依存性. 左上: ずり粘性一定  $\eta/s = 0.08, 0.17, 0.2$  の計算. 右上:  $\eta/s = 0.17$ ,  $b = 40, 60$  の計算. 下図:  $b = 40$ ,  $(c_1, c_2) = (20, 0.7), (0, 0.7), (20, 0)$  の計算. 中心度 0-5 %, 10-20 %, 30-40 %, 50-60 % の Pb+Pb 衝突,  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  [181, 182].

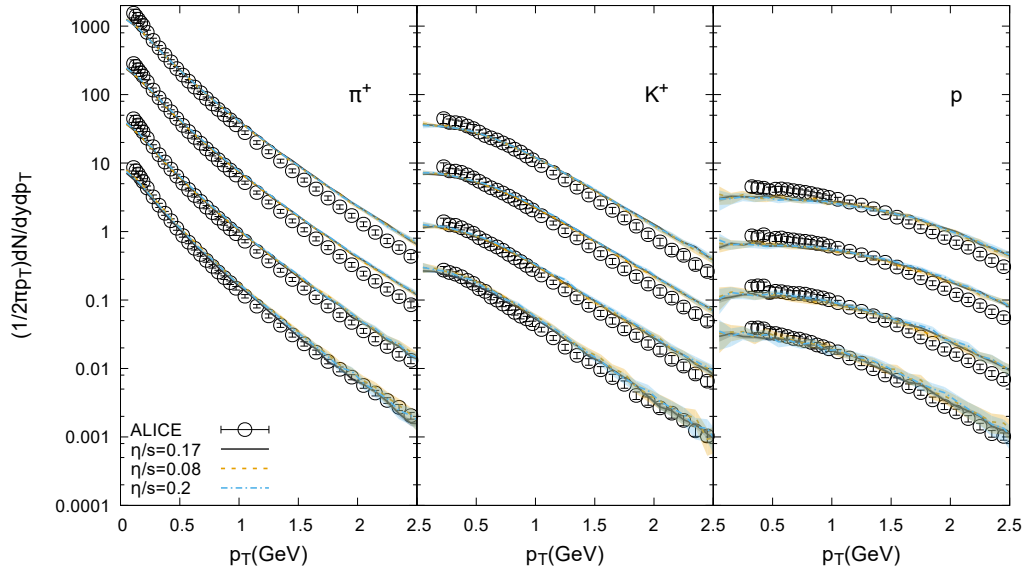


図 8.2:  $\pi$  中間子,  $K$  中間子, 陽子生成数の横運動量分布. 左図に  $\pi^+$ , 中図に  $K^+$ , 右図に陽子の結果を示す. それぞれの図で上から中心度 0-5 %, 10-20 %, 30-40 %, 50-60 % の結果.  $\eta/s$  一定のモデル計算と ALICE 実験 [112] の比較.

## 8.2 $\eta/s$ 一定の計算

次に, 上記で固定した初期条件を用いて  $\pi$  中間子,  $K$  中間子, 陽子の生成数の横運動量分布, 荷電粒子の方位角異方性  $v_2, v_3$  の解析を行う. まず,  $\eta/s$  のみを一定値で導入した場合の結果を見る.

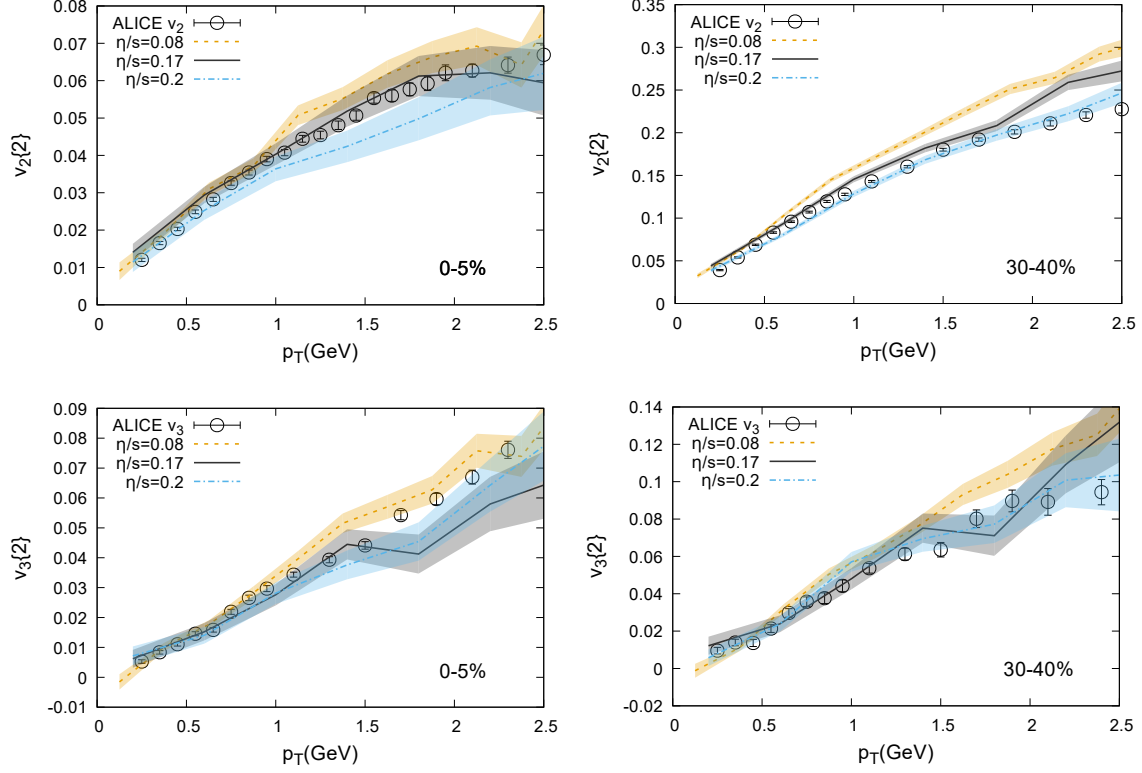


図 8.3: 荷電粒子数の  $v_2, v_3$  の横運動量分布. 左上図は中心度 0-5% における  $v_2$ , 右上図は中心度 30-40% における  $v_2$ , 左下図は中心度 0-5% における  $v_3$ , 右下図は中心度 30-40% における  $v_3$  のモデル計算と実験結果 [55] の比較.

図 8.2 に  $\pi^+$ ,  $K^+$ , 陽子の横運動量分布の結果を示す.  $\pi^+$ ,  $K^+$ , 陽子の 3 つのグラフで, それぞれ上から中心度 0-5 %, 10-20 %, 30-40 %, 50-60 % の場合である.  $|y| < 0.5$  の中心ラピディティー領域における結果である.  $\eta/s = 0.08, 0.17, 0.2$  の場合の計算と実験結果 [112] を比較した. モデル計算では  $\eta/s$  の異なる 3 つの計算に違いは見えていない. 3 つの模型計算とも, 中心衝突ほど高横運動量の粒子数が実験値を上回っている. この結果は, モデル計算における  $(x, y)$  平面における流体膨張が, 実際より強くなっていることを示唆している. 同じ問題が IP-Glasma による初期条件を用いた計算でも報告されている [183].

次に方位角異方性  $v_2, v_3$  の解析を行った. 方位角異方性の解析には, ALICE 実験 [55] の解析と同様の方法, Q-cumulant 法 [180] を用いた. Q-cumulant 法は多粒子相関から計算された多粒子キュムラントにより, 方位角異方性  $v_n$  を解析する方法である.  $m$  粒子キュムラントにより評価された  $v_n$  を  $v_n\{m\}$  と記す. 本論文では 2 粒子キュムラントのみを用いて,  $v_2, v_3$  の解析を行った. 3 粒子, 4 粒子キュムラントを用いた解析も実験で行われているが, 多くの統計が必要となる.  $v_2, v_3$  の横運動量依存性の結果を図 8.3 に示す. ALICE 実験 [55] と同様に, 中心ラピディティー領域  $|y| < 0.8$  において,  $0.2 < p_T < 5 \text{ GeV}$  の荷電粒子を用いて解析を行った.  $\eta/s$  の値が大きいほど  $v_2$  の値が小さくなっている.  $\eta/s = 0.08$  の場合, 中心度 30-40% における  $v_2$  の値が実験値よりも大きくなっている. 今回の計算では  $\eta/s = 0.17$  の場合, 実験結果との良い一致を得ることができた.  $v_2$  は, 衝突係数に平行な方向の膨張が, 衝突係数に垂直な方向の膨張に比べ強いことを示す. ずり粘性はこの流れの異方性を平均化する効果があるため, ずり粘性が大きいほど  $v_2$  が小さくなると理解できる.  $v_3$  の計算でも, 統計誤差が大きいと同様の傾向が見られる.

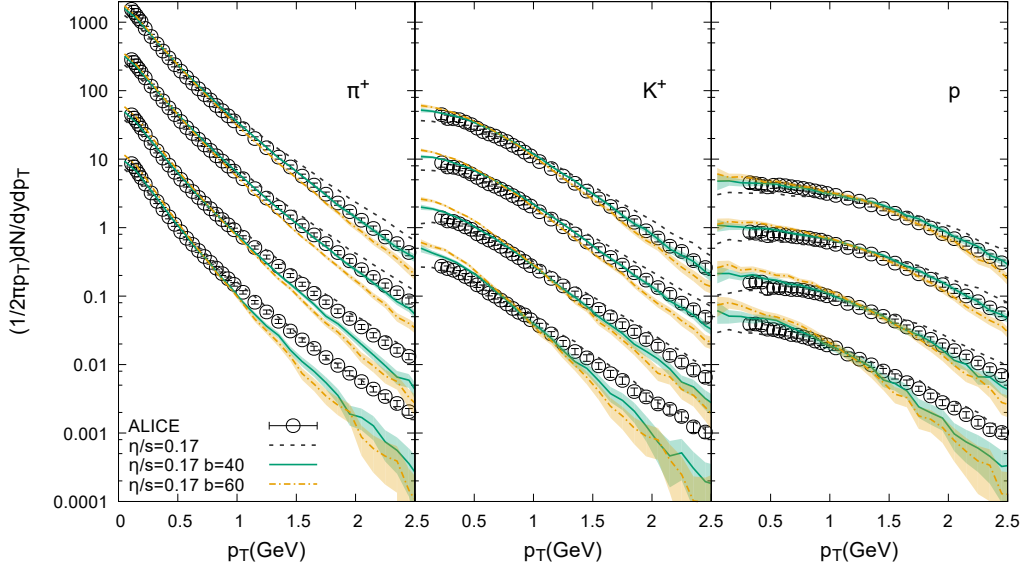


図 8.4:  $\pi$  中間子,  $K$  中間子, 陽子生成数の横運動量分布. 左図に  $\pi^+$ , 中図に  $K^+$ , 右図に陽子の結果を示す. それぞれの図で上から中心度 0-5 %, 10-20 %, 30-40 %, 50-60 % の結果.  $\eta/s = 0.17$ ,  $b = 40, 60$  のモデル計算と ALICE 実験 [112] の比較.

