3 次元重力理論の因果律に関する解析

駒田　翔

平成 30 年 2 月 23 日

概 要

近年、一般相対性理論とは異なる重力理論が数多く提案されているが、それらをよりよく理解して検証するために、その重力理論の整合性を確認することは、最も重要な研究の一つである。特に、理論の整合性に関するすべての検証において、互いに矛盾なくそれらを満たすことが要求される。理論の unitarity や因果律はそのような性質の内の一つである。本論文では、この理論が持つべき因果律の性質について、New Massive Gravity 理論や Zwei-Dreibein Gravity 理論などの 3 次元重力理論がこの因果律の性質を満たしているかどうかを検証した。理論が持つべき因果律の定義はいくつか存在するが、本論文では shock wave 時空という重力理論の解において、重力場の Shapiro 遅延の効果で、時間が逆行しないという条件を定義にし、各々の理論でこの解を構成し、因果律が守られていることを示した。また単に因果律が守られているだけでなく、異なる別の整合性条件である unitarity の条件とも矛盾することなく両立可能であることを示した。本論文ではこれら二つの条件が同時に満たされることを見るために、まず理論の unitarity について概説し、New Massive Gravity 理論や Zwei-Dreibein Gravity 理論がそれらをどのように満たしているかを、各理論の導入とともに解説する。その後、本論文で用いる理論の因果律の定義について解説し、各理論がそれらを満たしているかを確認し、因果律と unitarity が両立して満たされていることを示す。

目 次

1 Introduction

重力とそれによって引き起こされる現象は、物理学の黎明期から中心的な研究分野の一つであり、多くの研究者による考察と研究が深められてきた対象である。そしてその試みは現在においても続いており、日夜新しい理論の提案や、観測データの詳細な分析が行われ、重力に関する新しい知見を得る努力が行われている。

重力を記述するための理論として現在最も支持されているものは 1915 年に Einstein によって提唱された一般相対性理論である。一般相対性理論は Newton 力学における重力理論を同じく Einstein が提唱した特殊相対性理論と整合するように拡張した理論である。この理論が人々のそれまでの重力に対する認識を大きく塗り替えただけにとどまらず、時空に関する概念を根本から変更したことは有名である。時空間は単に物体の入れ物として不変に存在するものではなく、それ自体が動的なものでありその中の物体と互いに影響しあいながら変化すること、重力はその結果として生じる時空の歪みであることが明らかにされ、初めてその時空のゆがみを記述する方程式が一般相対性理論の基礎方程式として与えられた。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

ここで、c、G、$g_{\mu\nu}$、$R_{\mu\nu}$、R、$T_{\mu\nu}$ はそれぞれ光速度、重力定数、計量、Ricci テンソル、スカラー曲率、エネルギー運動量テンソルである。現在 Einstein 方程式と呼称されているこの方程式は、その単純な見た目にも関わらず、非常に多彩な現象を内包しており、多くの特徴的な物理的予言を導く。例えば、水星の近日点移動、重力場中での時間の遅れ、重力によって光の軌道を曲げて変化させる重量レンズ効果、そして重力波の発生などが代表的である。また、一般相対性理論を基礎に置く現代の宇宙論では、宇宙は一様等方な時空として理解され、Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker 型の計量というものによってモデル化されている。この模型は宇宙そのものが動的にふるまい、現在存在する元素の合成や、銀河などの構造がどんな起源からどのようにして成長してきたかなどの宇宙の発展史について詳細な記述と予言を与える。そして最も重要な事実は、これらの効果はすべて観測によって検証され、一般相対性理論は今まで一度もその観測結果と精度の範囲内で齟齬を起こすことは無かったということである。このことは一般相対性理論が成立してから 100 年以上が経過した今日でさえ、この理論が最も精密で信頼できる理論であり、重力の現象を考察するうえで新しい理論を構築せねばならない差し迫った理由は何も存在しないことを意味している。

重力現象を取り巻く上記のような状況にも関わらず、重力に関する新しい理論の構築が多くの研究者によって試みられてきており、現在も進んでいる。これには理論的な理由と観測的な理由がそれぞれ存在し、しばしばそれらが混在している。

新しい重力理論が必要である理論的な理由は量子論である。1900 年代初頭に Planck、Einstein、de Broglie、Bohr らによる先駆的な研究の後、Heisenberg や Schrödinger によって定式化されたこの理論はミクロの世界を記述する基礎理論であり、特殊相対性理論や一般相対性理論とは違う形での Newton 力学の拡張になっている。これをさらに電磁場などの（特殊）相対論的な「場」についても適用できるような形にし、さらにミクロなスケールの素粒子の記述を行えるようにしたものが場の量子論である。現在の素粒子の振る舞い

や現象はすべてこの場の量子論で記述することができ、素粒子標準模型という形でまとめ上げられている。この理論の性質として繰り込み可能な理論であるという特徴がある。これは、場の量子論において必ず出現する短距離の発散を理論のパラメータや変数の再定義によって吸収できるという性質である。一度この繰り込みが行われれば、理論は任意のエネルギースケールで欲しい精度で物理量を計算できるようになる。一方の一般相対性理論もまた場の理論になっており、重力を量子論的に取り扱いたいならば場の量子論に則って取り扱う必要がる。しかしここで前述の標準模型との違いが現れる。一般相対性理論は、繰り込み可能ではない。この事実は、一般相対性理論が低エネルギーでの有効場理論 (Effective field theory) としてしか定義されず、必ずあるエネルギースケールにおいて破綻することを示唆する（しかも適切な条件を課すと massless spin2 の低エネルギー理論として、一般相対性理論が非線形に一意に定まる）[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]。従って、高エネルギー領域では必然的に一般相対性理論を補完する新しい理論が必要になる。現在そのもっとも有力な候補とみなされているのが超弦理論であり、活発に研究されている。

一方、新しい重力理論を提案する観測的な理由は、宇宙論における未解決の問題である。観測から現在の宇宙のエネルギー密度の 3 割程度が質量をもつ物質であるが、7 割は全く未知のエネルギー (dark energy の問題) であることがわかっている。また、3 割の物質の内訳についても、そのうちの大部分は現在の素粒子理論では説明できない物質が占めていると考えられている (dark matter の問題)。これらは、宇宙物理学において重要な役割を果たす。dark energy は現在の宇宙を加速膨張させる起源であり、また dark matter は現在の銀河や銀河団、大規模構造などの形成に重要な役割を果たすことが明らかになっている。これらのような重要な未知の存在を、新しい物理理論 (例えば標準模型を超える素粒子模型) によって正しく説明することは、宇宙物理学から現在の物理理論への課題となっている。そこで上記の問題を、(新しい物質などを導入するのではなく) 重力理論を一般相対性理論から変更することによって解決しようという考え方が存在する。上記の問題は一般相対性理論の破綻を直接示唆するものではないため、理論を変更することが必ずしも求められるわけではないが、考え得るアプローチの一つであり、多くの模型・理論が提唱されている。これらの理論を総称して修正重力理論という。修正重力理論は多くの場合、それ単体で定義されるが、しばしば超弦理論などの基礎的な理論から近似理論として導出されることもある。このときには、理論的な要求から考え出された理論を用いて宇宙物理の問題について考察をするため、両者の観点が混ざり合っている。

修正重力理論は、互いに異なる数多くの理論が提案されているが、そのことによる問題も存在する。たくさんの理論がある良い点は、問題解決法の候補が数多く存在するということなので、実際にその内のどれかで解決できる可能性が大きくなるということである。問題点は、理論の数が多すぎて他を棄却して一つに絞り込めないことである。当然、観測結果との比較による制限は古くから続けられてきており、一定の成果を上げている。中には完全に棄却された理論も存在する。しかしながら、一般的に修正重力理論は多数の任意パラメータを持ち、観測結果を用いてもこの内のいくつかに制限がつく形で生き残る。そして、同じ観測結果を説明する、互いに異なる区別のできない修正重力理論が何十、何百と残る。また修正重力理論は、ghost modes と呼ばれる異常な成分を持たないという制約があるが、それでもかなり多様な理論を作ることができ、関数自由度の任意性を持つものすら存在する。従って、有限個の観測結果のみから正確な理論の形をこれらのものから絞

り込むこと非常に困難である。

そこで、観測以外の方法で理論を制限する方法があれば有用である。そのようなものの一つに、理論が本当に整合的なものであるかを確認するという方法がある。上述の ghost modes を持たないという最低限の整合性条件以外の性質について調べ、理論に矛盾や奇妙な性質がないかを確認する方法である。考察すべき性質の例として以下のようなものが存在する。

- 摂動を超えて (非線形な意味で)ghost modes を持たないか [8]。
- 解が異常な性質を持たないか [9][10]。
- 良い性質が量子効果によって破壊されないか [11]。
- 有効場理論として正常なものか、適切な理論に補完できるか [12][13]。
- 因果律を破らないか [14][15][16][17]。

各々について説明する。一つ目について、上記の ghost modes が存在しない最低限の整合性条件は、理論をある背景（その理論の古典解）の周りで摂動展開し、その摂動の力学的自由度に ghost modes が含まれないという意味である。しかし、相互作用項を加えた理論では、線形の時には満たされて拘束条件が破れることにによって新しい自由度が出現することが知られている。この自由度はしばしば ghost になる。二つ目は、仮に理論を定義できてもその解が現実を記述し得ないことがあるというものである。例えば、Massive gravity という質量を持つ重力子の理論が存在し、その線形理論を定義することはできるが、その理論を用いて、地球や太陽の重力場を計算し、質量が 0 になる極限をとっても一般相対性理論と同じ結果にはならない。これは有質量粒子の理論と無質量粒子の力学自由度の違いからくるものである。この問題は非線形な効果を導入することで解消される可能性もある。三つめは、例えば ghost mode を避けるために理論のパラメータと調整する必要がある場合があるが、このパラメータの値が量子効果で補整されることで調整が破壊され、再び ghost が現れる状況を問題とするものである。四つ目は、理論を有効場の理論として考えたとき、それを与えるよりミクロな理論が正常なものであるかを問題にしている。例えば [12] では、DGP 模型 [18] という高次元時空中の brane から導出される重力理論を例に取り扱っている。この模型に含まれるある項の符号が負であることから、ミクロの理論が、通常の場の理論が持つべき性質、局所性、S 行列の解析性を持ちえないことが議論されている。