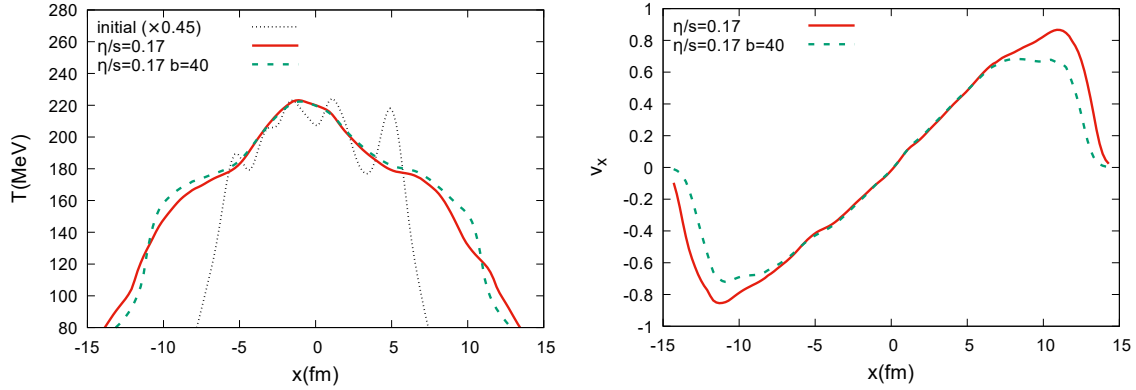


図 8.5:  $\tau = 7\text{fm}$  における  $y = \eta_s = 0$  での温度分布 (左図) と速度  $v^x$  の分布 (右図). ずり粘性のみの計算 ( $\eta/s = 0.17$ ) と体積粘性を導入した計算 ( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ). どちらも  $N = 110$  の初期条件を利用.

### 8.3 体積粘性の影響

次に  $\eta/s$  一定のまま体積粘性を導入した場合の結果を見る. 図 8.4 に  $\pi^+$ ,  $K^+$ , 陽子の横運動量分布の結果を示す.  $\eta/s = 0.17$  とし,  $b = 40, 60$  の場合についての結果を示した. 点線はずり粘性のみ ( $\eta/s = 0.17$ ) の結果を示している. 体積粘性が大きいほど, 高横運動量の粒子数が少なくなっている. 体積粘性の効果により, 流体膨張が抑えられていると考えられる.  $b = 40$  で体積粘性を導入した場合, 中心度 0-5% における実験結果と模型計算がよく一致している. しかし, 50-60% の周辺衝突では高横運動量の粒子数が実験値より少なくなる. 今回の我々の計算では粒子数の横運動量分布を中心度依存性まで再現することはできなかった. その原因として, 周辺衝突では流体近似が危うくなっている, ジェットの効果が大きくなっている, または初期条件における流速の効果が実験に表れているということなどが考えられる.

図 8.5 にずり粘性のみの計算 ( $\eta/s = 0.17$ ) と, 初期条件が同じまま体積粘性を導入した計算



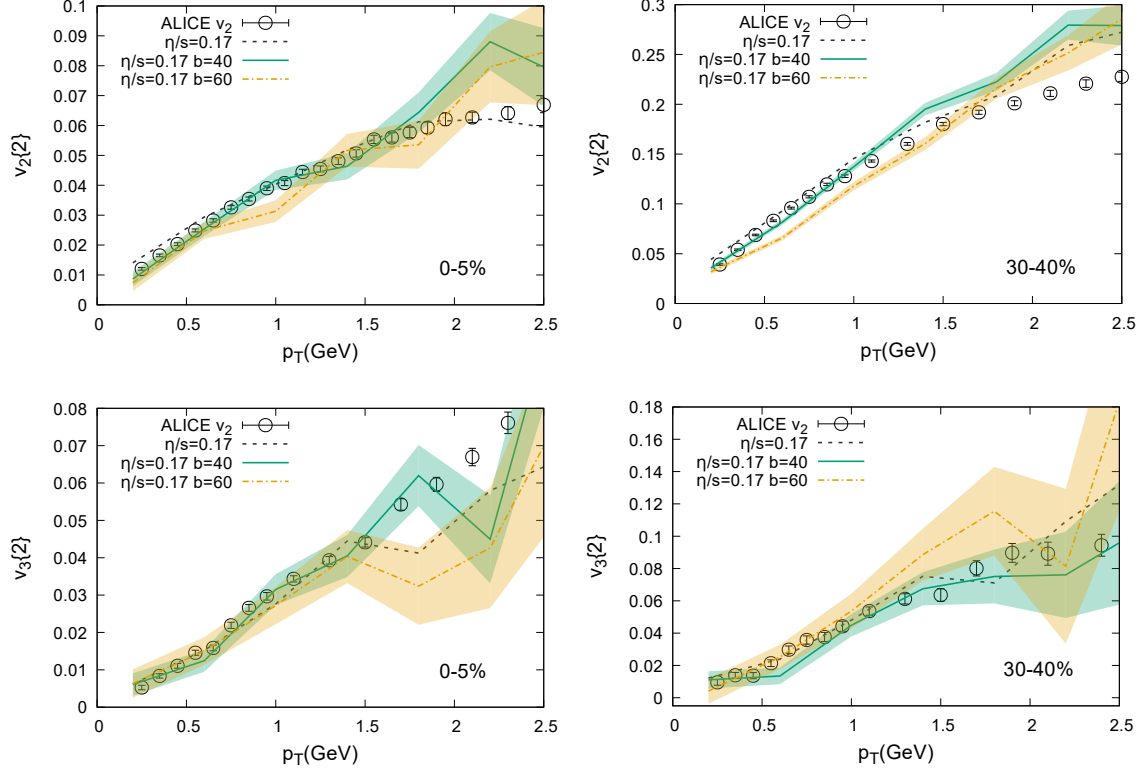


図 8.6: 荷電粒子数の  $v_2, v_3$  の横運動量分布. 左上図は中心度 0-5% における  $v_2$ , 右上図は中心度 30-40% における  $v_2$ , 左下図は中心度 0-5% における  $v_3$ , 右下図は中心度 30-40% における  $v_3$  のモデル計算と実験結果 [55] の比較.

( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ) の  $\tau = 7\text{fm}$  における温度と速度  $v^x$  の分布を示した. 右図の速度分布を見ると, 体積粘性の効果により膨張が抑えられ, 流速が小さくなっているのを見ることができる. 温度分布, 速度分布ともに, 中心領域では二つの理論計算に違いが見えていない. 我々のモデルでは体積粘性は  $T < 200\text{MeV}$  の領域でのみ大きな値をとるため, 高温領域では体積粘性の効果は無く, 低温領域でのみ体積粘性の効果が表れている. 体積粘性を考慮した計算は, 低温領域で膨張が抑えられるため, 中心から流れた流体が温度  $150\text{MeV}$  付近に溜まっていることが分かる. 我々の計算では温度が  $150\text{MeV}$  以上の領域が実験に寄与する領域である. 体積粘性を考慮すると, 流体が温度  $150\text{MeV}$  以上に留まる寿命が長くなり, また体積が大きくなる.

$v_2, v_3$  の横運動量分布の結果を図 8.6 に示す.  $v_2$  においては, 約  $p_T < 1.5\text{GeV}$  の低横運動量領域では体積粘性により,  $v_2$  が抑えられている.  $v_2$  は反応平面の両側に向かって強い膨張が成長することで有限の値をとるが, 体積粘性によりこの膨張が抑えられていると考えられる.  $p_T > 1.5\text{GeV}$  では, 体積粘性の効果により  $v_2$  の値が大きくなっている. 同様の効果が参考文献 [184] においても議論されている. 粒子数の横運動量分布と比べると, 方位角異方性における体積粘性の影響は小さく, ずり粘性のみの計算と同程度の精度で実験結果を再現できている.

## 8.4 輸送係数の温度依存性

$\eta/s$  の温度依存性を考慮した結果を見る. 図 8.7 に  $\pi^+, K^+$ , 陽子の横運動量分布の結果を示す.  $\eta/s$  の温度依存性を考慮した場合として,  $b = 40$ ,  $(c_1, c_2) = (20, 0.7), (0, 0.7), (20, 0)$  の 3 つのパラ



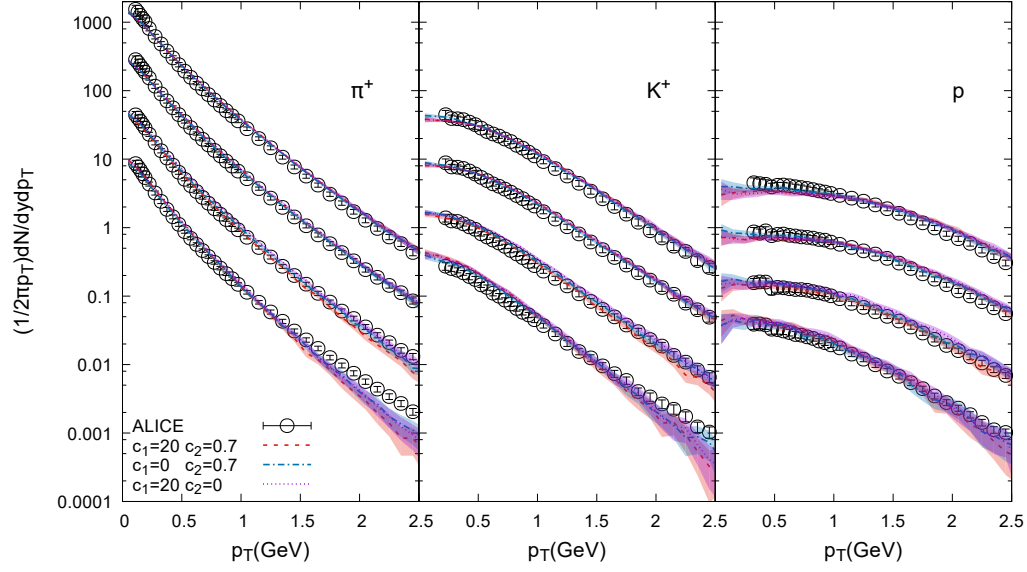


図 8.7:  $\pi$  中間子,  $K$  中間子, 陽子生成数の横運動量分布. 左図に  $\pi^+$ , 中図に  $K^+$ , 右図に陽子の結果を示す. それぞれの図で上から中心度 0-5 %, 10-20 %, 30-40 %, 50-60 % の結果.  $b = 40$ ,  $(c_1, c_2) = (20, 0.7), (0, 0.7), (20, 0)$  のモデル計算と ALICE 実験 [112] の比較.

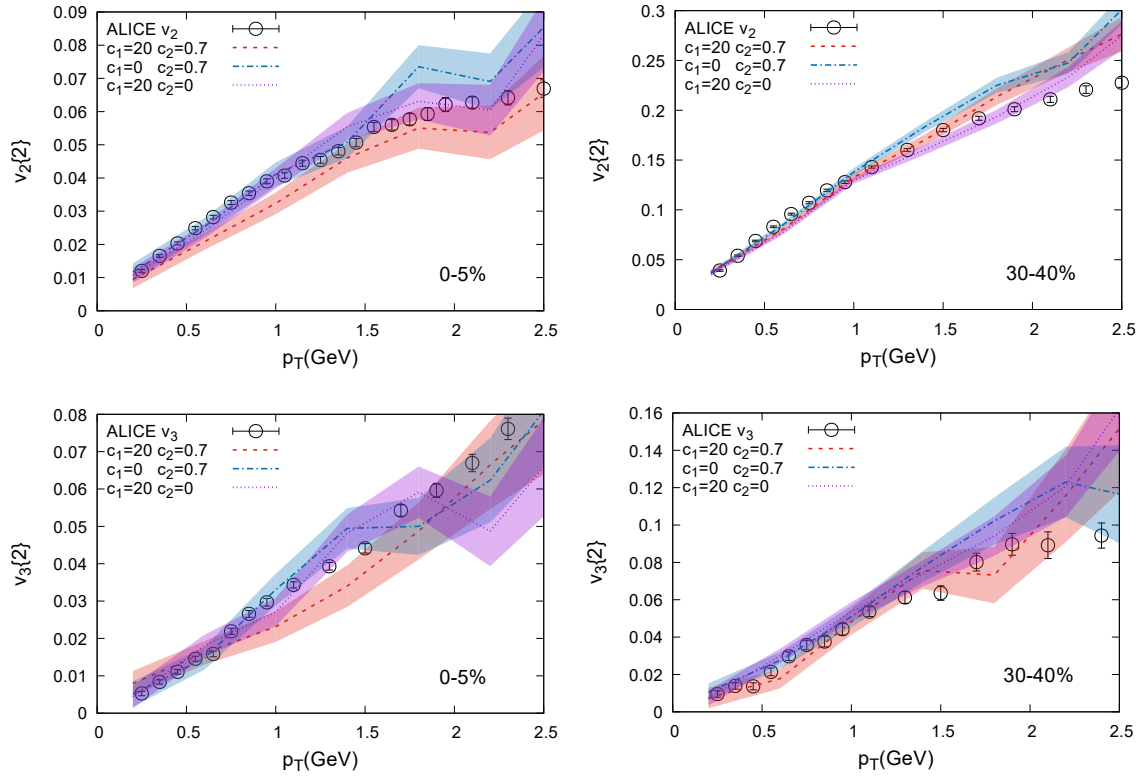


図 8.8: 荷電粒子数の  $v_2, v_3$  の横運動量分布. 左上図は中心度 0-5% における  $v_2$ , 右上図は中心度 30-40% における  $v_2$ , 左下図は中心度 0-5% における  $v_3$ , 右下図は中心度 30-40% における  $v_3$  のモデル計算と実験結果 [55] の比較.

メータセットで計算を行った. 粒子生成数の  $p_T$  分布の傾きが, 図 8.4 よりも緩やかになっている. 係数  $b$  を  $b = 40$  で固定したため,  $\eta/s = 0.17$  の場合にくらべ,  $\eta/s$  の温度依存性を導入した計算で

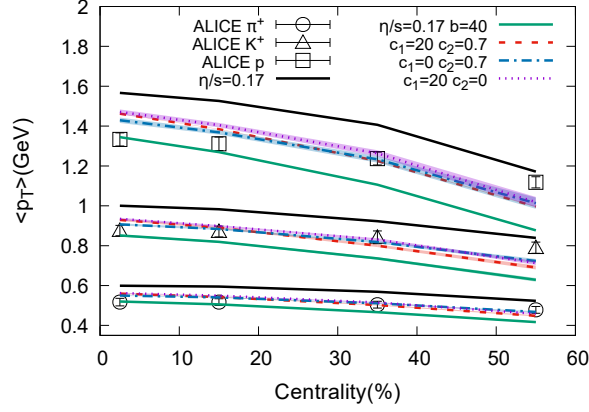


図 8.9:  $\pi$  中間子,  $K$  中間子, 陽子の平均横運動量の中心度依存性. モデル計算と ALICE 実験 [112] の比較.

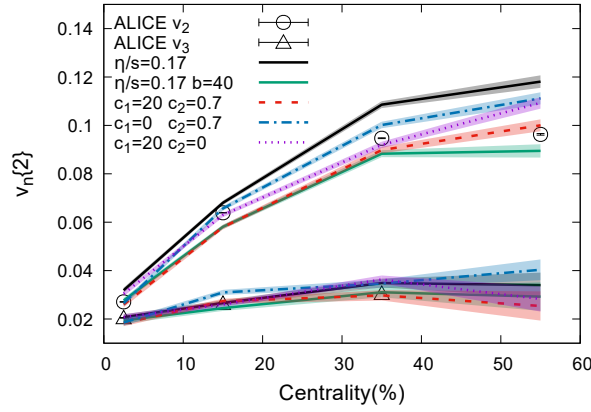


図 8.10: 方位角異方性の中心度依存性. モデル計算と ALICE 実験 [55] との比較.

は体積粘性の大きさが小さくなっている (図 7.2). 図 8.4 と同様, 粒子生成数の  $p_T$  分布の中心度依存性には実験とのずれが見られる.  $\eta/s$  の温度依存性の異なる 3 つの計算の違いは図 8.4 では見られない.

$v_2, v_3$  の横運動量分布の結果を図 8.8 に示す.  $v_2, v_3$  の結果においては,  $\eta/s$  の温度依存性の違いが表れている. 中心度 0-5% では,  $(c_1, c_2) = (20, 0.7)$  の計算は  $v_2$  の実験値を下回っており,  $(c_1, c_2) = (0, 0.7), (20, 0)$  の計算は実験結果を良く再現している. 一方で,  $(c_1, c_2) = (20, 0.7)$  の計算は中心度 30-40% では,  $v_2, v_3$  の実験結果を良く再現している. また,  $(c_1, c_2) = (0, 0.7)$  の計算による  $v_2$  は 30-40% で  $(c_1, c_2) = (20, 0)$  の計算による  $v_2$  より大きくなっている. これより, 中心衝突では高温領域での  $\eta/s$  の値が, 周辺衝突では低温領域での  $\eta/s$  の値が大きな影響を持っていると考えられる.  $v_2$  の中心度依存性が輸送係数の温度依存性に敏感であることが分かる.

図 8.9 に  $\pi$  中間子,  $K$  中間子, 陽子の平均横運動量の中心度依存性を示した.  $\eta/s$  の温度依存性を考慮した 3 つの計算に加え,  $(\eta/s = 0.17, \zeta/s = 0)$ ,  $(\eta/s = 0.17, b = 40)$  の計算を示した. 体積粘性の効果により平均横運動量が小さくなっている. 中心度の高い衝突では, 平均横運動量の実験データを再現するために体積粘性の効果が重要となっている. 図 8.9 では,  $\eta/s$  の温度依存性の違いは見えない.

図 8.10 に, 荷電粒子の方位角異方性の中心度依存性の結果を示した. 図 8.10 における  $v_n$  の値は,

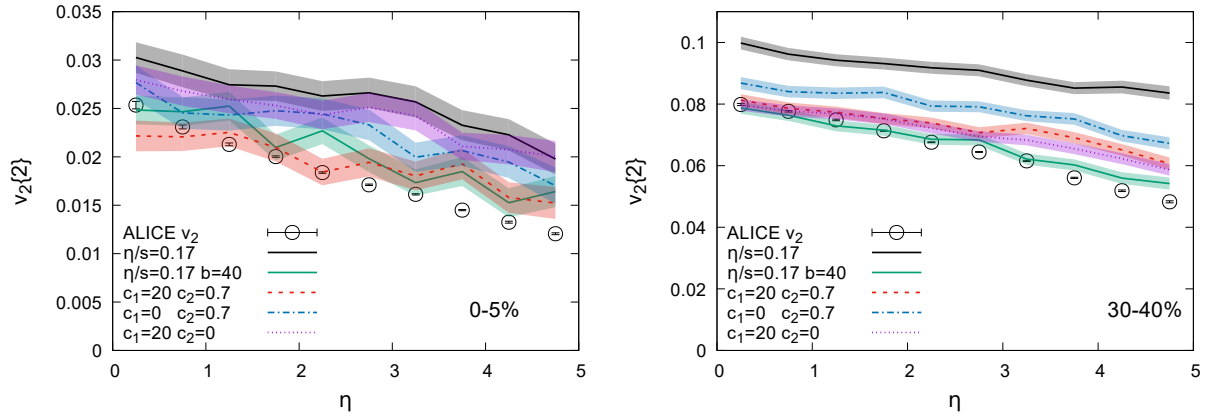


図 8.11:  $v_2$  の擬ラピディティ依存性. モデル計算と ALICE 実験 [185] との比較.

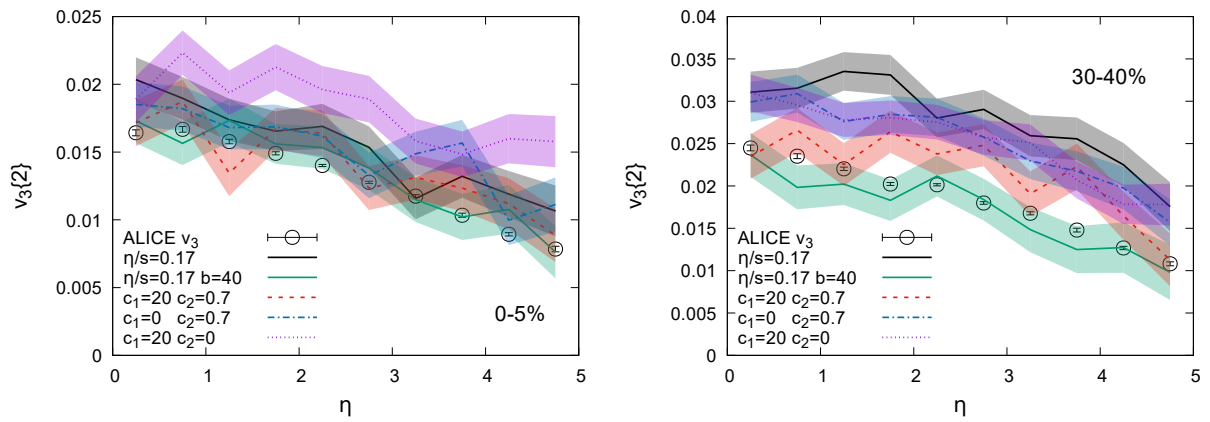


図 8.12:  $v_3$  の擬ラピディティ依存性. モデル計算と ALICE 実験 [185] との比較.

中心ラピディティ  $|y| < 0.8$  領域において,  $0.2 < p_T < 5\text{GeV}$  の荷電粒子を用いて解析されたものである. これは,  $v_n(p_T)$  を粒子数の重み  $dN/dp_T$  とともに  $p_T$  積分したのに対応する. ずり粘性のみの計算は, 図 8.10 において, 実験値を特に周辺衝突で上回っている. 体積粘性を含んだ残り 4 つの計算は  $v_2$  の値が抑えられ実験値に近づいている. ( $\eta/s = 0.17, b = 0$ ) と ( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ) の計算は,  $v_2(p_T)$  (図 8.6) においては大きな違いが無かったが, 図 8.10 では違いが表れている. 体積粘性により平均横運動量が抑えられることで,  $v_2(p_T)$  に大きな変化が無くとも, 粒子数の重みとともに  $p_T$  積分された  $v_2$  は小さくなる. ずり粘性の温度依存性の違いについては,  $(c_1, c_2) = (20, 0.7)$  の計算と  $(c_1, c_2) = (0, 0.7)$  の計算を比較すると, 周辺衝突でその違いが大きくなっている. 周辺衝突では,  $(c_1, c_2) = (0, 0.7)$  は実験値を上回っており, 低温領域のずり粘性の効果が周辺衝突で重要になっていると考えられる.