これらもまだ一部ではあるが、これらの重力理論としての種々の整合性の条件を満たせて初めて正しい理論の候補ということができる。

この博士論文では上の項目の内、重力理論の因果律について議論する。因果律とは、理論が時間の順序に関して矛盾を引き起こさないという性質である。重力理論において因果律はは様々な形で定義され、それぞれ異なる手法で解析されている。いくつか例を挙げると、伝播が光速度を超える成分の存在を調べるもの [19][12]、伝播する自由度の分散関係を調べて、そこから定義される位相速度が光速度を超えないか調べるもの [20][16][17]、波動が影響を及ぼし得る境界である特性曲面を調べるもの [21] などがある。

本論文で考察する因果律は、shock wave と呼ばれる時空の中で生じる、時間の遅れを用いて定義されて物を考察する [14][15]。このとき空上では強い重力場の局所的な衝撃波が生じていて、その付近では極端な Shapiro 時間遅延効果 [22] が発生している。一般相対性理論を含め正常な理論は、この効果では時間が遅れるだけなのだが、理論によっては、時間を逆方向に進める、つまり衝撃波の周りで時間を逆流させる場合がある。これは、過去に現在から干渉できることを意味し、因果律を破っている。[14] では、4 次元以上の一般相対性理論と高次曲率項による補正の理論が中心に調べられ、補整された理論が実際に因果律を破ることが示された。また、[15] では、いくつかの 3 次元の重力について同様の解析を行い、因果律の成否を議論している。本論文で考察するのは、上述の研究において、まだ考察されていない重力理論での同様の解析を行うことである。

そのような理論の一つに Zwei-Dreibein Gravity(ZDG) 理論 [23] というものがある。これは [15] において考察されている New Massive Gravity(NMG) 理論 [24] という 3 次元重力理論を拡張した理論である。ZDG 理論は NMG 理論の持つ問題を解消する候補であるが、因果律を含めた整合性を確認し、妥当な理論であるかを議論せねば本当に問題を解消できるかわわからない。そこで申請者は、上記の shock wave 時空を使う方法を用いて、この理論の因果律の成否を調べた。その結果、NMG 理論でも ZDG 理論でも因果律が保たれ、しかも異なる整合性の条件である unitarity の条件と、この因果律が保たれる条件がが互いに関係し、整合することを示した。

本論文は、以下のような構成になっている。まず、2 章から 4 章までにかけてそもそもなぜ NMG という低次元の重力理論を考えるのか、そしてなぜその拡張である ZDG が必要であるかをレビューを通して説明する。そして 5 章では、shock wave 時空を用いた因果律の解析の方法を説明して、NMG や ZDG に実際に適用してその成否を調べる。最後に結果をまとめて、今後の展望を述べる。

2 重力理論と Ghost modes

この章では、導入でも触れた重力理論の整合性条件の条件のひとつである、摂動的な ghost modes が存在しないという性質について解説する。本論文では、重力理論が Unitarity と因果律をいずれも満たす条件について考察する。従って、まずはその片方の条件である unitarity の条件について解説し、重力理論でどのようにその条件を確認するか、どのような理論がその条件を満たすかについて解説する。この性質の古典論的な意味は、理論において、任意の古典的な解を不安定にする自由度の不在を保証するものである。古典解が安定して存在しなければそれを考察することは、物理的に (少なくとも現実的には) 意味がない。また、量子論的には、理論が unitary である為の必要条件である。ghost modes の 1 粒子状態は負のノルムを持ち、通常の粒子との相互作用において、すべての事象が起きる確率の和が 1 にならない状況が発生し得る。従って、ghost modes の存在は量子論の破綻を意味する。

以上の様な理論を破綻させる ghost modes が存在するかどうかの解析を以下では、高階微分重力理論を例にとって解説する。高階微分重力理論を例にとる理由は 2 つある。 1 つ目は重力理論に限らず一般的に、高階の時間微分を含む理論は ghost mode を持つ危険性を持つため、具体例として理解しやすいためである。 2 つ目は本論文で取り扱う NMG 理論や ZDG 理論はこの高階微分重力理論の一種であるとみなせるためである。従って、NMG 理論や ZDG 理論を導入して解説するにあたって、どのような背景から考察されてきたかを最初に解説する必要があるので、高階微分重力理論一般の unitarity について解説する。

2.1 高階微分重力理論

高階微分重力理論を考察する理由は様々だが、導入で述べたように一般相対性理論は繰り込み不可能な理論であったので、それを克服するために高階微分の項が含まれる理論を考察するアプローチをとったものが最初のものである [25]。また、より現代的には一般相対性理論は低エネルギーの有効場理論であると考えられているので、その高エネルギー領域での補整項として高階微分項が考察される [7][6][5][4]。いずれにしても一般相対性理論を作用原理の形で定義しておくとわかりやすいので、まずそれを導入する。

一般相対性理論を記述するラグランジアン、Einstein-Hilbert 作用は以下の形で与えられる。

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2G}\int d^dx\sqrt{-g}R + S_{\text{matter}}. \tag{2.1}$$

ここで、g は計量テンソルの行列式 $g = \det g_{\mu\nu}$ である。また S_{matter} は物質部分の作用で、ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ の一般座標変換不変な積分

$$S_{\text{matter}} = \int d^dx\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{matter}} \tag{2.2}$$

で与えられる。ここから、エネルギー・運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm matter}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.3}$$

が定義される。この作用を変分すると

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = GT_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

を得るので、古典的にこの作用が Einstein 方程式と古典理論の範囲で等価であることがわかる。この作用を構成する際に指導原理として以下のものを用いる。

- 一般座標変換の下で不変 (曲率テンソルとその微分で書かれる)。
- 計量 $g_{\mu\nu}$ のみを変数として持つ。
- 作用は 2 階微分までを含む項で構成される。

上述の条件を保つ作用は $d = 4$ 次元においては、一意に Einstein-Hilbert 作用であることが証明されている。従って、微分項が少ない項のみが支配的な状況では、Einstein 理論が上記の条件の下で不可避となる。従って、Einstein 理論と異なる理論を考えたいとき、または、高階微分が重要になる領域では、上記のいずれかを破って理論を考える必要がある。例えば、計量以外の力学自由度を持つ理論の例に、スカラー・テンソル理論や bimetric 重力理論などが存在する。一般座標変換不変性を取り除いた理論は例えば重力子に質量を持たせた Massive Gravity 理論などが存在する。高階微分重力理論は名前の通り、この内 3 つ目のみを取り除いた理論として考察される。従って、作用が

$$\begin{aligned} S_{\text{higher derivative}} = \frac{1}{2G}\int d^dx\sqrt{-g}\Big[&\frac{1}{2G}R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \\ &+ \gamma R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} + ...\Big] \end{aligned} \tag{2.5}$$

となるような理論を考察する。+.... は 3 階以上の微分項を含む項の和である。α、β、γ は定数で、修正重力理論を考察するならば、任意パラメータとなり、一般相対性理論を低エネルギー有効場理論として考えるならば、その有効性が破れ、補整項または紫外完全化が必要なエネルギースケールを与える。以下、この作用を修正重力理論として考えた場合に、ghost modes が出現することを見る。

2.2 摂動的な Ghost modes

この節では、まず摂動的な ghost modes の定義を与え、4 階微分項を持つ重力理論はこの自由度を持つことを示す。

簡単のため、まずスカラーの理論を考察する。

$$S_{\rm scalar} = \int d^dx\Big[-\frac{\sigma}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\lambda m^2}{2}\Big]. \tag{2.6}$$

ここで、$\sigma, \lambda = \pm 1$ で、運動項と、質量項の符号を与える。この作用は、$\varphi = 0$ という古典解の周りで展開したスカラー理論の二次の項までをを取り出したものとみなせる。このときの解の成分の一つは、

$$\varphi \propto \exp\Big[-i\sqrt{\sigma \mathbf{k}^2 + \lambda m^2} t \Big] \tag{2.7}$$

となる。従って、$\sigma = -1$ かあるいは $\lambda = -1$ の場合、根号の中身が負となり、解が指数関数的に大きくなる。従って、古典的な背景周りの摂動といいう描像を適用することはできない。このとき運動項の符号が負のもの $\sigma = -1$ を ghost といい、質量項が負のもの $\lambda = -1$ を tachyon という。

また、この作用のハミルトニアンは、

$$H = \int d^d x \Big[-\frac{\sigma}{2}(-\pi^2 + \partial_i \varphi \partial^i \varphi) + \frac{\lambda m^2}{2} \Big], \tag{2.8}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\varphi}} \tag{2.9}$$

となる。$\sigma = -1$ かあるいは $\lambda = -1$ の場合、このハミルトニアンは、下に有界でないことが見て取れる。従って、エネルギー固有状態 $|E\rangle$ に対し、

$$\langle E|H|E\rangle = E\langle E|E\rangle > 0 \tag{2.10}$$

となるので、$E < 0$ の場合には、負ノルムエネルギー状態が生じてしまう。これは、状態が持つべき正定値性を壊し、他の通常のノルムを持つエネルギー状態との重ね合わせ状態を考えると、その状態ノルムが不定になり、確率解釈が破綻する。エネルギー状態が下に有界でないのは、tachyon の場合は、ポテンシャル項の局所部分しか見ていないことが原因の場合も考え得るため、すべての項を考慮すれば下に有界である可能性がある。しかし、ghost については、他の項がどのようであれ、この負ノルムの出現を避けることができない。したがって ghost mode の出現は、必然的に量子論を破綻させる。

以上を簡単に見れたが、少し異なる方法で見ることもできる。今、スカラー場に仮想的なソース J が存在し、

$$A = \int d^d x J\phi \tag{2.11}$$

と結合しているとする。このとき運動方程式は、

$$(\sigma \partial^2 + \lambda m^2)\phi = J \tag{2.12}$$

となる。これを Green 関数 $(\sigma \partial^2 + \lambda m^2)^{-1}$ を用いて形式的に解いたとすると

$$\phi = (\sigma \partial^2 + \lambda m^2)^{-1} J. \tag{2.13}$$

これを元の (2.11) に戻すと

$$A = \int d^d x J'(\sigma \partial^2 + \lambda m^2)^{-1} J \tag{2.14}$$

となり、ソースが ϕ を交換するきのプロパゲーターの極の構造や、その符号としてみることもできる。上述したように、この符号の内一つでも負ならば、この項は amplitude に負の寄与を与える有質量粒子が存在することを意味する。従って、ghost が存在するかどうかはこの形のプロパゲーターの符号を見ても判断ができる。

さて、重力理論の場合に ghost が含まれないかを考察する。まずは Einstein 重力理論で考える。考え得る背景、古典解は様々なものが考えられるが、Minkowski 空間で考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

この解の周りで摂動をとり、作用を変数の二次まで展開する。摂動の変数を $h_{\mu\nu}$ として、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{2G}h_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