最後に方位角異方性の擬ラピディティ依存性を解析した.  $v_2$  の結果を図 8.11 に示す. 図 8.11 の  $v_2$  は全ての  $p_T$  領域の荷電粒子を用いて解析されたものである. ずり粘性のみの計算は実験値を上回っている. また,  $v_2(\eta)$  の傾きが実験結果よりも平坦になっている. ( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ) の計算と  $(c_1 = 20, c_2 = 0.7)$  の計算は実験値とのよい一致を得ることができた. ( $\eta/s = 0.17, b = 0$ ) と ( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ) の計算を比べると, ( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ) の方が擬ラピディティが大きくなるとともに,  $v_2$  の値が抑えられ,  $v_2(\eta)$  の傾きについても実験値に近づいている. これは, 大きなラピディティ領域は中心ラピディティ領域より温度が低く, 大きなラピディティ領域は

ど、体積粘性の影響が大きくなっているためだと考えられる。ハドロン相のずり粘性が小さい計算 ( $c_1 = 0, c_2 = 0.7$ ) は 0-5% の衝突と比べ、30-40% の周辺衝突で実験値を上回っている。一方、QGP 相でずり粘性が小さい計算 ( $c_1 = 20, c_2 = 0$ ) は、30-40% の周辺衝突では実験値に近いが、0-5% の中心衝突では実験値を上回っている。中心衝突は温度が高く、QGP 相におけるずり粘性の効果が効いており、周辺衝突は温度が低いためにハドロン相におけるずり粘性の効果が重要になっている。 $v_3$  (図 8.12) においても、統計エラーが大きいですが、同様の傾向を見ることができる。

## 第9章 まとめ

本論文では, QGP の物性の定量的理解を目指し, まず精度の高い相対論的粘性流体アルゴリズムを開発した. 高エネルギー原子核衝突実験における空間 3 次元の解析を目指し, 参考文献 [82] で開発されたアルゴリズムを原子核衝突実験に適した Milne 座標へ応用した. 完全流体アルゴリズムの Milne 座標への応用の際には, 流体方程式に表れる, Milne 座標に由来するソース項を回避した保存型の方程式に基づいてアルゴリズムを構築した. また, 完全流体, 粘性流体アルゴリズムにおいて精度の向上を行った. 完全流体, 粘性流体の場合についてテスト計算を行い, 我々のアルゴリズムが解析解を再現できること, 数値粘性が小さく精度の高い計算を行えることを確認した. 真空への膨張問題では保存型のアルゴリズムはソース項を持つアルゴリズムと比べ, 数値粘性が小さく, かつ安定に計算することができた. また, 完全流体アルゴリズムが保存則を保っているかをテストした. 保存型のアルゴリズムは格子サイズに依存せず, 保存則を高い精度で保つことができた. 一方でソース項を持つアルゴリズムは保存則を精度よく守るために, 十分小さな格子サイズを利用する必要があった. また, 我々のアルゴリズムは完全流体, 粘性流体における Gubser 解を精度よく再現し, 原子核衝突実験における多次元的な膨張の記述に適していることが確認できた.

現象論的解析に進む前に, 開発したアルゴリズムを用いて原子核衝突実験において Kelvin-Helmholtz 不安定性が生じる可能性を議論した. 我々の解析では中心ラピディティ付近  $|\eta| < 0.8$  の領域では, Bjorken 膨張の効果と粘性の効果により, Kelvin-Helmholtz 不安定性は成長しなかった.

さらに, 我々の新しい流体コードを用いた相対論的流体模型を構築した. そこでは, 現実的な初期条件モデルである T<sub>R</sub>ENTO, 格子 QCD 状態方程式を利用し, 最新の現象論的模型を開発した. そして, 開発した相対論的流体模型を用いて LHC 実験の解析を行った. この解析により, LHC における粒子数の横運動量分布は QGP の体積粘性の値に敏感であることを確認した. 中心度の高い衝突では, 粒子数の横運動量分布の観測結果を再現するために, 有限の体積粘性が必要であった. 横運動量積分された方位角異方性は, 粒子スペクトルを通して体積粘性の影響を大きく受けることが分かった. 方位角異方性の中心度依存性と擬ラピディティ依存性は, 粘性と体積粘性の温度依存性に敏感であった. 中心衝突では QGP 相における粘性が, 周辺衝突ではハドロン相における粘性が大きな影響を持っていた. ( $\eta/s = 0.17, b = 40$ ) の計算と ( $c_1 = 20, c_2 = 0.7$ ) の計算は方位角異方性の擬ラピディティ依存性に関する観測結果を良く再現することができた. 相転移温度付近で粘性と同程度の体積粘性を導入した計算は, 方位角異方性の擬ラピディティ依存性の実験データを再現することができた.

## 謝辞

本論文を執筆するにあたって、指導教官の野中千穂先生に深く感謝いたします。大学院の5年間、研究の進行や論文執筆、日頃のセミナーにおいて辛抱強くご指導いただきました。また、完全流体コード開発において議論していただき助言を下さった赤松幸尚さんにも感謝いたします。現象論的モデルを構築する上では、Duke 大学 QCD グループの Steffen Bass 教授, Jussi Auvinen, Jonah Bernhard, Scott Moreland, Weyao Ke に協力していただきました。ありがとうございました。Berndt Mueller 教授, 平野哲史さん, 森田健司さんは有意義な議論をしていただき、また研究に関する助言をいただきお世話になりました。原田正康先生と松崎慎也さんには、日頃のセミナーや研究室運営において大変お世話になりました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

## 付 録 A 流体アルゴリズムにおける補間スキーム

ここでは、我々の流体アルゴリズムで用いる補間のスキームについて説明する。我々は、空間2次精度スキームとして MC limiter, 空間3次精度スキームとして PPM を利用する。ここでは、本文中と異なり、 $i$  番目のセルの中心の位置を  $x_i$  と示し、 $i$  番目と  $i+1$  番目のセルの境界を  $x_{i+1/2}$  と示す。流体変数や粘性テンソルなど、補間を行う物理量を  $a(x)$  と書き、 $a(x)$  のセルの中  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  での平均値  $a_i$  が分かっているとする。補間操作では、 $a_i$  から、 $a(x)$  の補間関数  $a^I(x)$  を評価する。特に、セルの右端、左端における  $a(x)$  の値  $a_{R,i} = \lim_{x \rightarrow x_{i+1/2}} a(x)$ ,  $a_{L,i} = \lim_{x \rightarrow x_{i-1/2}} a(x)$  が注目される。補間関数  $a^I(x)$  を空間平均を取った量  $F_{i,R}(\sigma_i)$ ,  $F_{i,L}(\sigma_i)$  を以下のように定義しておく。

$$F_{i,R} = \frac{1}{\sigma_i \Delta x} \int_{x_{i+1/2} - \sigma_i \Delta x}^{x_{i+1/2}} a^I(x) dx, \quad (\text{A.0.1})$$

$$F_{i,L} = \frac{1}{\sigma_i \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2} + \sigma_i \Delta x} a^I(x) dx, \quad (\text{A.0.2})$$

ここで、 $\sigma_i = |u_i| \Delta t / \Delta x$  である。 $u_i$  は情報の伝播速度である。

### A.1 MC limiter

空間2次精度は線形補完により得られる。 $i$  番目のセルの中における  $a(x)$  の変位を  $\Delta a_i$  とする。2次精度補間では、セルの右端、左端における  $a(x)$  の値は

$$a_{R,i} = a_i + \Delta a_i / 2, \quad a_{L,i} = a_i - \Delta a_i / 2. \quad (\text{A.1.1})$$

と評価される。 $\Delta a_i$  は  $a_i$  から評価される。 $\Delta a_i$  の評価法は複数提案されている。 $\Delta a_i$  を次のよう評価するスキームを MC limiter と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \Delta a_i = & \min(|a_{i+1} - a_{i-1}|/2, 2|a_{i+1} - a_i|, 2|a_i - a_{i-1}|) \\ & \times \text{sign}(a_{i+1} - a_{i-1}) \quad \text{if } (a_{i+1} - a_i)(a_i - a_{i-1}) > 0, \\ = & 0 \quad \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

MC limiter においては、 $F_{i,R}(\sigma_i)$  と  $F_{i,L}(\sigma_i)$  は、

$$F_{i,R}(\sigma_i) = a_{i,R} - \frac{\sigma_i \Delta x}{2} \frac{\Delta a_i}{\Delta x}, \quad (\text{A.1.3})$$

$$F_{i,L}(\sigma_i) = a_{i,L} + \frac{\sigma_i \Delta x}{2} \frac{\Delta a_i}{\Delta x}, \quad (\text{A.1.4})$$

となる。

## A.2 Piecewise Parabolic Method (PPM)

参考文献 [157–159] に基づく．まず，4 次精度補間で  $a(x)$  を計算する．

$$a_{i+1/2} = \frac{7}{12}(a_i + a_{i+1}) - \frac{1}{12}(a_{i-1} + a_{i+2}). \quad (\text{A.2.1})$$

もし， $\min(a_i, a_{i+1}) \leq a_{i+1/2} \leq \max(a_i, a_{i+1})$  の条件が満たされない場合， $a_{i+1/2}$  は次のように補正される：

$$(D^2a)_{i+1/2} = \frac{3}{\Delta x^2}(a_i - 2a_{i+1/2} + a_{i+1}), \quad (\text{A.2.2})$$

$$(D^2a)_{i+1/2,L} = \frac{1}{\Delta x^2}(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}), \quad (\text{A.2.3})$$

$$(D^2a)_{i+1/2,R} = \frac{1}{\Delta x^2}(a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}). \quad (\text{A.2.4})$$

$(D^2a)_{i+1/2}$ ,  $(D^2a)_{i+1/2,R}$ ,  $(D^2a)_{i+1/2,L}$  の符号が全て同じ場合，

$$(D^2a)_{i+1/2,\text{lim}} = \min(C|(D^2a)_{i+1/2,L}|, C|(D^2a)_{i+1/2,R}|, |(D^2a)_{i+1/2}|) \text{sign}((D^2a)_{i+1/2}), \quad (\text{A.2.5})$$

そうでない場合， $(D^2a)_{i+1/2,\text{lim}} = 0$ ．補正された  $a_{i+1/2}$  の値は，

$$a_{i+1/2} \rightarrow \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) - \frac{\Delta x^2}{3}(D^2a)_{i+1/2,\text{lim}}, \quad (\text{A.2.6})$$

ここで， $C > 1$  は定数である．我々は  $C = 1.25$  とする [159]． $a(x)$  のセル境界における値は， $a_{L,i+1} = a_{R,i} = a_{i+1/2}$  と評価される．

強い衝撃波の近くで数値的振動を避けるために，数値粘性を導入する．

$$a_{R,i} \rightarrow a_i f_i + a_{R,i}(1 - f_i), \quad (\text{A.2.7})$$

$$a_{L,i} \rightarrow a_i f_i + a_{L,i}(1 - f_i). \quad (\text{A.2.8})$$

パラメータ  $f_i$  は， $f_i = \max(\tilde{f}_i, \tilde{f}_{i+s_i})$  と決定される．ここで， $p_{i+1} - p_{i-1} > 0$  のとき  $s_j = +1$ ， $p_{i+1} - p_{i-1} < 0$  のとき  $s_j = -1$ ，

$$\tilde{f}_i = \min\left(1, w_i \max\left(0, \left(\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{p_{i+2} - p_{i-2}} - w^{(1)}\right) w^{(2)}\right)\right). \quad (\text{A.2.9})$$

$w_i$  は次のように選ばれる．

$$\begin{aligned} w_i &= 1 \quad \text{if } \frac{|p_{i+1} - p_{i-1}|}{\min(p_{i+1}, p_{i-1})} > \epsilon, \quad v_{i-1} > v_{i+1}, \\ &= 0. \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

パラメータは  $\epsilon = 1$ ， $w^{(1)} = 0.52$ ， $w^{(2)} = 10$  とする [158]．

さらに，単調性を保証するため  $a_{i,R}$ ， $a_{i,L}$  を補正する． $(a_{i,R} - a_i)(a_i - a_{i,L}) \leq 0$  or  $(a_{i-1} - a_i)(a_i - a_{i+1}) \leq 0$ ，が満たされるとき， $i$  番目のセルは極小値を含む．その場合， $a_{i,R}$ ， $a_{i,L}$  は次のように補



正される:

$$(D^2a)_i = -\frac{2a_{6,i}}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.2.11})$$

$$(D^2a)_{i,C} = \frac{1}{\Delta x^2}(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}), \quad (\text{A.2.12})$$

$$(D^2a)_{i,L} = \frac{1}{\Delta x^2}(a_{i-2} - 2a_{i-1} + a_i), \quad (\text{A.2.13})$$

$$(D^2a)_{i,R} = \frac{1}{\Delta x^2}(a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2}), \quad (\text{A.2.14})$$

ここで,  $a_{6,i} = 6a_i - 3(a_{i,L} + a_{i,R})$ . If  $(D^2a)_i$ ,  $(D^2a)_{i,\{L,C,R\}}$  が同じ符号を持っているとき,

$$(D^2a)_{i,\text{lim}} = \min(C|(D^2a)_{i,L}|, C|(D^2a)_{i,R}|, C|(D^2a)_{i,C}|, \\ |(D^2a)_i|)\text{sign}((D^2a)_i), \quad (\text{A.2.15})$$

そうでないとき,  $(D^2a)_{i,\text{lim}} = 0$ . 結果として,

$$a_{i,R} \rightarrow a_i + (a_{i,R} - a_i) \frac{(D^2a)_{i,\text{lim}}}{(D^2a)_i}, \quad (\text{A.2.16})$$

$$a_{i,L} \rightarrow a_i + (a_{i,L} - a_i) \frac{(D^2a)_{i,\text{lim}}}{(D^2a)_i}. \quad (\text{A.2.17})$$

$(D^2a)_i = 0$  のとき, 式 (A.2.16), (A.2.17) の第2項をゼロとする. 最後に  $a_{i,R}$ ,  $a_{i,L}$  は次のように補正される,

$$a_{i,R} \rightarrow a_i - 2(a_{i,L} - a_i) \quad \text{if } |a_{i,R} - a_i| \geq 2|a_{i,L} - a_i|, \quad (\text{A.2.18})$$

$$a_{i,L} \rightarrow a_i - 2(a_{i,R} - a_i) \quad \text{if } |a_{i,L} - a_i| \geq 2|a_{i,R} - a_i|. \quad (\text{A.2.19})$$

補間関数の空間平均は次のように計算される.

$$F_{i,R}(\sigma_i) = a_{i,R} - \frac{\sigma_i}{2} \left( a_{i,R} - a_{i,L} - \left( 1 - \frac{2}{3}\sigma_i \right) a_{6,i} \right), \quad (\text{A.2.20})$$

$$F_{i,L}(\sigma_i) = a_{i,L} + \frac{\sigma_i}{2} \left( a_{i,R} - a_{i,L} + \left( 1 - \frac{2}{3}\sigma_i \right) a_{6,i} \right). \quad (\text{A.2.21})$$

## 付 録 B 移流方程式の数値解法

### B.1 高精度風上差分法

空間 1 次元の移流方程式を考える

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} + u(x) \frac{\partial a(t, x)}{\partial x} = 0. \quad (\text{B.1.1})$$

次のように差分化を行う.

$$a_i^{n+1} = a_i^n - \frac{u_i \Delta t}{\Delta x} (a_{i+1/2}^{n+1/2} - a_{i-1/2}^{n+1/2}), \quad (\text{B.1.2})$$

ここで,  $a_i^n$  は  $(t, x) = (t^n, x_i)$  における  $a(t, x)$  の値である,  $a_i^{n+1}$  は, 次の時間ステップ  $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$  における  $a$  の値である. 数値流速  $a_{i+1/2}^{n+1/2}$  は次のように評価される [161].

$$\begin{aligned} a_{i+1/2}^{n+1/2} &= F_{i,R}(\sigma_i) \quad \text{if } u_i > 0, \\ &= F_{i+1,L}(\sigma_{i+1}) \quad \text{otherwise.} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

$F_{i,R}(\sigma_i)$ ,  $F_{i,L}(\sigma_i)$  は MC limiter (式 (A.1.3), (A.1.4)) または PPM (式 (A.2.20), (A.2.21)) により評価される. 多次元系には次元分割法を用いる.

### B.2 Corner transport upwind (CTU) スキーム

CTU スキームは高精度風上差分法を多次元問題に応用したスキームである [162]. 空間 2 次元の移流方程式を考える,

$$\frac{\partial a(t, x, y)}{\partial t} + u(x, y) \frac{\partial a(t, x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial a(t, x, y)}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.2.1})$$

CTU スキームにおいて, 式 (B.2.1) は次のように計算される,

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{n+1} &= a_{i,j}^n - \frac{u_{i,j} \Delta t}{\Delta x} (a_{i+1/2,j}^{n+1/2} - a_{i-1/2,j}^{n+1/2}) \\ &\quad - \frac{v_{i,j} \Delta t}{\Delta y} (a_{i,j+1/2}^{n+1/2} - a_{i,j-1/2}^{n+1/2}), \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

ここで,  $a_{i,j}^n$  は  $t = t^n, x = x_i, y = y_j$  における  $a(t, x, y)$  の値,  $a_{i,j}^{n+1}$  は次の時間ステップ  $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$  における  $a$  の値, 第 2, 第 3 項はセル境界を通過する数値流速を表す. 数値流速は次のよう

に与えられる.

$$\begin{aligned}
a_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= a_{i,j}^n + \left( \frac{\Delta x}{2} - u_{i,j} \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\Delta^x a_{i,j}}{\Delta x} \\
&\quad - \max(v_{i,j}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta y} (a_{i,j}^n - a_{i,j-1}^n) \\
&\quad - \min(v_{i,j}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta y} (a_{i,j+1}^n - a_{i,j}^n) \quad \text{if } u_{i,j} \geq 0, \\
&= a_{i+1,j}^n - \left( \frac{\Delta x}{2} + u_{i+1,j} \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\Delta^x a_{i+1,j}}{\Delta x} \\
&\quad - \max(v_{i+1,j}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta y} (a_{i+1,j}^n - a_{i+1,j-1}^n) \\
&\quad - \min(v_{i+1,j}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta y} (a_{i+1,j+1}^n - a_{i+1,j}^n) \quad \text{if } u_{i,j} < 0, \tag{B.2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= a_{i,j}^n + \left( \frac{\Delta y}{2} - v_{i,j} \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\Delta^y a_{i,j}}{\Delta y} \\
&\quad - \max(u_{i,j}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_{i,j}^n - a_{i-1,j}^n) \\
&\quad - \min(u_{i,j}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_{i+1,j}^n - a_{i,j}^n) \quad \text{if } v_{i,j} \geq 0, \\
&= a_{i,j+1}^n - \left( \frac{\Delta y}{2} + v_{i,j+1} \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\Delta^y a_{i,j+1}}{\Delta y} \\
&\quad - \max(u_{i,j+1}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta y} (a_{i,j+1}^n - a_{i-1,j+1}^n) \\
&\quad - \min(u_{i,j+1}, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta y} (a_{i+1,j+1}^n - a_{i,j+1}^n) \quad \text{if } v_{i,j} < 0. \tag{B.2.4}
\end{aligned}$$

我々は,  $a(t, x, y)$  の  $x$  方向の変位 ( $\Delta^x a_{i,j}$ ) と  $y$  方向の変位 ( $\Delta^y a_{i,j}$ ) を MC limiter (A.1.2) を用いて評価する.

## 参考文献

- [1] K. Yagi, T. Hatsuda, and Y. Miake, “Quark-gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang,” Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [2] S. Sarkar, H. Satz, and B. Sinha, “The Physics of the Quark-Gluon Plasma: Introductory Lectures,” Lect. Notes Phys. 785, Springer, Berlin (2010).
- [3] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories,” Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [4] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?” Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [5] J. C. Collins and M. J. Perry, “Superdense Matter: Neutrons or Asymptotically Free Quarks?,” Phys. Rev. Lett. **34**, 1353 (1975).
- [6] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I,” Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [7] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II,” Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [8] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], “Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment,” Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005). nucl-ex/0410020.
- [9] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], “Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration,” Nucl. Phys. A **757**, 184 (2005). nucl-ex/0410003.
- [10] B. B. Back *et al.*, “The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC,” Nucl. Phys. A **757**, 28 (2005). nucl-ex/0410022.
- [11] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005). [nucl-ex/0501009].
- [12] D. Rischke and G. Levin (ed.), “Quark gluon plasma. New discoveries at RHIC: A case of strongly interacting quark gluon plasma,” Nucl. Phys. A **750**, 1-172 (2005).

- [13] B. Müller and J. L. Nagle, “Results from the relativistic heavy ion collider,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **56**, 93 (2006). nucl-th/0602029.
- [14] B. V. Jacak and B. Müller, “The exploration of hot nuclear matter,” *Science* **337**, 310 (2012).
- [15] C. Nonaka and M. Asakawa, “Modeling a Realistic Dynamical Model for High Energy Heavy Ion Collisions,” *PTEP* **2012**, 01A208 (2012). arXiv:1204.4795 [nucl-th].
- [16] T. Hirano, P. Huovinen, K. Murase, and Y. Nara, “Integrated Dynamical Approach to Relativistic Heavy Ion Collisions,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **70** (2013) 108. arXiv:1204.5814 [nucl-th].
- [17] C. Gale, S. Jeon, and B. Schenke, “Hydrodynamic Modeling of Heavy-Ion Collisions,” *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1340011 (2013). arXiv:1301.5893 [nucl-th].
- [18] R. Derradi de Souza, T. Koide, and T. Kodama, “Hydrodynamic Approaches in Relativistic Heavy Ion Reactions,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **86**, 35 (2016). arXiv:1506.03863 [nucl-th].
- [19] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], “Elliptic flow of identified hadrons in Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$ ,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 182301 (2003) nucl-ex/0305013.
- [20] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], “Particle type dependence of azimuthal anisotropy and nuclear modification of particle production in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$ ,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 052302 (2004). nucl-ex/0306007.
- [21] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], “Azimuthal anisotropy in Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$ ,” *Phys. Rev. C* **72**, 014904 (2005) doi:10.1103/PhysRevC.72.014904 nucl-ex/0409033.
- [22] P. F. Kolb, P. Huovinen, U. W. Heinz, and H. Heiselberg, “Elliptic flow at SPS and RHIC: From kinetic transport to hydrodynamics,” *Phys. Lett. B* **500**, 232 (2001). hep-ph/0012137.
- [23] P. Huovinen, P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. V. Ruuskanen, and S. A. Voloshin, “Radial and elliptic flow at RHIC: Further predictions,” *Phys. Lett. B* **503**, 58 (2001). hep-ph/0101136.
- [24] D. Teaney, J. Lauret, and E. V. Shuryak, “Flow at the SPS and RHIC as a quark gluon plasma signature,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4783 (2001). nucl-th/0011058.
- [25] T. Hirano, “Is early thermalization achieved only near mid-rapidity at RHIC?,” *Phys. Rev. C* **65**, 011901 (2002). nucl-th/0108004.
- [26] T. Hirano, U. W. Heinz, D. Kharzeev, R. Lacey, and Y. Nara, “Hadronic dissipative effects on elliptic flow in ultrarelativistic heavy-ion collisions,” *Phys. Lett. B* **636**, 299 (2006). nucl-th/0511046.