を (2.1) に代入してこれを実行すると、線形化された Einstein-Hilbert 作用

$$S_{\text{linear EH}} = \int d^D x - \frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\lambda h \partial^\lambda h \tag{2.17}$$

を得る。部分積分して、

$$S_{\text{linear EH}} = \int d^d x \Big[\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}h_{\mu\nu})\Big] \tag{2.18}$$

となる。ここで、$\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ は微分作用素で、

$$\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Box h_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha|}\partial_\lambda h^\lambda_{|\beta)} + \partial_\alpha\partial_\beta h - \eta_{\alpha\beta}(\Box h - \partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho})) \tag{2.19}$$

で定義される。この作用は、線形化された一般座標変換をゲージ自由度として持つ。

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu. \tag{2.20}$$

従って、ゲージを固定して運動項の符号を見るとがわかりやすい。transverse traceless ゲージ $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0,\ h = 0$ をとると、

$$S_{\text{linear EH}} = \int d^d x \Big[\frac{1}{4}h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu}\Big] \tag{2.21}$$

となる。部分積分して整頓すると、時間微分項の前の符号は正になり、この作用には、ghost modes が含まれていないことがわかる。従って、一般の次元で Einstein 重力理論は、ghost でない massless modes のみを次元に応じた数持つ理論であるとわかった。

Einstein 重力理論において ghost modes が含まれないことは確認できたが、高階微分が含まれる重力理論ではどうなるかを見てみる。次の 4 階微分まで含んだ理論を考えてみる。

$$S_{\text{quadra}} = \int d^d x \sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2G}R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma(R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2)\Big]. \tag{2.22}$$

ここで、$R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}-4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R^2$ はGauss-Bonnet項といい、4次元の理論では積分が位相不変量となり、局所的な力学に寄与しないので恒等的に0と置く。また、平坦な時空の周りでの、二次までの展開では寄与しない項である。これを同様に(2.16)を用いて作用を $h_{\mu\nu}$ の二次まで展開して、同様にしてtransverseゲージをとり、トレースのない成分の書くと

$$S_{\text{linear quadra}}=-\int d^dx\frac{1}{2}\Big[h_{\mu\nu}(2G\beta\Box^2-\Box)h^{\mu\nu}\Big] \tag{2.23}$$

となる。このままでは、どのような成分が含まれているかわかりにくいので、補助場 $f_{\mu\nu}=\Box h_{\mu\nu}$ を導入して書き直すと

$$S_{\text{linear quadra}}=\int d^dx\Big[\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu}-f_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu}-\frac{1}{4G\beta}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}\Big] \tag{2.24}$$

となる。これを変数変換 $h_{\mu\nu}=\tilde{h}_{\mu\nu}-f_{\mu\nu}$ で対角化して

$$S_{\text{linear quadra}}=\int d^dx\Big[\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}f_{\mu\nu}\Box f^{\mu\nu}-\frac{1}{4G\beta}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}\Big] \tag{2.25}$$

となる。ここで $h_{\mu\nu}$ の運動項の前の符号は正だが、$f_{\mu\nu}$ の運動項の前の符号は負である。従って、この理論はghostを持つ。これは、β が0でないことが原因である。実際 $\beta\to 0$ の極限で $f_{\mu\nu}$ の質量項が発散するので、この成分は励起できず、問題にならなくなる。したがって $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ という形の項を持ち、それがGauss-Bonnet項で消えない4階分微分の重力理論は必ず平坦な時空の周りで必ずmassive spin 2 particleのghostを持つ。

ghostの存在は曲がった時空間上の摂動においても問題となる。完全に一般の時空上の場合での考察は困難だが、de Sitter空間やAnti de Sitter(AdS)空間などの対称性が高い空間の上では可能である。ここでは[26]の内容をもとに曲がった時空上での4階微分重力理論のghostの解析をレビューする。宇宙項を加えた、次の作用を考える。

$$\begin{aligned}S_{\text{quadra}}=\int d^dx\sqrt{-g}\Big[&\frac{1}{2G}R+\frac{\Lambda_0}{2G}+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\\&+\gamma(R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}-4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R^2)\Big].\end{aligned} \tag{2.26}$$

これを変分して方程式を出すと以下のようになる。

$$\begin{aligned}&\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda_0 g_{\mu\nu}\right)+2\alpha R\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\right)+(2\alpha+\beta)\left(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\right)R\\&+2\gamma\left[RR_{\mu\nu}-2R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho}+R_{\mu\sigma\rho\tau}R_\nu{}^{\sigma\rho\tau}-2R_{\mu\sigma}R_\nu{}^\sigma-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\left(R^2_{\tau\lambda\sigma\rho}-4R^2_{\sigma\rho}+R^2\right)\right]\\&+\beta\Box\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)+2\beta\left(R_{\mu\sigma\nu\rho}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho}\right)R^{\sigma\rho}=GT_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

摂動をとるための背景として、極大対象空間

$$\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma}=\frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)}\left(\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}_{\rho\sigma}-\bar{g}_{\mu\sigma}\bar{g}_{\nu\rho}\right),\ \bar{R}_{\mu\nu}=\frac{2\Lambda}{d-2}\bar{g}_{\mu\nu},\ \bar{R}=\frac{2d\Lambda}{d-2} \tag{2.28}$$

をとる。ここで $\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma}$ などのバー付きの量は (anti-)de Sitter 時空の計量 $\bar{g}_{\mu\nu}^{(A)dS}$ で定義された曲率テンソルである。これを方程式 (2.27) に代入して、理論のパラメータ背景の持つ宇宙項との関係を得る。

$$\frac{\Lambda-\Lambda_0}{2\kappa}+\frac{d-4}{d-2}\left[\frac{(d\alpha+\beta)}{d-2}+\gamma\frac{d-3}{d-1}\right]\Lambda^2=0. \tag{2.29}$$

従って、

$$\Lambda=-\frac{1}{4\kappa f}\left[1\pm\sqrt{1+8\kappa f\Lambda_0}\right], \tag{2.30}$$

$$f\equiv(\alpha d+\beta)\frac{(d-4)}{(d-2)^2}+\gamma\frac{(d-3)(d-4)}{(d-1)(d-2)} \tag{2.31}$$

となる。ここでいくつかのことが観察できる。例えば、(2.29) を見ると、$d=4$ のときは、パラメータの値によらず $\Lambda=\Lambda_0$ となっている。$d=3$ のときは、大括弧の片方の項が消え、$d\alpha+\beta=0$ とパラメータを選んで $\Lambda=\Lambda_0$ とできる（但し、実際にはこのとき理論は整合的でなく ghost が出る)。

摂動をとって線形化した方程式を見る。

$$g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+\sqrt{2G}h_{\mu\nu}. \tag{2.32}$$

方程式 (2.27) に代入すると

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}^L_{\mu\nu}+(2\alpha+\beta)\left(\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\Box}-\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu+\frac{2\Lambda}{D-2}\bar{g}_{\mu\nu}\right)R^L\\&\qquad+\beta\left(\bar{\Box}\mathcal{G}^L_{\mu\nu}-\frac{2\Lambda}{D-1}\bar{g}_{\mu\nu}R^L\right)+\frac{M^2}{2\kappa}\left(h_{\mu\nu}-\bar{g}_{\mu\nu}h\right)\\&=G_{eff}T_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.33}$$

となる。ここで、$\mathcal{G}^L_{\mu\nu}$、$R^L_{\mu\nu}$、R^L は、線形化したテンソルで

$$\mathcal{G}^L_{\mu\nu}=R^L_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^L-\frac{2\Lambda}{d-2}h_{\mu\nu}, \tag{2.34}$$

$$R^L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}^\sigma\bar{\nabla}_\mu h_{\nu\sigma}+\bar{\nabla}^\sigma\bar{\nabla}_\nu h_{\mu\sigma}-\bar{\Box}h_{\mu\nu}-\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu h\right), \tag{2.35}$$

$$R^L=-\bar{\Box}h+\bar{\nabla}^\sigma\bar{\nabla}^\mu h_{\sigma\mu}-\frac{2\Lambda}{d-2}h \tag{2.36}$$

で与えられる。ただし $\bar{\nabla}_\mu$ は $\bar{g}_{\mu\nu}$ を用いた共変微分であり、$\bar{\Box}=\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\mu$ である。また、有効的な重力定数 G_{eff} は

$$\frac{1}{2G_{eff}}\equiv\frac{1}{2G}+\frac{4\Lambda d}{d-2}\alpha+\frac{4\Lambda}{d-1}\beta+\frac{4\Lambda(d-3)(d-4)}{(d-1)(d-2)}\gamma \tag{2.37}$$

で定義されている。式 (2.33) のトレースをとって、

$$\left[(4\alpha(d-1)+d\beta)\bar{\Box}-(d-2)\left(\frac{1}{\kappa}+4f\Lambda\right)\right]R^L=2T \tag{2.38}$$

を得る。平坦な時空の場合と違い、トレース成分にも非自明な解が存在する。これは、この理論にスカラー成分が存在していることを意味する。ただ、$4\alpha(d-1)+d\beta=0$ の時には微分演算子の項が消え、スカラー成分は伝播しなくなる。特に、$d=3$ のときに、$8\alpha+3\beta=0$ を満たせば、スカラー成分は消える。

これらを解いて、各成分の振る舞いを見る。まず、$h_{\mu\nu}$ を次のように分ける。

$$h_{\mu\nu} \equiv h^{TT}_{\mu\nu} + \bar{\nabla}_{(\mu}V_{\nu)} + \bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\phi + \bar{g}_{\mu\nu}\psi. \tag{2.39}$$

ここで、$h^{TT}_{\mu\nu}$ は transverse traceless modes である。平坦な場合はここのみ考察すればよかった。また、$\bar{\nabla}_{\mu}V^{\mu}=0$。トレース成分は、

$$h = \bar{\Box}\phi + d\psi,\ \bar{\Box}h = \bar{\Box}^2\phi + \frac{2\Lambda}{(d-2)}\bar{\Box}\phi + \bar{\Box}\psi \tag{2.40}$$

となる。これと (2.38) より ψ について解ける。

$$\psi = \left\{\frac{\Lambda}{\kappa} + 4\Lambda f - c\Lambda\bar{\Box}\right\}^{-1}\left(\frac{(d-1)(d-2)}{2\Lambda}\bar{\Box} + d\right)^{-1} T. \tag{2.41}$$

ここで、 $c \equiv \frac{4(d-1)\alpha}{d-2} + \frac{d\beta}{d-2}$ である。次に、以下のような演算子 $\triangle^{(2)}_L$ を定義する。

$$\triangle^{(2)}_L h_{\mu\nu} = -\bar{\Box}h_{\mu\nu} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma}h^{\rho\sigma} + 2\bar{R}^{\rho}{}_{(\mu}h_{\nu)\rho}. \tag{2.42}$$

演算子 $\triangle^{(2)}_L$ は次を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned}\triangle^{(2)}_L\nabla_{(\mu}V_{\nu)} &= \nabla_{(\mu}\triangle^{(1)}_L V_{\nu)},\quad \triangle^{(1)}_L V_{\mu} = (-\Box+\Lambda)V_{\mu},\quad \nabla^{\mu}\triangle^{(2)}_L h_{\mu\nu} = \triangle^{(1)}_L\nabla^{\mu}h_{\mu\nu},\\ \triangle^{(2)}_L g_{\mu\nu}\phi &= g_{\mu\nu}\triangle^{(0)}_L\phi,\quad \triangle^{(0)}_L\phi = -\Box\phi,\quad \nabla^{\mu}\triangle^{(1)}_L V_{\mu} = \triangle^{(0)}_L\nabla^{\mu}V_{\mu}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

これを、$\mathcal{G}^L_{\mu\nu}$ に適用して

$$\mathcal{G}^{LTT}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\triangle^{(2)}_L h^{TT}_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{(d-2)}h^{TT}_{\mu\nu} \tag{2.44}$$

を得る。式 (2.33) から transverse traceless 部分を取り出して解くと

$$h^{TT}_{\mu\nu} = 2\left\{(\beta\bar{\Box} + \frac{1}{2G})(\triangle^{(2)}_L - \frac{4\Lambda}{d-2})\right\}^{-1} T^{TT}_{\mu\nu} \tag{2.45}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}T^{TT}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\bar{g}_{\mu\nu}}{D-1}T \quad &+ \quad \frac{1}{D-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu} + \frac{2\Lambda\bar{g}_{\mu\nu}}{(D-1)(D-2)}\right)\\ &\times \quad \left(\bar{\Box} + \frac{2\Lambda D}{(D-1)(D-2)}\right)^{-1} T\end{aligned} \tag{2.46}$$

である。従って、

$$A = \frac{1}{4}\int d^dx\,\sqrt{-\bar{g}}T'_{\mu\nu}(x)\,h^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4}\int d^dx\,\sqrt{-\bar{g}}\left(T'_{\mu\nu}h^{TT\mu\nu} + T'\psi\right) \tag{2.47}$$

より、プロパゲーターの構造は

$$\begin{aligned} 4A &= 2T'_{\mu\nu}\left\{(\beta\bar{\Box}+\frac{1}{G_{eff}})(\triangle_L^{(2)}-\frac{4\Lambda}{\mathrm{d}\ -2})\right\}^{-1}T^{\mu\nu} \\ &+ \frac{2}{d-1}T'\left\{(\beta\bar{\Box}+\frac{1}{G_{eff}})(\bar{\Box}+\frac{4\Lambda}{d-2})\right\}^{-1}T \\ &- \frac{4\Lambda}{(d-2)(d-1)^2}T'\left\{(\beta\bar{\Box}+\frac{1}{G_{eff}})(\bar{\Box}+\frac{4\Lambda}{d-2})\right\}^{-1}\left\{\bar{\Box}+\frac{2\Lambda d}{(d-2)(d-1)}\right\}^{-1}T \\ &+ \frac{2}{(d-2)(d-1)}T'\left\{\frac{1}{\frac{1}{2G}}+4\Lambda f-c\bar{\Box}\right\}^{-1}\left\{\bar{\Box}+\frac{2\Lambda d}{(d-2)(d-1)}\right\}^{-1}T \end{aligned} \tag{2.48}$$

となる。ここで重要なのは、異なる極の寄与が、積になって入っているということである。例えば第 1 項の

$$\left\{(\beta\bar{\Box}+\frac{1}{G_{eff}})(\triangle_L^{(2)}-\frac{4\Lambda}{D-2})\right\}^{-1} \tag{2.49}$$

は、積の形で入っているが、これを 2 つのプロパゲーターに分数分解すると、分子に微分演算子はないため、必ず一方が負にならねばならない。したがって、必ずいずれかが ghost となる。$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \Lambda\to 0$ の極限をとると、

$$4A \ = \ 2T'_{\mu\nu}\left\{\frac{1}{2G}\partial^2\right\}^{-1}T^{\mu\nu}+\frac{2}{d-2}T'\left\{\frac{1}{2G}\partial^2\right\}^{-1}T \tag{2.50}$$

となり、平坦時空での Einstein 理論を再現するため、対応する極を正符号にとると積になっていた massive spin2 modes の極は必ず負になり、ghost 極となる。また、$(\beta\bar{\Box}+\frac{1}{G_{eff}})$ は、スカラーの極 $(\bar{\Box}+\frac{4\Lambda}{d-2})$ とも積になっているので、こちらとも符号が合わない。

従って、結局

- massless spin2 正常な modes
- massive spin2 の ghost modes
- massive spin 0 の正常な mode

が存在することになる。平坦時空での massless spin2 modes の正常性を仮定する限り、必ず ghost が出現することを示した。

原理的に高階微分項を 4 階で止める理由はないので、さらに多くの項を含んだ理論を考察することは可能である。しかしながら、それによって 4 階の項から出現した ghost を消すことは一般にはできず、より多くの massive ghost modes が出現することになる。結局のところ高階微分重力理論に含まれる massive spin2 modes は必ず ghost になってしまう。しかしながら、これには一つだけ例外がある。それが 3 次元における重力理論である。

2.3 3次元重力理論

3次元時空は特殊な性質を持つ時空である。この次元ではワイルテンソル

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\mu\nu\rho\lambda} - \frac{2}{d-2}(R_{\mu[\rho}g_{\lambda]\nu} - R_{\nu[\rho}g_{\lambda]\mu}) + \frac{2}{(d-1)(d-2)}R(g_{\mu[\rho}g_{\lambda]\nu} - g_{\nu[\rho}g_{\lambda]\mu}) \quad (2.51)$$

が0になるからである。ワイルテンソルが0になるということは、リーマン曲率テンソルがリッチ曲率テンソルから完全に決定されるということである。この事実は直接示せるが、これらテンソルの代数的な対称性から求まる独立な成分の数を数えても了解される。Rimman テンソルと Ricci テンソルの d 次元における独立成分の数はそれぞれ、

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} : \frac{d^2(d^2-1)}{12}, \quad R_{\mu\nu} : \frac{d(d+1)}{2} \quad (2.52)$$

である。これは $d=3$ のとき等しくなる。従って Ricci テンソルを決めれば Riemann テンソルはもはや独立な成分を持たないのである。これは、Einstein 方程式を $R_{\mu\nu}$ について代数的に解くと時空にはそれ以上の自由度は残らないということである。言い換えると、3次元時空では局所的なダイナミクスが存在せず重力波も伝播しない。従って今まで解析してきた massless の graviton modes も存在しないのである。

このことは、力学変数 $g_{\mu\nu}$ の自由度を直接数えることからも了解できる。ある背景時空からの摂動 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}$ を考え、その内ゲージ対称性（冗長性）や拘束条件によって消えずに残る自由度の数を数えればよい。$h_{\mu\nu}$ は対称テンソルなので、時空次元を d とすると素朴には $\frac{d(d+1)}{2}$ 成分存在することになる。一方、3次元の一般相対性理論（Einstein 重力理論）においてはゲージ対称性

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \quad (2.53)$$

が存在する。これにより $2d$ 自由度が消えるので、残る自由度は $\frac{d(d+1)}{2} - 2d$ となり、$d=3$ のときこれは0になる。

ここで後の便宜のために、このことを詳しく示しておく。簡単のために Minkowski 時空 $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 周りの摂動を考える。二次まで展開した作用は、

$$S = \int d^dx - \frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\lambda h\partial^\lambda h \quad (2.54)$$

であった。ここから自由度の数を数えるために正準形式をとる。まず共役運動量を定義する必要があるが、この定義には任意性がある。時間に関して部分積分を実行すれば、どの力学変数を変分するかが変わるからである。そこでここでは、h_{00} と h_{0i} から全ての時間微分を部分積分によって取り除いたものを変分して共役運動量を定義する。これは恣意的に見えるが、h_{00} と h_{0i} には、二つ以上時間微分がつく項は作用に出こない。従ってその変分から現れるのは運動方程式ではなく拘束条件である。そこで、初めから時間微分を外しておいて、、h_{00} と h_{0i} を拘束条件の Lagrange multiplier（拘束条件の式に線形に掛けられておりその変分で拘束条件が現れることがようにわかる項）として扱うことを目的にしている。従って共役運動量は h_{ij} に対してのみ定義する。共役運動量は、

$$\pi_{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}^{ij}} = \dot{h}_{ij} - \dot{h}^k_k\delta_{ij} - 2\partial_{(i}h_{j)0} + 2\partial^k h_{0k}\delta_{ij} \quad (2.55)$$

となる。これを逆解きして、

$$\dot{h}_{ij} = \pi_{ij} - \frac{1}{d-2}\pi^k_k \delta_{ij} + 2\partial_{(i}h_{j)0} \tag{2.56}$$

を得る。これを、元の作用に代入すると、

$$S = \int d^d x\ \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{H} + 2h_{0i}\left(\partial^j \pi^i_j\right) + h_{00}\left(\vec{\nabla}^2 h^i_i - \partial^i\partial^j h_{ij}\right) \tag{2.57}$$

となる。ここで、$\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = &\frac{1}{2}\pi^2_{ij} - \frac{1}{2}\frac{1}{d-2}\pi^2_{ii} \\ &+ \frac{1}{2}\partial^k h^{ij}\partial_k h_{ij} - \partial^i h^{jk}\partial_j h_{ik} + \partial^i h_{ij}\partial^j h^k_k - \frac{1}{2}\partial^i h^j_j \partial_i h^k_k\end{aligned} \tag{2.58}$$

となる。上述したように、h_{00} と h_{0i} は、Lagrange multiplier となっており、拘束条件 $\partial^i \pi_{ij} = 0$ および $\vec{\nabla}^2 h^i_i - \partial^i\partial^j h_{ij} = 0$ を導く。これら拘束条件は、互いに Poisson 括弧が交換するという意味で第 1 類である。従って、その数だけ、Lagrange multiplier を持つ Hamiltonian の時間発展に任意性が存在する。ゲージ固定を行うなどしてさらにこの数だけ力学自由度の数が減る。結局、力学自由度の数は、h_{ij} と π_{ij} の $d(d-1)$ 個から、拘束条件 d 個、生成されたゲージ d 個より、$d(d-3)$ 個となる。これは正準形式なので、Lagrange 形式での自由度しては $\frac{d(d-3)}{2}$ となる。こうして $d=3$ で自由度がなくなることを直接確認できた。結局、３次元において重力波の揺らぎ（massless spin 2 modes）はゲージ変換（あるいは時空の一般座標変換）によって消えてしまうもののみであるということである。