- [27] C. Nonaka and S. A. Bass, “Space-time evolution of bulk QCD matter,” *Phys. Rev. C* **75**, 014902 (2007). nucl-th/0607018.
- [28] H. Holopainen, H. Niemi, and K. J. Eskola, “Event-by-event hydrodynamics and elliptic flow from fluctuating initial state,” *Phys. Rev. C* **83**, 034901 (2011). arXiv:1007.0368 [hep-ph].
- [29] B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “(3+1)D hydrodynamic simulation of relativistic heavy-ion collisions,” *Phys. Rev. C* **82**, 014903 (2010). arXiv:1004.1408 [hep-ph].
- [30] E. Shuryak, “Why does the quark gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid?,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **53**, 273 (2004). hep-ph/0312227.
- [31] E. Shuryak, “Physics of Strongly coupled Quark-Gluon Plasma,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 48 (2009). arXiv:0807.3033 [hep-ph].
- [32] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Stability and causality in dissipative relativistic fluids,” *Ann. Phys. (NY)* **151**, 466 (1983).
- [33] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories,” *Phys. Rev. D* **31**, 725 (1985).
- [34] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Linear plane waves in dissipative relativistic fluids,” *Phys. Rev. D* **35**, 3723 (1987).
- [35] G. S. Denicol, T. Kodama, T. Koide, and Ph. Mota, “Stability and Causality in relativistic dissipative hydrodynamics,” *J. Phys. G* **35**, 115102 (2008). arXiv:0807.3120 [hep-ph].
- [36] S. Pu, T. Koide, and D. H. Rischke, “Does stability of relativistic dissipative fluid dynamics imply causality?,” *Phys. Rev. D* **81**, 114039 (2010). arXiv:0907.3906 [hep-ph].
- [37] H. Song and U. W. Heinz, “Causal viscous hydrodynamics in 2+1 dimensions for relativistic heavy-ion collisions,” *Phys. Rev. C* **77**, 064901 (2008). arXiv:0712.3715 [nucl-th].
- [38] K. Dusling and D. Teaney, “Simulating elliptic flow with viscous hydrodynamics,” *Phys. Rev. C* **77**, 034905 (2008). arXiv:0710.5932 [nucl-th].
- [39] M. Luzum and P. Romatschke, “Conformal Relativistic Viscous Hydrodynamics: Applications to RHIC results at  $\sqrt{s_{NN}}=200$ -GeV,” *Phys. Rev. C* **78**, 034915 (2008). Erratum: [*Phys. Rev. C* **79**, 039903 (2009)]. arXiv:0804.4015 [nucl-th].
- [40] G. S. Denicol, T. Kodama, T. Koide, and P. Mota, “Effect of bulk viscosity on Elliptic Flow near QCD phase transition,” *Phys. Rev. C* **80**, 064901 (2009). arXiv:0903.3595 [hep-ph].
- [41] B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “Elliptic and triangular flow in event-by-event (3+1)D viscous hydrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 042301. arXiv:1009.3244 [hep-ph].

- [42] P. Bozek, “Flow and interferometry in 3+1 dimensional viscous hydrodynamics,” *Phys. Rev. C* **85**, 034901 (2012). arXiv:1110.6742 [nucl-th].
- [43] V. Roy and A. K. Chaudhuri, “2+1 dimensional hydrodynamics including bulk viscosity: A Systematics study,” *Phys. Rev. C* **85**, 024909 (2012). Erratum: [*Phys. Rev. C* **85**, 049902 (2012)]. arXiv:1109.1630 [nucl-th].
- [44] J. Noronha-Hostler, G. S. Denicol, J. Noronha, R. P. G. Andrade, and F. Grassi, “Bulk Viscosity Effects in Event-by-Event Relativistic Hydrodynamics,” *Phys. Rev. C* **88**, 044916 (2013). arXiv:1305.1981 [nucl-th].
- [45] L. Del Zanna, V. Chandra, G. Inghirami, V. Roland, A. Beraudo, A. De Pace, G. Pagliara, A. Drago, and F. Becattini, “Relativistic viscous hydrodynamics for heavy-ion collisions with ECHO-QGP,” *Eur. Phys. J. C* **73**, 2524 (2013). arXiv:1305.7052 [nucl-th].
- [46] I. Karpenko, P. Huovinen, and M. Bleicher, “A 3+1 dimensional viscous hydrodynamic code for relativistic heavy ion collisions,” *Comput. Phys. Commun.* **185**, 3016 (2014). arXiv:1312.4160 [nucl-th].
- [47] J. Noronha-Hostler, J. Noronha, and F. Grassi, “Bulk viscosity-driven suppression of shear viscosity effects on the flow harmonics at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider,” *Phys. Rev. C* **90**, 034907 (2014). arXiv:1406.3333 [nucl-th].
- [48] E. Molnar, H. Holopainen, P. Huovinen, and H. Niemi, “Influence of temperature-dependent shear viscosity on elliptic flow at backward and forward rapidities in ultrarelativistic heavy-ion collisions,” *Phys. Rev. C* **90**, 044904 (2014). arXiv:1407.8152 [nucl-th].
- [49] L. G. Pang, Y. Hatta, X. N. Wang, and B. W. Xiao, “Analytical and numerical Gubser solutions of the second-order hydrodynamics,” *Phys. Rev. D* **91**, 074027 (2015). arXiv:1411.7767 [hep-ph].
- [50] H. Song, S. A. Bass, U. Heinz, T. Hirano, and C. Shen, “200 A GeV Au+Au collisions serve a nearly perfect quark-gluon liquid,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 192301 (2011) Erratum: [*Phys. Rev. Lett.* **109**, 139904 (2012)]. [arXiv:1011.2783 [nucl-th]].
- [51] M. Luzum and J. Y. Ollitrault, “Extracting the shear viscosity of the quark-gluon plasma from flow in ultra-central heavy-ion collisions,” *Nucl. Phys. A* **904-905**, 377c (2013). arXiv:1210.6010 [nucl-th].
- [52] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 111601 (2005). hep-th/0405231.
- [53] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], “Measurements of Higher-Order Flow Harmonics in Au+Au Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 252301 (2011). arXiv:1105.3928 [nucl-ex].

- [54] P. Sorensen [STAR Collaboration], “Higher Flow Harmonics in Heavy Ion Collisions from STAR,” J. Phys. G **38**, 124029 (2011). arXiv:1110.0737 [nucl-ex].
- [55] K. Aamodt *et al.* [ALICE Collaboration], “Higher harmonic anisotropic flow measurements of charged particles in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}}=2.76$  TeV,” Phys. Rev. Lett. **107**, 032301 (2011). arXiv:1105.3865 [nucl-ex].
- [56] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Measurement of the azimuthal anisotropy for charged particle production in  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV lead-lead collisions with the ATLAS detector,” Phys. Rev. C **86**, 014907 (2012). arXiv:1203.3087 [hep-ex].
- [57] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], “Measurement of higher-order harmonic azimuthal anisotropy in PbPb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” Phys. Rev. C **89**, 044906 (2014). arXiv:1310.8651 [nucl-ex].
- [58] B. Alver and G. Roland, “Collision geometry fluctuations and triangular flow in heavy-ion collisions,” Phys. Rev. C **81**, 054905 (2010). Erratum: [Phys. Rev. C **82**, 039903 (2010)]. arXiv:1003.0194 [nucl-th].
- [59] B. H. Alver, C. Gombeaud, M. Luzum, and J. Y. Ollitrault, “Triangular flow in hydrodynamics and transport theory,” Phys. Rev. C **82**, 034913 (2010). arXiv:1007.5469 [nucl-th].
- [60] Z. Qiu, C. Shen, and U. Heinz, “Hydrodynamic elliptic and triangular flow in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s} = 2.76$  ATeV,” Phys. Lett. B **707**, 151 (2012). arXiv:1110.3033 [nucl-th].
- [61] B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “Higher flow harmonics from (3+1)D event-by-event viscous hydrodynamics,” Phys. Rev. C **85**, 024901 (2012). arXiv:1109.6289 [hep-ph].
- [62] F. G. Gardim, F. Grassi, M. Luzum, and J. Y. Ollitrault, “Anisotropic flow in event-by-event ideal hydrodynamic simulations of  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions,” Phys. Rev. Lett. **109**, 202302 (2012). arXiv:1203.2882 [nucl-th].
- [63] C. Gale, S. Jeon, B. Schenke, P. Tribedy, and R. Venugopalan, “Event-by-event anisotropic flow in heavy-ion collisions from combined Yang-Mills and viscous fluid dynamics,” Phys. Rev. Lett. **110**, 012302 (2013). arXiv:1209.6330 [nucl-th].
- [64] H. Niemi, K. J. Eskola, and R. Paatelainen, “Event-by-event fluctuations in a perturbative QCD + saturation + hydrodynamics model: Determining QCD matter shear viscosity in ultrarelativistic heavy-ion collisions,” Phys. Rev. C **93**, 024907 (2016). arXiv:1505.02677 [hep-ph].
- [65] H. j. Xu, Z. Li, and H. Song, “High-order flow harmonics of identified hadrons in 2.76 A TeV Pb + Pb collisions,” Phys. Rev. C **93**, 064905 (2016). arXiv:1602.02029 [nucl-th].
- [66] J. E. Bernhard, J. S. Moreland, S. A. Bass, J. Liu, and U. Heinz, “Applying Bayesian parameter estimation to relativistic heavy-ion collisions: simultaneous characterization



- of the initial state and quark-gluon plasma medium,” *Phys. Rev. C* **94**, 024907 (2016). arXiv:1605.03954 [nucl-th].
- [67] S. McDonald, C. Shen, F. Fillion-Gourdeau, S. Jeon, and C. Gale, “Hydrodynamic predictions for Pb+Pb collisions at 5.02 TeV,” *Phys. Rev. C* **95**, 064913 (2017). arXiv:1609.02958 [hep-ph].
  - [68] R. D. Weller and P. Romatschke, “One fluid to rule them all: viscous hydrodynamic description of event-by-event central p+p, p+Pb and Pb+Pb collisions at  $\sqrt{s} = 5.02$  TeV,” *Phys. Lett. B* **774**, 351 (2017). arXiv:1701.07145 [nucl-th].
  - [69] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Measurement of the correlation between flow harmonics of different order in lead-lead collisions at  $\sqrt{s_{NN}}=2.76$  TeV with the ATLAS detector,” *Phys. Rev. C* **92**, 034903 (2015). arXiv:1504.01289 [hep-ex].
  - [70] J. Adam *et al.* [ALICE Collaboration], “Correlated event-by-event fluctuations of flow harmonics in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Phys. Rev. Lett.* **117**, 182301 (2016). arXiv:1604.07663 [nucl-ex].
  - [71] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Measurement of event-plane correlations in  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV lead-lead collisions with the ATLAS detector,” *Phys. Rev. C* **90**, 024905 (2014). arXiv:1403.0489 [hep-ex].
  - [72] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], “Evidence for transverse momentum and pseudorapidity dependent event plane fluctuations in PbPb and pPb collisions,” *Phys. Rev. C* **92**, 034911 (2015). arXiv:1503.01692 [nucl-ex].
  - [73] L. Yan and J. Y. Ollitrault, “ $\nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7$ : nonlinear hydrodynamic response versus LHC data,” *Phys. Lett. B* **744**, 82 (2015). arXiv:1502.02502 [nucl-th].
  - [74] L. Adamczyk *et al.* [STAR Collaboration], “Harmonic decomposition of three-particle azimuthal correlations at RHIC,” arXiv:1701.06496 [nucl-ex].
  - [75] L. Adamczyk *et al.* [STAR Collaboration], “Constraining the initial conditions and temperature dependent transport with three-particle correlations in Au+Au collisions,” arXiv:1701.06497 [nucl-ex].
  - [76] P. B. Arnold, G. D. Moore, and L. G. Yaffe, “Transport coefficients in high temperature gauge theories. 2. Beyond leading log,” *JHEP* **0305**, 051 (2003). hep-ph/0302165.
  - [77] M. Prakash, M. Prakash, R. Venugopalan, and G. Welke, “Non-equilibrium properties of hadronic mixtures,” *Phys. Rep.* **227**, 321 (1993).
  - [78] J. Noronha-Hostler, J. Noronha, and C. Greiner, “Transport Coefficients of Hadronic Matter near T(c),” *Phys. Rev. Lett.* **103**, 172302 (2009). arXiv:0811.1571 [nucl-th].