これは高階微分重力理論を考える立場からは朗報である。なぜならば、今までの解析で明らかになったのは、massless spin2 modes と massive spin2 mode は互いに共存しえないということだったからである。もし初めから massless spin2 modes が存在しないのであれば、massive spin2 mode を正常な符号になるようにとって、存在しない自由度に ghost を押し付けることができるかも知れない。問題は、スカラー自由度の存在である。この自由度は massless spin2 modes と符号が同じになるため、もしこの自由度を消せなければこの自由度が結局 ghost として残ってしまうからである。しかしこの自由度は取り除くことができる。摂動の式のトレース成分式 (2.38) を再掲すると

$$\left[(4\alpha(d-1) + d\beta)\,\bar{\Box} - (d-2)\left(\frac{1}{\kappa} + 4f\Lambda\right)\right] R^L = 2T \tag{2.59}$$

であったが、この方程式に従うのがそのスカラー成分だからである。上述したように 3 次元において、$8\alpha + 3\beta = 0$ の関係を満たせば、微分項は消え、スカラー成分は伝播しなくなる。このようにして唯一 3 次元において整合的な 4 階微分重力理論を構築することができ、それが今日 New Massive Gravity(NMG) 理論 [24] と呼ばれているものである。この理論は平坦な時空周りでの摂動的な安定性のほか (A)dS 上でも整合的に定義できることが知られているが、それだけにとどまらない興味深い性質がある。以下ではその性質をより詳しく述べていく。

3 New Massive Gravity 理論

前節までの解説のように、高微分重力理論は 3 次元時空でのみ ghost をもたず正しく定義される。この理論は当初、平坦な時空からの摂動が安定な理論として提案されたが [24]、その後に極大対称空間からの摂動も整合的に定義できることが明らかになった [27]。しかし、この理論の驚くべき所は、最初から完全に非線形な形で定義されていることである。これは自明なことではない。例えば、この理論は massive spin2 重力子の理論なのだが、その線形理論が初めて提唱されたのは 1939 年の Fierz と Pauli[28] によるものである。しかしそれ非線形な理論に整合的に拡張することができたのは、de Rham らによる 2010 年の仕事 [29] によるものであった。

このように非線形な理論を得ることが難しい理由の一つに非線形な ghost mode が存在しうるという問題がある [8]。これは Boulware と Deser によって発見された問題で、仮に摂動的に安定なり理論であっても、非線形拡張をした時にはまた新しく不安定な modes が現れることがあるという問題である（Boulware Deser (BD) ghost の問題）。このようなことが起きる理由は、massless spin2 粒子の理論が持っている対称性を massive spin2 の理論が持っていないことによる。前節 2.3 で見た様に、対称性がある場合は不安定成分を消すための拘束条件が自動的に出てくるのに対し、それがない場合は手で置いた相互作用が拘束条件を破らないかを常に気に掛ける必要があるからである。

NMG 理論の驚くべき性質は、この非線形な ghost も存在しないことが保証されていることである [30]。この章では NMG 理論が ghost を持たず、整合的であるという事実を示し、その基本的な性質についてレビューする。この章の内容は主に [24]、[27]、[30]、[31] による。

3.1 Fierz-Pauli 理論

NMG 理論は高階微分重力理論であるが、同時に massive spin 2 粒子の非自明な相互作用を持った理論であるとみなすこともできる。そこでこの小節では NMG 理論を導入する前に、massive spin 2 粒子の自由場の理論である Fierz-Pauli 理論について解説する。この理論は 5 つの力学自由度を持ち、massive spin 2 粒子の自由場理論として唯一整合的な理論であることを見る。

対称テンソル $h_{\mu\nu}$ について、微分を二つまで含み、質量項を持つ作用として最も一般的な形は以下の形である。

$$S_{\text{free massive}} = \int d^dx \Big[-\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\lambda h \partial^\lambda h \\ - \frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - Ah^2)\Big]. \tag{3.1}$$

ここで m が質量パラメータ、A は二つの質量項の比を表す無次元パラメータである。前半は massless spin 2 粒子の理論と同じ線形 Einstein-Hilbert 作用であり、後半の $-\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - Ah^2)$ が質量項である。ここで $A = 1$ でなくては、ghost になり得る危険な自由度が存在し、整合的な理論にならないことを見る。まず、$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_{(\mu}\chi_{\nu)}$ を作用に代入すると、

Einstein-Hilbert 作用の部分は不変で、質量項部分が

$$-\frac{1}{2}m^2\left((h_{\mu\nu}+2\partial_{(\mu}\chi_{\nu)})^2-A(h+2\partial_\alpha\chi^\alpha)^2\right) \tag{3.2}$$

となる。この作用は自由度が増えたように見えるが、新しく対称性

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h_{\mu\nu}+\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}, & (3.3)\\ \chi_\mu &\rightarrow \chi_\mu-\frac{1}{2}\xi_\mu & (3.4)\end{aligned}$$

を持つ等価な作用である。これは χ_μ についての運動項

$$-\frac{1}{2}m^2\left((\partial_\mu\chi_\nu)^2-A(\partial_\alpha\chi^\alpha)^2\right) \tag{3.5}$$

を出現させる。ここからさらに $\chi_\mu\rightarrow\chi_\mu+\partial_\mu\chi$ と置き換えてさらに成分を分離すると、χ についての作用

$$(1-A)\partial_\mu\partial_\nu\chi\partial^\mu\partial^\nu\chi=(1-A)(\Box\chi)^2 \tag{3.6}$$

が出現する。ここで、高階微分項 $(\Box\chi)^2$ が出現していることに注意する。これにより前の章で行ったのと同様に、高階微分項から現れる ghost が存在する。唯一この ghost を消すことができるパラメータの取り方は $A=1$ である。こうとることで高階微分の項は消え、縦波成分 χ も出現しなくなる。

こうして、massive spin 2 粒子の自由場の理論として一意的な作用

$$\begin{aligned} S_{\text{free massive}}=\int d^dx\Big[&-\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu}+\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda}-\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h+\frac{1}{2}\partial_\lambda h\partial^\lambda h\\ &-\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}-h^2)\Big] \end{aligned} \tag{3.7}$$

を得た。この理論がいくつ自由度を持っているかを massless の場合に倣って確認しておく、まず同様に平準形式をとると

$$S=\int d^dx\ \pi^{ij}\dot{h}_{ij}-\mathcal{H}+2h_{0i}\left(\partial^j\pi^i_j\right)+m^2h_{01}^2+h_{00}\left(\vec{\nabla}^2h^i_i-\partial^i\partial^jh_{ij}-m^2h^i_i\right) \tag{3.8}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}=&\frac{1}{2}\pi_{ij}^2-\frac{1}{2}\frac{1}{d-2}\pi_{ii}^2\\ &+\frac{1}{2}\partial^kh^{ij}\partial_kh_{ij}-\partial^ih^{jk}\partial_jh_{ik}+\partial^ih_{ij}\partial^jh^k_k-\frac{1}{2}\partial^ih^j_j\partial_ih^k_k+\frac{1}{2}m^2(h^{ij}h_{ij}-(h^i_i)^2)\end{aligned} \tag{3.9}$$

である。

まず massless の時と異なるのは、h_{0i} はもはや Lagrange multiplier ではないということである。h_{0i} についての変分はこれを決定する方程式になり、

$$h_{0i}=-\frac{1}{m^2}\partial^j\pi_{ij} \tag{3.10}$$

となる。これを再度作用に代入すると

$$S = \int d^d x \; \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{H} + h_{00} \left(\vec{\nabla}^2 h^i_i - \partial^i \partial^j h_{ij} - m^2 h^i_i \right) \tag{3.11}$$

及び、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_{ij}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{d-2}(\pi^i_i)^2 + \frac{1}{2}\partial^k h^{ij} \partial_k h_{ij} - \partial^i h^{jk} \partial_j h_{ik} + \partial^i h_{ij} \partial^j h^k_k - \frac{1}{2}\partial^i h^j_j \partial_i h^k_k \\ + \frac{1}{2} m^2 (h^{ij} h_{ij} - (h^i_i)^2) + \frac{1}{m^2} \left(\partial^j \pi_{ij} \right)^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

を得る。

h_{00} は依然 Lagrange multiplier であり、拘束条件

$$\mathcal{C} = -\vec{\nabla}^2 h^i_i + \partial^i \partial^j h_{ij} + m^2 h^i_i = 0 \tag{3.13}$$

を導く。しかしながら、この拘束条件は $\mathcal{H}$ とは可換でなく、新しい拘束条件

$$\{H, \mathcal{C}\}_{\mathrm{PB}} = \frac{1}{d-2} m^2 \pi^i_i + \partial^i \partial^j \pi_{ij} \tag{3.14}$$

を生成する。これらは、互いに交換しないという意味で第二類である。従って、自由度を減らす要素はこれで全てである。自由度は $\frac{d(d-1)-2}{2}$ であり、$d = 4$ のとき 5 で、$d = 3$ のとき 2 である。

この解析から今や (3.8) において $A = 1$ でなければならなかった理由は明らかである。もしそうでなければ作用は h_{00} でさえ Lagrange multiplier でなく、拘束条件がより少なくなるからである。そしてその拘束されなかった成分が ghost modeχ として出現していたのである。

3.2 New Massive Gravity

この小節では NMG 理論の基礎的部分と平坦時空上での安定性を議論する。NMG 理論は以下の作用で与えられる。

$$S_{NMG} = \int d^3 x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2G} R + \frac{1}{m^2} \Big(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \Big) \right] + \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \tag{3.15}$$