- [79] L. P. Csernai, J. I. Kapusta, and L. D. McLerran, “On the Strongly-Interacting Low-Viscosity Matter Created in Relativistic Nuclear Collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **97**, 152303 (2006). nucl-th/0604032.
- [80] F. Karsch, D. Kharzeev, and K. Tuchin, “Universal properties of bulk viscosity near the QCD phase transition,” *Phys. Lett. B* **663**, 217 (2008). arXiv:0711.0914 [hep-ph].
- [81] C. Cercignani and G. M. Kremer, “The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications,” Birkhäuser, (2002).
- [82] Y. Akamatsu, S. i. Inutsuka, C. Nonaka, and M. Takamoto, “A new scheme of causal viscous hydrodynamics for relativistic heavy-ion collisions: A Riemann solver for quark-gluon plasma,” *J. Comput. Phys.* **256**, 34 (2014). arXiv:1302.1665 [nucl-th].
- [83] M. Takamoto and S. Inutsuka, “A Fast Numerical Scheme for Causal Relativistic Hydrodynamics with Dissipation,” *J. Comput. Phys.* **230**, 7002 (2011). arXiv:1106.1732 [astro-ph.HE].
- [84] A. Mignone, T. Plewa, and G. Bodo, “The Piecewise parabolic method for multidimensional relativistic fluid dynamics,” *Astrophys. J. Suppl.* **160**, 199 (2005). astro-ph/0505200.
- [85] K. Okamoto, Y. Akamatsu, and C. Nonaka, “A new relativistic hydrodynamics code for high-energy heavy-ion collisions,” *Eur. Phys. J. C* **76**, no. 10, 579 (2016). arXiv:1607.03630 [nucl-th].
- [86] K. Okamoto and C. Nonaka, “A new relativistic viscous hydrodynamics code and its application to the KelvinHelmholtz instability in high-energy heavy-ion collisions,” *Eur. Phys. J. C* **77**, no. 6, 383 (2017). arXiv:1703.01473 [nucl-th].
- [87] P. Romatschke, “Fluid turbulence and eddy viscosity in relativistic heavy-ion collisions,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **174**, 137 (2008). arXiv:0710.0016 [nucl-th].
- [88] S. Floerchinger and U. A. Wiedemann, “Fluctuations around Bjorken Flow and the onset of turbulent phenomena,” *JHEP* **1111**, 100 (2011). arXiv:1108.5535 [nucl-th].
- [89] L. P. Csernai, D. D. Strottman, and C. Anderlik, “Kelvin-Helmholz instability in high energy heavy ion collisions,” *Phys. Rev. C* **85**, 054901 (2012). arXiv:1112.4287 [nucl-th].
- [90] K. Okamoto and C. Nonaka, “Temperature dependence of transport coefficients of QCD in high-energy heavy-ion collisions,” arXiv:1712.00923 [nucl-th].
- [91] E. Iancu and R. Venugopalan, “The Color Glass Condensate and High Energy Scattering in QCD,” in *Quark gluon plasma 3*, edited by R. Hwa and X. N. Wang, World Scientific (2003). hep-ph/0303204.
- [92] F. Gelis, “Initial state and thermalization in the Color Glass Condensate framework,” *Int. J. Mod. Phys. E* **24**, 1530008 (2015). arXiv:1508.07974 [hep-ph].

- [93] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration], “Nuclear stopping in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200$  GeV,” Phys. Rev. Lett. **93**, 102301 (2004). nucl-ex/0312023.
- [94] T. Lappi and L. McLerran, “Some features of the glasma,” Nucl. Phys. A **772**, 200 (2006). hep-ph/0602189.
- [95] U. W. Heinz and P. F. Kolb, “Early thermalization at RHIC,” Nucl. Phys. A **702**, 269 (2002). hep-ph/0111075.
- [96] U. W. Heinz and P. F. Kolb, “Two RHIC puzzles: Early thermalization and the HBT problem,” hep-ph/0204061.
- [97] S. Borsanyi, Z. Fodor, S. D. Katz, A. Psztor, K. K. Szab, and C. Trk, “Static  $\bar{Q}Q$  pair free energy and screening masses from correlators of Polyakov loops: continuum extrapolated lattice results at the QCD physical point,” JHEP **1504**, 138 (2015). arXiv:1501.02173 [hep-lat].
- [98] P. B. Arnold, “Quark-Gluon Plasmas and Thermalization,” Int. J. Mod. Phys. E **16**, 2555 (2007). arXiv:0708.0812 [hep-ph].
- [99] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabo, “The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics,” Nature **443**, 675 (2006). hep-lat/0611014.
- [100] A. Bazavov *et al.* [HotQCD Collaboration], “Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition,” Phys. Rev. D **85**, 054503 (2012). arXiv:1111.1710 [hep-lat].
- [101] D. H. Rischke, “The Quark gluon plasma in equilibrium,” Prog. Part. Nucl. Phys. **52**, 197 (2004). nucl-th/0305030.
- [102] E. Fermi, “High-energy nuclear events,” Prog. Theor. Phys **5**, 570 (1950).
- [103] L. D. Landau, “On Multiple Production of Particles during Collisions of Fast Particles,” Izv. Akad. Nauk SSSR **17**, 51 (1953).
- [104] J. Cleymans and H. Satz, “Thermal hadron production in high energy heavy ion collisions,” Z. Phys. C **57**, 135 (1993).
- [105] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels, and N. Xu, “Thermal equilibration and expansion in nucleus-nucleus collisions at the AGS,” Phys. Lett B **344**, 43 (1995).
- [106] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels, and N. Xu, “Thermal and hadrochemical equilibration in nucleus-nucleus collisions at the SPS,” Phys. Lett B **365**, 1 (1996).
- [107] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich, and J. Stachel, “Hadron production in Au-Au collisions at RHIC,” Phys Lett B **518**, 41 (2001).

- [108] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, and J. Stachel, “Thermal hadron production in relativistic nuclear collisions: The Hadron mass spectrum, the horn, and the QCD phase transition,” *Phys. Lett. B* **673**, 142 (2009). Erratum: [*Phys. Lett. B* **678**, 516 (2009)]. arXiv:0812.1186 [nucl-th].
- [109] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, K. Redlich, and J. Stachel, “The statistical model in Pb-Pb collisions at the LHC,” *Nucl. Phys. A* **904-905**, 535c (2013). arXiv:1210.7724 [nucl-th].
- [110] E. Schnedermann, J. Solfrank, and U. Heinz, “Thermal phenomenology of hadrons from 200A GeV S+S collisions,” *Phys. Rev. C* **48**, 2462 (1993).
- [111] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], “Production of phi mesons at mid-rapidity in  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions at RHIC,” *Phys. Rev. C* **72** (2005) 014903. nucl-ex/0410012.
- [112] B. Abelev *et al.* [ALICE Collaboration], “Centrality dependence of  $\pi$ , K, p production in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Phys. Rev. C* **88**, 044910 (2013). arXiv:1303.0737 [hep-ex].
- [113] C. Eckart, “The Thermodynamics of Irreversible Processes. III. Relativistic Theory of the Simple Fluid,” *Phys. Rev.* **58**, 919 (1940).
- [114] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “Fluid Mechanics,” 2nd edition, *Course of Theoretical Physics*, vol. 6, Butterworth-Heinemann, Oxford (1987).
- [115] W. Israel, “Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory,” *Ann. Physics* **100**, 310 (1976).
- [116] W. Israel and J. Stewart, “Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory,” *Ann. Physics* **118**, 341(1979).
- [117] G. S. Denicol, E. Molnar, H. Niemi, and D. H. Rischke, “Derivation of fluid dynamics from kinetic theory with the 14-moment approximation,” *Eur. Phys. J. A* **48**, 170 (2012). arXiv:1206.1554 [nucl-th].
- [118] P. Huovinen and D. Molnar, “The Applicability of causal dissipative hydrodynamics to relativistic heavy ion collisions,” *Phys. Rev. C* **79**, 014906 (2009). arXiv:0808.0953 [nucl-th].
- [119] D. Molnar and P. Huovinen, “Applicability of viscous hydrodynamics at RHIC,” *Nucl. Phys. A* **830**, 475C (2009). arXiv:0907.5014 [nucl-th].
- [120] I. Bouras, E. Molnar, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, and D. H. Rischke, “Investigation of shock waves in the relativistic Riemann problem: A Comparison of viscous fluid dynamics to kinetic theory,” *Phys. Rev. C* **82**, 024910 (2010). arXiv:1006.0387 [hep-ph].

- [121] M. Takamoto and S. Inutsuka, “The relativistic kinetic dispersion relation: Comparison of the relativistic Bhatnagar-Gross-Krook model and Grad’s 14-moment expansion,” *Physica A* **389**, 4580 (2010). arXiv:1006.2663 [astro-ph.HE].
- [122] A. El, Z. Xu and C. Greiner, “Third-order relativistic dissipative hydrodynamics,” *Phys. Rev. C* **81**, 041901 (2010) arXiv:0907.4500 [hep-ph].
- [123] G. S. Denicol, T. Koide, and D. H. Rischke, “Dissipative relativistic fluid dynamics: a new way to derive the equations of motion from kinetic theory,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 162501 (2010). arXiv:1004.5013 [nucl-th].
- [124] G. S. Denicol, H. Niemi, E. Molnar, and D. H. Rischke, “Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the Boltzmann equation,” *Phys. Rev. D* **85**, 114047 (2012). Erratum: [*Phys. Rev. D* **91**, no. 3, 039902 (2015)]. arXiv:1202.4551 [nucl-th].
- [125] G. S. Denicol, W. Florkowski, R. Ryblewski, and M. Strickland, “Shear-bulk coupling in nonconformal hydrodynamics,” *Phys. Rev. C* **90**, 044905 (2014). arXiv:1407.4767 [hep-ph].
- [126] E. Molnr, H. Niemi, G. S. Denicol, and D. H. Rischke, “Relative importance of second-order terms in relativistic dissipative fluid dynamics,” *Phys. Rev. D* **89**, 074010 (2014). arXiv:1308.0785 [nucl-th].
- [127] G. S. Denicol, S. Jeon, and C. Gale, “Transport Coefficients of Bulk Viscous Pressure in the 14-moment approximation,” *Phys. Rev. C* **90**, 024912 (2014). arXiv:1403.0962 [nucl-th].
- [128] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration], “Charged particle densities from Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 130\text{GeV}$ ,” *Phys. Lett. B* **523**, 227 (2001). nucl-ex/0108016.
- [129] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration], “Pseudorapidity distributions of charged particles from Au+Au collisions at the maximum RHIC energy,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 202301 (2002). nucl-ex/0112001.
- [130] B. B. Back *et al.*, “The Significance of the fragmentation region in ultrarelativistic heavy ion collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 052303 (2003). nucl-ex/0210015.
- [131] B. Alver *et al.* [PHOBOS Collaboration], “Phobos results on charged particle multiplicity and pseudorapidity distributions in Au+Au, Cu+Cu, d+Au, and p+p collisions at ultrarelativistic energies,” *Phys. Rev. C* **83**, 024913 (2011). arXiv:1011.1940 [nucl-ex].
- [132] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], “Dependence on pseudorapidity and centrality of charged hadron production in PbPb collisions at a nucleon-nucleon centre-of-mass energy of 2.76 TeV,” *JHEP* **1108**, 141 (2011). arXiv:1107.4800 [nucl-ex].
- [133] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Measurement of the centrality dependence of the charged particle pseudorapidity distribution in lead-lead collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{ TeV}$  with the ATLAS detector,” *Phys. Lett. B* **710**, 363 (2012). arXiv:1108.6027 [hep-ex].