ここで m は質量の次元を持つ定数である。作用の中で R のまえの符号が通常と逆に定義されている、これは前に章で述べたように、massless modes に ghost を押し付けるためのものである。そして、R^2 の前の $\frac{3}{8}$ はスカラー成分を消すためのパラメータ調整である。変分して方程式を与えると

$$-G_{\mu\nu} + \tfrac{1}{m^2} K_{\mu\nu} = 0, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = \Box R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}(\nabla_\mu \nabla_\mu R + \Box R g_{\mu\nu}) - 4 R_{\nu\lambda} R^\lambda_\mu \\ - \tfrac{9}{4} R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\tfrac{3}{2} R_{\lambda\rho} R^{\lambda\rho} - \tfrac{13}{16} R^2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。トレースをとると

$$R + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \tfrac{3}{8}R^2 = GT. \tag{3.18}$$

$$\tag{3.19}$$

それぞれ平坦時空から摂動をとって、

$$(\Box + m^2)\mathcal{G}^L_{\mu\nu} = 0,\ R^L = 0. \tag{3.20}$$

よって確かにスカラー成分は消えているとわかる。

次は、この理論が正しく massive spin2 modes を持つかどうか確認する。まず、補助場 $f_{\mu\nu}$ を用いて作用を書き換える。

$$S_{NMG} = \frac{1}{2G}\int d^3x\ \sqrt{g}\left[-R - f^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{4}m^2(f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - f^2)\right]. \tag{3.21}$$

摂動 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{2G}h_{\mu\nu}$ をとって、

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - f^{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - f^2)\right] \tag{3.22}$$

となる。分離するために対角化 $h_{\mu\nu} = \tilde{h_{\mu\nu}} + f_{\mu\nu}$ して、

$$S = \frac{1}{2}\int d^3x \left[h^{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - f^{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - f^2)\right] \tag{3.23}$$

を得る。ここで、第一項は、線形化した Einstein-Hilbert 作用である。上述したようにこの部分は摂動の自由度を持たず、方程式と拘束条件からすべての成分が決定される。後の二項は、Fierz-Pauli 作用であり、線形の massive spin2 理論で唯一のものである。従って、NMG 理論は正しく massive spin2 modes を記述する理論になっている。

3.3 曲がった空間上の New Massive Gravity

この小節では NMG を曲がった空間である (A)dS 空間上で定義し、安定な modes が存在することを示す。作用は

$$S_{NMG} = \frac{1}{2G}\int d^3x\ \sqrt{g}\left[-2\Lambda_0 - R - f^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{4}m^2(f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - f^2)\right], \tag{3.24}$$

で与えられる。第二章と行ったのと同様に、背景

$$\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} = \Lambda\left(\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}_{\rho\sigma} - \bar{g}_{\mu\sigma}\bar{g}_{\nu\rho}\right),\ \bar{R}_{\mu\nu} = 2\Lambda\bar{g}_{\mu\nu},\ \bar{R} = 6\Lambda \tag{3.25}$$

からの摂動を考える。宇宙項は

$$\Lambda = -2m^2\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda_0}{m^2}}\right] \tag{3.26}$$

となり、二次まで展開した作用は

$$S = \int d^3x \frac{(\Lambda + 2m^2)}{4m^2} \bar{h}^{\mu\nu} \mathcal{E}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^2(\Lambda - 2m^2\sigma)} \left[f^{\mu\nu} \mathcal{E}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} - \frac{M^2}{4} \left(f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - f^2 \right) \right] \tag{3.27}$$

となる。ここで、

$$M^2 = m^2 + \frac{1}{2}\Lambda \tag{3.28}$$

である。摂動の自由度は安定でなければならないので、有効的な運動項や質量項の正値性からパラメータに制限がつく。

$$\Lambda > -2m^2 \tag{3.29}$$

及び

$$M^2 = m^2 + \frac{1}{2}\Lambda \ > 0. \tag{3.30}$$

背景が de Sitter の場合条件は自明に満たされ、AdS の場合は、質量パラメータに下限がつく。この条件の範囲内で NMG は摂動的に安定である。

3.4 Decoupling linit と BD ghost

3.4.1 Decoupling linit

NMG は完全に非線形に定義されており、非線形性による新しい ghost（BD ghost）は出現せず、自由度が変わらないと述べた。このことを確認する。ここでは、[30] に基づいて自由度を分離し、その数を数える方法で議論をする。まず、理論の decoupling limit を取って、どのような成分と相互作用が出現するかを見る。以下の極限を考える。

$$M_P \to \infty, \quad m \to 0, \quad \Lambda_{5/2} \equiv (\sqrt{M_P} m^2)^{2/5} = \text{fixed}. \tag{3.31}$$

以下のように新しく変数をとって (3.21) に代入する。

$$h_{\mu\nu} = \frac{\bar{h}_{\mu\nu}}{\sqrt{M_P}}, \quad f_{\mu\nu} = \frac{\bar{f}_{\mu\nu}}{\sqrt{M_P}} + \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu \tag{3.32}$$

すると以下を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NMG} = M_P\sqrt{-g} \Bigg[&-R - \frac{1}{\sqrt{M_P}} \bar{f}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{m^2}{4M_P} (\bar{f}^{\mu\nu} \bar{f}_{\mu\nu} - \bar{f}^2) \\ &- \frac{m^2}{\sqrt{M_P}} \bar{f}^{\mu\nu} (\nabla_\mu V_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^\alpha V_\alpha) - \frac{m^2}{2} (\nabla^\mu V^\nu \nabla_\mu V_\nu - \nabla^\mu V_\mu \nabla^\nu V_\nu) \\ &+ \frac{m^2}{2} R^{\mu\nu} V_\mu V_\nu \Bigg].\end{aligned} \tag{3.33}$$

ここで、∇_μ は $g_{\mu\nu}$ についての共変微分である。さらに、

$$V_\mu = \frac{A_\mu}{\sqrt{M_P} m} + \frac{\nabla_\mu \pi}{\sqrt{M_P} m^2} \tag{3.34}$$

とおいて (3.33) に代入し、書き換えると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NMG} = \sqrt{g}\Bigg[&-M_P R - \sqrt{M_P}\bar{f}^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{4}m^2(\bar{f}^{\mu\nu}\bar{f}_{\mu\nu} - \bar{f}^2) - m\bar{f}^{\mu\nu}(\nabla_\mu A_\nu \\ &- g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A_\alpha) - \bar{f}^{\mu\nu}(\nabla_\mu\nabla_\nu\pi - g_{\mu\nu}\Box\pi) - \frac{1}{2}(\nabla^\mu A^\nu \nabla_\mu A_\nu - \nabla^\mu A_\mu \nabla^\nu A_\nu) \\ &+ \frac{1}{2}R^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{2}{m}R^{\mu\nu}\nabla_\mu\pi A_\nu + \frac{1}{m^2}R^{\mu\nu}\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi\Bigg]\end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。さて、$\Lambda_{5/2}$ を固定して decoupling limit をとると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{5/2}_{NMG} = &\frac{1}{2}\bar{h}^{\mu\nu}(\mathcal{E}\bar{h})_{\mu\nu} - \bar{f}^{\mu\nu}(\mathcal{E}\bar{h})_{\mu\nu} - \bar{f}^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\pi - \eta_{\mu\nu}\Box\pi) - \frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{\Lambda^{5/2}_{5/2}}\bar{R}^{(1)\mu\nu}\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi\end{aligned} \tag{3.36}$$

となる。ここで $R^{(1)\mu\nu}$ は線形化した Ricci テンソルである。また、 $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ である。ここで、$\bar{f}^{\mu\nu}$ は、Lagrange multiplier になっており、拘束条件を導く。

$$(\mathcal{E}\bar{h})_{\mu\nu} = -\partial_\mu\partial_\nu\pi + \eta_{\mu\nu}\Box\pi. \tag{3.37}$$

これを $\bar{h}^{\mu\nu}$ について解き、再度作用に代入すると、

$$\mathcal{L}^{5/2}_{NMG} = 2\pi\Box\pi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2\Box\pi - \frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} \tag{3.38}$$

となる。これが decoupling limit での NMG である。そこでの成分は helicity-0 mode と helicity-1 mode がひとつづつ存在し、helicity-0 mode は Galileon 型の自己相互作用を持つ。この形の作用は、時間の高階微分をもたらさず、ghost が存在しない。したがって、この極限では自由度の数は増加しないことがわかった。以下この解析を元に、極限をとらない full の理論で自由度の数が増えないことを示そう。

3.4.2 BD ghost の回避

(3.33) は、以下の変換で不変である。

$$\bar{f}_{\mu\nu} \to \bar{f}_{\mu\nu} + \sqrt{M_P}(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu), \qquad V_\mu \to V_\mu - \xi_\mu. \tag{3.39}$$

これをさらに以下を用いて書き換える。

$$\bar{V}_\mu = \sqrt{M_P} m V_\mu, \qquad \tilde{f}_{\mu\nu} = \bar{f}_{\mu\nu} - \frac{1}{2\sqrt{M_P}}(V_\mu V_\nu - g_{\mu\nu}V^\alpha V_\alpha). \tag{3.40}$$

作用は、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NMG} = \sqrt{g}\ \Big[& -M_P R - \sqrt{M_P}\tilde{f}^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{4}m^2(\tilde{f}^{\mu\nu}\tilde{f}_{\mu\nu} - \tilde{f}^2) - \frac{1}{4}\bar{F}^{\mu\nu}\bar{F}_{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{4}\frac{m^2}{\sqrt{M_P}}\tilde{f}^{\mu\nu}(\bar{V}_\mu\bar{V}_\nu + g_{\mu\nu}\bar{V}^\alpha\bar{V}_\alpha) - m\tilde{f}^{\mu\nu}(\nabla_\mu\bar{V}_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\bar{V}_\alpha) \\
& - \frac{1}{2}\frac{m}{\sqrt{M_P}}\nabla^\mu\bar{V}^\nu(\bar{V}_\mu\bar{V}_\nu + g_{\mu\nu}\bar{V}^\alpha\bar{V}_\alpha) + \frac{1}{8}\frac{m^2}{M_P}(\bar{V}^\alpha\bar{V}_\alpha)^2 \Big]
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

となる。この作用も書き換えただけなので (3.39) による変換で不変であるが、$\tilde{f}^{\mu\nu}$ はもはや独立な変数ではない。上記の変換により、その成分をすべて消去できるからである。よって、存在し得る自由度は $\bar{V}_\mu$ の成分のみである。ここからさらにこの作用が持つ対称性で自由度が一つ落ちることを見る。

次の変数を導入する。

$$\bar{V}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\pi. \tag{3.42}$$

ここで A_μ は (3.39) において $A_\mu \to A_\mu\xi_\mu$ と変化するベクトル成分である。これを代入してさらに成分を分けるが、ここで次の変換により作用が $\bar{V}_\mu$ が不変であるので作用も右辺であるとわかる。

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\zeta, \qquad \pi \to \pi - \zeta. \tag{3.43}$$

π の時間に関するに 2 階微分項 $\ddot{\pi} = \partial_0\bar{V}_0$ が現れるのは、(3.41) の内、

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\,\nabla^\mu\bar{V}^\nu(\bar{V}_\mu\bar{V}_\nu + g_{\mu\nu}\bar{V}^\alpha\bar{V}_\alpha) \tag{3.44}$$

の部分と、

$$\mathcal{L}_1 = -\sqrt{g}\,\tilde{f}^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu\bar{V}_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\bar{V}_\alpha\right) = -\sqrt{g}\left(\nabla_\nu\bar{V}_\mu\right)(\tilde{f}^{\mu\nu} - \tilde{f}g^{\mu\nu}) \tag{3.45}$$

の部分である。

$\mathcal{L}_0$ を部分積分して、

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\sqrt{g}\,(\bar{V}^\alpha\bar{V}_\alpha)\nabla^\mu\bar{V}_\mu = -\frac{1}{4}(\bar{V}^\alpha\bar{V}_\alpha)\partial_\mu(\sqrt{g}\,V^\mu) \tag{3.46}$$

となる。ここで、この部分は時間微分に関して total derivative になることがわかる。実際、

$$g^{00} = -1/N^2,\ g_{0i} = N_i \tag{3.47}$$

と置いて書き直すと、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}\Big[-\frac{1}{N^2}(\bar{V}_0 - N^i\bar{V}_i)^2 + \gamma^{ij}\bar{V}_i\bar{V}_i\Big]\Big[\partial_0\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{N}(-\bar{V}_0 + N^i\bar{V}_i)\right) + \partial_i(\dots)\Big] \\
&= -\frac{1}{12}\,\partial_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{(\bar{V}_0 - N^i\bar{V}_i)^3}{N^3}\right) + \frac{1}{4}\partial_0\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{N}(\bar{V}_0 - N^i\bar{V}_i)\gamma^{ij}\bar{V}_i\bar{V}_i\right) \\
&\quad + \dot{\bar{V}}_0, \dot{N} \text{ or } \dot{N}^i \text{ を含まない項}
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

となる。ここで $g_{ij}=\gamma_{ij}$ である。従って、この項から高階微分の項は現れない。
　$\mathcal{L}_1$ も同様で、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= -\sqrt{\gamma}N_0\left(\frac{\dot{N}}{N}V_iN^i - V_0\dot{N} - V_i\dot{N}^i + \dot{V}_0 + \cdots\right)\frac{1}{N_0^2}\gamma^{ij}\tilde{f}_{ij} + \cdots \\
&= -\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\tilde{f}_{ij}\left(\partial_0\left(\frac{V_0}{N}\right) - V_i\partial_0\left(\frac{N^i}{N}\right)\right) + \cdots \\
&= -\partial_0\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{N}\gamma^{ij}\tilde{f}_{ij}\left(V_0 - V_iN^i\right)\right) + \dot{\bar{V}}_0, \dot{N},\ \dot{N}^i,\ \dot{\tilde{f}}_{00} \text{ or } \dot{\tilde{f}}_{0i}\ \text{を含まない項}
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

と書き換えられ、ここからも π 高階微分による自由度は現れない。
　従って $h_{\mu\nu},\ f_{\mu\nu},\bar{V}_\mu,\ \pi$ の自由度からゲージ対称性と拘束条件によって落ちる自由度を数えて、自由度を数えられる。自由度は $6+6+3+1=16$ であり、$h_{\mu\nu}$ のゲージ対称性が３つ、$f_{\mu\nu}$ の ξ_μ でのゲージ対称性が 3 つ存在する。加えて A_μ の ζ によるゲージ対称性が１つ存在するので、合計 7 つである。これらはすべてゲージ対称性なので拘束条件と固定条件がそれぞれ 7 個ずつ生じる従って $16-7-7=2$。NMG 理論は非線形項の寄与を考慮しても自由度が変わらないことがわかった。これは、π の相互作用で高階微分を持ち得る項が、すべて total derivative にしかならず。新しい自由度が生じなかったことによる。この相互作用の構造は、NMG の項のパラメータ調整 3/8 によっており、この特殊な選択による自由度の減少が Full の非線形理論においても保たれていることがわかる。

4 Zwei Dreibein Gravity

この章では Zwei Dreibein Gravity(ZDG) [23][32] のレビューを行う。ZDG は通常の計量とともにもう一つ独立した 2 階テンソルを自由度に持ち、互いに相互作用する理論であり bimetric 理論の一種であるが、特殊な極限で NMG に一致する、NMG の拡張理論になっている。

この理論はもともと AdS 上の NMG が持つ問題点を解消するために考案された理論である。前節でみたように、NMG 理論は ghost modes を持たず、AdS 等の曲がった時空上でも安定な理論であった。しかしながら問題がないわけではなく、AdS 時空上で理論を考えたときに、その境界に存在する共形場理論との間に、ある不整合な性質が存在する。それは、AdS 時空の内部と境界について、互いの unitarity が必ず一方しか成り立たなくなる、という性質である。この問題を NMG 理論を拡張し AdS 時空の内部での unitarity の条件を変更することで解決したのが ZDG 理論である。従って、NMG 理論に限らず ZDG 理論についても因果律の条件を満たすか、それが unitarity の条件と整合するか考察することは重要である。

NMG を極限に持ちつつ整合的な理論の中でも最小限のものであり、摂動的安定性、BD ghost の有無などがよく調べられている。本章では、なぜ ZDG が必要であるかの導入を行い、ZDG の整合性について簡単にまとめる。

4.1 New Massive Gravity の問題点

この節では NMG 理論が持つ問題点について解説する。NMG 理論は平坦時空及び曲がった時空上で整合的に存在できる高階微分重力理論であるが、なぜそのようなことが可能であったかというと、伝播しない massless spin2 modes に ghost を押し付けていたからであった。これにより Einstein-Hilbert 作用単独で見ると運動項の符号が反対になっている。これが特に AdS 上で問題を引き起こすことになる。

そもそも、Einstein 重力理論は 3 次元空間では局所的なダイナミクスを持たないが、まったく意味のない理論というわけではない。背景解を決定することは古典的に方程式を解いて行うことができる。特に漸近的に AdS 空間になっている背景の上では、それ以上に非自明な現象がある。AdS 空間の内部の座標変換での自由度は AdS の境界における 2 重の共形対称性に対応しており、境界には内部の時空を記述するための 2 次元共形場理論が存在することが知られている [33]。この対応関係は古くから知られているが内容が深く、現在でも研究が盛んに行われている。その対応を表す結果の一つに境界の理論の中心電荷と呼ばれる理論を特徴づける量を重力の作用から直接計算できる公式が存在する [34, 35, 36]。

$$c \;=\; \frac{\ell}{2G} g_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial R_{\mu\nu}}. \tag{4.1}$$

ここで、c が中心電荷で $\mathcal{L}_3$ は三次元の重力理論である。この $\mathcal{L}_3$ は Einstein 理論の作用でなくてもよい。Einstein 理論で計算すると、

$$c \;=\; \frac{3\ell}{2G} \tag{4.2}$$

となる。ここで $-\ell^{-2}=\Lambda$ である。これは、$G>0$ である限り、正の値をとる。二次元共形場理論の中心電化は理論が unitary であるためには正でなければならないことが分かっており、Einstein 理論はそれを満たしている [37, 27]。これと同様のことを NMG 理論で行ってみる。NMG の作用を代入すると

$$c = \frac{3\ell}{2G}\left(-1-\frac{\Lambda}{2m^2}\right) = \frac{3\ell}{2G}\left(-1+\frac{1}{2m^2\ell^2}\right) \tag{4.3}$$

となる。中心電荷が正であるためには $\Lambda<-2m^2$ でなければならないが、これは、AdS 空間上で安定に存在できるパラメータの条件 $\Lambda>-2m^2$ と両立しない。したがって NMG 理論はその境界の理論まで含めて考えたときに、AdS 内部か境界のうち、どちらかの unitary 性をあきらめなければならなくなる。この対立の解消のために考案された理論の一つが ZDG 理論である。

4.2 Zwei Dreibein Gravity

この説では ZDG 理論を導入し、NMG 理論と同様に背景時空の周りで展開して ghost が存在しない条件などを求める。この unitarity の条件は、後の節で因果律を満たす条件を求めたときに二つの条件が整合しているかどうかの判定に必要である。

ZDG 理論は 3 次元における bigravity 理論、即ち、独立な二階テンソル 2 つを基本自由度に持つ理論である。ZDG 理論の作用は Dreibein 形式 $g_{\mu\nu}=e^a_{1\mu}e^b_{1\nu}\eta_{ab}$ を用いて、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ZDG} = -M_P\Big\{&\sigma e_{1a}R_1{}^a + e_{2a}R_2{}^a + \frac{\alpha_1}{6}m^2\epsilon_{abc}e_1{}^a e_1{}^b e_1{}^b + \frac{\alpha_2}{6}m^2\epsilon_{abc}e_2{}^a e_2{}^b e_2{}^c \\ &-\frac{1}{2}m^2\beta_1\epsilon_{abc}e_1{}^a e_1{}^b e_2{}^c - \frac{1}{2}m^2\beta_2\epsilon_{abc}e_1{}^a e_2{}^b e_2{}^c\Big\}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

ここで $R_I{}^a$ は、曲率形式であり、

$$R_I{}^a = \mathrm{d}\omega_I{}^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{I\,b}\omega_{I\,c} \tag{4.5}$$

と定義される。ここで、d は微分形式の外微分で、$\omega_{I\,a}$ は接続形式である。ZDG 理論は一階の微分の変数で書き直された first order formalism で定義されているため、この $\omega_{I\,a}$ も独立な自由変数である。

ZDG 理論も NMG 理論と同様に、特定のパラメータ領域において、摂動的に安定であることがわかっている。しかしながら、NMG と同様に、ZDG 理論にも一般的には非線形な BD ghost が存在する。これは二つの計量の間の相互作用が複雑であるため一般に拘束条件を壊してしまうことが原因である。BD ghost を回避するためにはこの相互作用のパラメータ $\beta_1,\ \beta_2$ に関する制限を与える必要がある。一つの知られている方法は、$\beta_1\beta_2=0$、即ちどちらかが 0 になるというものである。この条件のもとでは ghost が出ないほかに、片側の計量をもう片方の計量に関して解くことができる [23, 38, 39]。従ってここからは、この場合に限って議論を進める。ここでは [32] に従って、$\beta_2=0$ として、運動方程式は、

$$0 = \sigma R^a_1 + \frac{1}{2}m^2\epsilon^{abc}\left[\alpha_1 e_{1\,b}e_{1\,c} - 2\beta_1 e_{1\,b}e_{2\,c}\right], \tag{4.6}$$

$$0 = R_2^a + \frac{1}{2} m^2 \epsilon^{abc} \left[\alpha_2 e_{2\,b} e_{2\,c} - \beta_1 e_{1\,b} e_{1\,c} \right] , \tag{4.7}$$

$$0 = T_I^a \, . \tag{4.8}$$

ここで、T_I^a は、

$$T_I{}^a = \mathcal{D}_I e_I{}^a \equiv \mathrm{d} e_I{}^a + \epsilon^{abc} \omega_{I\,b} e_{I\,c} \tag{4.9}$$