- [134] E. Abbas *et al.* [ALICE Collaboration], “Centrality dependence of the pseudorapidity density distribution for charged particles in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” Phys. Lett. B **726**, 610 (2013). arXiv:1304.0347 [nucl-ex].
- [135] J. D. Bjorken, “Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region,” Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
- [136] S. Jeon and U. Heinz, “Introduction to Hydrodynamics,” Int. J. Mod. Phys. E **24**, no. 10, 1530010 (2015). arXiv:1503.03931 [hep-ph].
- [137] J. M. Marti and E. Müller, “The analytical solution of the Riemann problem in relativistic hydrodynamics,” J. Fluid Mech. **258**, 317 (1994).
- [138] J. A. Pons, J. M. Marti, and E. Müller, “The exact solution of the Riemann problem with non-zero tangential velocities in relativistic hydrodynamics,” J. Fluid Mech. **422**, 125 (2000).
- [139] A. H. Taub, “Relativistic Rankine-Hugoniot Equations,” Phys. Rev. **74**, 328 (1948).
- [140] D. H. Rischke, S. Bernard, and J. A. Maruhn, “Relativistic hydrodynamics for heavy ion collisions. 1. General aspects and expansion into vacuum,” Nucl. Phys. A **595**, 346 (1995). nucl-th/9504018.
- [141] S. Z. Belenkij and L. D. Landau, “A Hydrodynamic Theory of Multiple Formation of Particles,” Usp. Fiz. Nauk **56**, 309 (1955).
- [142] S. Z. Belenkij and L. D. Landau, “Hydrodynamic theory of multiple production of particles,” Nuovo Cimento Suppl. **3**, 15 (1956).
- [143] M. J. Murray [BRAHMS Collaboration], “Scanning the phases of QCD with BRAHMS,” J. Phys. G **30**, S667 (2004). nucl-ex/0404007.
- [144] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration], “Charged meson rapidity distributions in central Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV,” Phys. Rev. Lett. **94**, 162301 (2005). nucl-ex/0403050.
- [145] C. Y. Wong, “Landau Hydrodynamics Revisited,” Phys. Rev. C **78**, 054902 (2008). arXiv:0808.1294 [hep-ph].
- [146] Z. J. Jiang, Q. G. Li, and H. L. Zhang, “Revised Landau hydrodynamic model and the pseudorapidity distributions of charged particles produced in nucleus-nucleus collisions at maximum energy at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider,” Phys. Rev. C **87**, 044902 (2013).
- [147] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], “Systematic studies of the centrality and  $\sqrt{s_{NN}}$  dependence of the  $dE_T/d\eta$  and  $dN_{ch}/d\eta$  in heavy ion collisions at mid-rapidity,” Phys. Rev. C **71**, 034908 (2005). Erratum: [Phys. Rev. C **71**, 049901 (2005)]. nucl-ex/0409015.

- [148] R. Baier and P. Romatschke, “Causal viscous hydrodynamics for central heavy-ion collisions,” *Eur. Phys. J. C* **51**, 677 (2007). [nucl-th/0610108](#).
- [149] S. S. Gubser, “Symmetry constraints on generalizations of Bjorken flow,” *Phys. Rev. D* **82**, 085027 (2010). [arXiv:1006.0006 \[hep-th\]](#).
- [150] S. S. Gubser, and A. Yarom, “Conformal hydrodynamics in Minkowski and de Sitter spacetimes,” *Nucl. Phys. B* **846** (2011) 469. [arXiv:1012.1314 \[hep-th\]](#).
- [151] H. Marrochio, J. Noronha, G. S. Denicol, M. Luzum, S. Jeon, and C. Gale, “Solutions of Conformal Israel-Stewart Relativistic Viscous Fluid Dynamics,” *Phys. Rev. C* **91**, 014903 (2015). [arXiv:1307.6130 \[nucl-th\]](#).
- [152] C. Shen, Z. Qiu, H. Song, J. Bernhard, S. Bass, and U. Heinz, “The iEBE-VISHNU code package for relativistic heavy-ion collisions,” *Comput. Phys. Commun.* **199**, 61 (2016). [arXiv:1409.8164 \[nucl-th\]](#).
- [153] F. Becattini, G. Inghirami, V. Roland, A. Beraudo, L. Del Zanna, A. De Pace, M. Nardi, G. Pagliara, and V. Chandra, “A study of vorticity formation in high energy nuclear collisions,” *Eur. Phys. J. C* **75**, 406 (2015). [arXiv:1501.04468 \[nucl-th\]](#).
- [154] R. J. Fries, G. Chen, and S. Somanathan, “Initial Angular Momentum and Flow in High Energy Nuclear Collisions,” [arXiv:1705.10779 \[nucl-th\]](#).
- [155] J. M. Marti and E. Müller, “Numerical hydrodynamics in special relativity,” *Living Rev. Rel.* **2**, 3 (1999). [astro-ph/9906333](#).
- [156] B. Van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method,” *J. Comput. Phys.* **32**, 101 (1979).
- [157] P. Colella and P. R. Woodward, “The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations,” *J. Comp. Phys.* **54**, 174 (1984).
- [158] J. M. Marti and E. Müller, “Extension of the Piecewise Parabolic Method to One-Dimensional Relativistic Hydrodynamics,” *J. Comp. Phys.* **123**, 1 (1996).
- [159] P. Colella and M. D. Sekora, “A limiter for PPM that preserves accuracy at smooth extrema,” *J. Comp. Phys.* **227**, 7069 (2008).
- [160] G. Strang, “On the Construction and Comparison of Difference Schemes,” *SIAM J. Numer. Anal.* **5**, 506 (1968).
- [161] R. J. LeVeque, “Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems,” Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [162] P. Colella, “Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws,” *J. Comp. Phys.* **87**, 171 (1990).

- [163] P. G. Drazin and W. H. Reid, “Hydrodynamic Stability,” Cambridge University Press, Cambridge (1981).
- [164] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders, and P. Steinberg, “Glauber modeling in high energy nuclear collisions,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57**, 205 (2007). nucl-ex/0701025.
- [165] Z. W. Lin, C. M. Ko, B. A. Li, B. Zhang, and S. Pal, “A Multi-phase transport model for relativistic heavy ion collisions,” *Phys. Rev. C* **72**, 064901 (2005). nucl-th/0411110.
- [166] H.-J. Drescher and Y. Nara, “Effects of fluctuations on the initial eccentricity from the Color Glass Condensate in heavy ion collisions,” *Phys. Rev. C* **75**, 034905 (2007). nucl-th/0611017.
- [167] H. J. Drescher and Y. Nara, “Eccentricity fluctuations from the color glass condensate at RHIC and LHC,” *Phys. Rev. C* **76**, 041903 (2007). arXiv:0707.0249 [nucl-th].
- [168] B. Schenke, P. Tribedy, and R. Venugopalan, “Fluctuating Glasma initial conditions and flow in heavy ion collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 252301 (2012). arXiv:1202.6646 [nucl-th].
- [169] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], “Measurement of the distributions of event-by-event flow harmonics in lead-lead collisions at  $\sqrt{s} = 2.76$  TeV with the ATLAS detector at the LHC,” *JHEP* **1311**, 183 (2013). arXiv:1305.2942 [hep-ex].
- [170] W. Zhao, H. j. Xu, and H. Song, “Collective flow in 2.76 A TeV and 5.02 A TeV Pb+Pb collisions,” *Eur. Phys. J. C* **77**, 9, 645 (2017). arXiv:1703.10792 [nucl-th].
- [171] J. S. Moreland, J. E. Bernhard, and S. A. Bass, “Alternative ansatz to wounded nucleon and binary collision scaling in high-energy nuclear collisions,” *Phys. Rev. C* **92**, 011901 (2015). arXiv:1412.4708 [nucl-th].
- [172] W. Ke, J. S. Moreland, J. E. Bernhard, and S. A. Bass, “Constraints on rapidity-dependent initial conditions from charged particle pseudorapidity densities and two-particle correlations,” *Phys. Rev. C* **96**, 044912 (2017). arXiv:1610.08490 [nucl-th].
- [173] P. Bozek and W. Broniowski, “Collective dynamics in high-energy proton-nucleus collisions,” *Phys. Rev. C* **88**, 014903 (2013). arXiv:1304.3044 [nucl-th].
- [174] M. Bluhm, P. Alba, W. Alberico, A. Beraudo, and C. Ratti, “Lattice QCD-based equations of state at vanishing net-baryon density,” *Nucl. Phys. A* **929**, 157 (2014). arXiv:1306.6188 [hep-ph].
- [175] S. Weinberg, “Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe,” *The Astrophysical Journal* **168**, 175 (1971).
- [176] F. Cooper and G. Frye, “Single-particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production,” *Phys. Rev. D* **10**, 186 (1974).



- [177] P. Huovinen and H. Petersen, “Particlization in hybrid models,” *Eur. Phys. J. A* **48**, 171 (2012). arXiv:1206.3371 [nucl-th].
- [178] S. A. Bass, M. Belkacem, M. Bleicher, M. Brandstetter, L. Bravina, C. Ernst, L. Gerland, M. Hofmann, S. Hofmann, J. Konopka, G. Mao, L. Neise, S. Soff, C. Spieles, H. Weber, L. A. Winckelmann, H. Stocker, W. Greiner, Ch. Hartnack, J. Aichelin, and N. Amelin, “Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** (1998) 225.
- [179] M. Bleicher, E. Zabrodin, C. Spieles, S.A. Bass, C. Ernst, S. Soff, L. Bravina, M. Belkacem, H. Weber, H. Stocker, and W. Greiner “Relativistic Hadron-Hadron Collisions in the Ultra-Relativistic Quantum Molecular Dynamics Model,” *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **25** (1999) 1859.
- [180] A. Bilandzic, R. Snellings, and S. Voloshin, “Flow analysis with cumulants: Direct calculations,” *Phys. Rev. C* **83**, 044913 (2011). arXiv:1010.0233 [nucl-ex].
- [181] E. Abbas *et al.* [ALICE Collaboration], “Centrality dependence of the pseudorapidity density distribution for charged particles in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Phys. Lett. B* **726** (2013) 610. arXiv:1304.0347 [nucl-ex].
- [182] J. Adam *et al.* [ALICE Collaboration], “Centrality evolution of the charged-particle pseudorapidity density over a broad pseudorapidity range in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Phys. Lett. B* **754**, 373 (2016). arXiv:1509.07299 [nucl-ex].
- [183] S. Ryu, J.-F. Paquet, C. Shen, G. S. Denicol, B. Schenke, S. Jeon, and C. Gale, “Importance of the Bulk Viscosity of QCD in Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions,” *Phys. Rev. Lett.* **115**, 132301 (2015). arXiv:1502.01675 [nucl-th].
- [184] A. Monnai and T. Hirano, “Effects of Bulk Viscosity at Freezeout,” *Phys. Rev. C* **80**, 054906 (2009). arXiv:0903.4436 [nucl-th].
- [185] J. Adam *et al.* [ALICE Collaboration], “Pseudorapidity dependence of the anisotropic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV,” *Phys. Lett. B* **762**, 376 (2016). arXiv:1605.02035 [nucl-ex].