で定義される。

NMG と同様に極大対称な空間を背景にとることができる。

$$e_1{}^a = \bar{e}^a \, , \qquad e_2{}^a = \gamma \bar{e}^a \, , \qquad \omega_I{}^a = \bar{\omega}^a \tag{4.10}$$

ここで γ はスケーリング変数であり、二つの計量のスケールのずれを表す。背景 $\bar{e}^a$, $\bar{\omega}^a$ は次を満たす。

$$d\bar{\omega}^a + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \bar{\omega}_b \bar{\omega}_c - \frac{1}{2} \Lambda \epsilon^{abc} \bar{e}_b \bar{e}_c = 0, \tag{4.11}$$

$$\bar{\mathcal{D}} \bar{e}^a \equiv d\bar{e}^a + \epsilon^{abc} \bar{\omega}_b \bar{e}_c = 0. \tag{4.12}$$

これを用いて方程式 (5.44)、(5.45)、(4.8) より以下を得る。

$$\alpha_1 = 2\gamma\beta_1 - \sigma \frac{\Lambda}{m^2}, \qquad \gamma^2 \alpha_2 = \beta_1 - \frac{\Lambda}{m^2}. \tag{4.13}$$

背景の周りでの展開を考える。

$$\begin{aligned} e_1{}^a &= \bar{e}^a + \kappa h_1{}^a \, , & \omega_I{}^a &= \bar{\omega}^a + \kappa v_I{}^a \, , \\ e_2{}^a &= \gamma \left(\bar{e}^a + \kappa h_2{}^a \right) . \end{aligned} \tag{4.14}$$

代入して二次まで展開すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & -\sigma M_P \left[h_{1\,a} \bar{\mathcal{D}} v_1{}^a + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \bar{e}_a \left(v_{1\,b} v_{1\,c} - \Lambda h_{1\,b} h_{1\,c} \right) \right] \\ & -\gamma M_P \left[h_{2\,a} \bar{\mathcal{D}} v_2{}^a + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \bar{e}_a \left(v_{2\,b} v_{2\,c} - \Lambda h_{2\,b} h_{2\,c} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} m^2 \gamma \beta_1 M_P \epsilon^{abc} \bar{e}_a \left(h_{1\,b} - h_{2\,b} \right) \left(h_{1\,c} - h_{2\,c} \right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

となる。運動項を分離するために以下のように対角化する

$$\begin{aligned} (\sigma + \gamma) h_+{}^a &= \sigma h_1{}^a + \gamma h_2{}^a \, , & h_-{}^a &= h_1{}^a - h_2{}^a \, , \\ (\sigma + \gamma) v_+{}^a &= \sigma v_1{}^a + \gamma v_2{}^a \, , & v_-{}^a &= v_1{}^a - v_2{}^a \, . \end{aligned} \tag{4.16}$$

上の式に代入して、

$$\mathcal{L}^{(2)} = -(\sigma + \gamma) M_P \left[h_{+\,a} \bar{\mathcal{D}} v_+{}^a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \bar{e}^a \left(v_+{}^b v_+{}^c - \Lambda h_+{}^b h_+{}^c \right) \right] \tag{4.17}$$

$$-\frac{\sigma\gamma}{(\sigma+\gamma)}M_P\left[h_{-a}\bar{\mathcal{D}}v_-{}^a+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\bar{e}^a\left(v_-{}^b v_-{}^c-\Lambda h_-{}^b h_-{}^c\right)+\frac{1}{2}M^2\epsilon_{abc}\bar{e}^a h_-{}^b h_-{}^c\right]$$

となる。有効質量 M^2 は

$$M^2=m^2\beta_1\frac{\sigma+\gamma}{\sigma} \tag{4.18}$$

で与えられる。

NMG 理論で問題となっていた中心電荷は、

$$c=12\pi\ell\left(\sigma+\gamma\right) \tag{4.19}$$

と計算されている [23]。NMG の場合と違い、σ、γ が任意の値をとることができ、bulk の重力理論を Unitary に保ったまま、かつ中心電荷を正にすることも可能である。したがって、ZDG 理論は、NMG の問題を解決し整合的な 3 次元高階微分重力理論を与える候補になっている。

5 因果律と Shock wave 時空

前節までで、3 次元重力理論の各理論の摂動的な理論の整合性を見てきた。しかしながら、理論の整合性を確認するときにこれだけでは十分とは言えない。重力理論の整合性を確認する方法の一つとして、理論がが因果律を守るか調べるというものがある。序論で述べたように、重力理論の因果律には多様な定義があり、それぞれ意味するものや、その破れによる帰結が異なる。本論文では、その中の shock wave 時空を用いた解析を行う。この因果律は [14][15] で用いられている定義と同一のものである。

この節では、重力理論の因果律に関する一般的な性質について解説する。まず、重力理論に限らず一般的な理論において因果律の定義を複数導入して解説しそれらの関係を述べる。次に本論文で取り扱う shock wave を用いた定義の位置付けとなぜその定義を考察する必要性があるかについて解説する。

そして、具体的にどのように shock wave 時空の因果律の成否を調べるかを説明した後に、一般相対性理論と NMG 理論、ZDG 理論について適用して因果律の成否を調べる。

5.1 因果律の多様な定義

理論が因果律を守るということを定義するのには複数の方法がある。それぞれの定義については基本的には独立しており、一つを破っても他を破るとは限らない。定義を定めるやり方として主に、二つの方法がある。

- 光速度を超えて伝播する成分を持たない。
- ある背景上（shock wave 時空上など）で時間を逆行するような現象が起きない。

一つ目は、理論が光速を超えて情報をやり取りしないことを保証するものである。これは、理論の成分が伝播する「速さ」をどう定義するかにも依る概念になる。二つ目は理論の中の特定の解が異常を持たないことを保証するものである。その中の一例として shock wave 時空の背景を用いたものが存在し、本論文ではこの定義を用いている。これらの他に二つの要素が組み合わさったものも存在する。例えば、特定の背景場上において超光速成分が出現する現象などである。以下これらの具体的な例を解説する。

5.1.1 伝播の速度の定義と因果律

第一の定義の方法で因果律を定義するとき、伝播する成分の「速さ」が問題となる。これをどう定義するかで、その「速さ」が実際に光速度を超えるかどうかが変わるからである。考えたいのは、重力場の理論についてなので、場の理論一般に用いることができればより好ましい。その例として以下のものがある。

- 位相速度（phase velocity）
- 群速度（group velocity）
- 先端速度（front velocity）

以下、各々について解説する。

例として、massless のスカラー場の方程式を考える。

$$\Box\phi(x) = 0. \tag{5.1}$$

この解として以下のような形の解を考える。

$$\big(A(x) + i\epsilon B(x) + \dots\big)e^{i\vartheta(x)/\epsilon}. \tag{5.2}$$

ここで ϵ は展開パラメータである。これは、波の位相部分の振動の速さで展開するもので $k_\mu = \partial_\mu \vartheta(x)$ と置くと、$O(1/\epsilon^2)$ で、

$$k^2 = \eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0 \tag{5.3}$$

となる。ここから分散関係

$$\omega = k^0 = |\mathbf{k}| \tag{5.4}$$

を得る。ここで $\mathbf{k}$ は k の空間部分である。massless スカラー場の伝播の「速さ」は通常この式の係数を読み取って、$v = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = 1$ つまり丁度光速度になる。これを例にして、位相速度 $v_{\rm ph}$ を次のように定義する。

$$v_{\rm ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}. \tag{5.5}$$

これが速度を定義する一つ目の方法である。これは、各振動数の波の波面の速さと解釈される。この定義について、この例のみ見ると、自明なことを述べているようにも見える。しかしこれは二つの意味で正しくない。

一つ目は、これを、素朴に用いると問題がある場合である。例えば、massive scalar の例を考える。

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0. \tag{5.6}$$

これは自明に解けるので、ここから分散関係をとると

$$\omega = k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{5.7}$$

となり、位相速度は

$$v_{\rm ph} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{\mathbf{k}^2}} \tag{5.8}$$

である。これは、常に 1 より大きい。massive スカラー場の理論は因果律を壊しているのだろうか？そうではなく、これは、因果律の構造に関係ない部分の効果まで、定義上拾ってきたことに依っている。上で、massless の場合を定義したときに重要だったのは、位相部分の変化で k_μ について 2 次の部分、つまり 2 階微分の項の構造を持ってくることであった。massless の場合、その項しかないので、上記の定義で良いが、massive の場合、分散関係にそれより微分が低次の項も現れてくるので、位相速度で定義をしても、因果律の成否にはあまり意味がない。そこで、以下の群速度 $v_{\rm group}$ の定義を導入する。

$$v_{\rm group} = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|}. \tag{5.9}$$

これは、波の波束の速さとして解釈される。これを用いると massive スカラー場の速度は、

$$v_{\mathrm{group}} = \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \tag{5.10}$$

となる。これは 1 より小さい。なので、この定義を用いる場合のほうが適切と見れる。ちなみに massless の場合に群速度を定義しても位相速度と等しくなる。

結局のところ、微分の二階の部分の構造にどのように影響するかが重要であると述べた。ここで二つ目の自明でない例が現れる。以下の理論を考える。

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \pi \partial_\mu \pi + \frac{c_3}{\Lambda^4}(\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi)^2 + \ldots \tag{5.11}$$

ここで、Λ はあるスケール、c_3 は無次元の係数である。これは先の massless の理論に、スケール不変性を守りながらより質量次元が高次の項を足したものとみることができる。ここから、上の方法を用いると分散が

$$k^2 + 4\frac{c_3}{\Lambda^4}\partial_\mu A(x)\partial_\nu A(x) k^\mu k^\nu = 0 \tag{5.12}$$

となる。または、ある背景 $\pi_0(x)$ のまりで展開したと思って $\partial_\mu \pi_0(x)$ を使って書いてもよい。

$$k^2 + 4\frac{c_3}{\Lambda^4}\partial_\mu \pi_0(x)\partial_\nu \pi_0(x) k^\mu k^\nu = 0. \tag{5.13}$$

この場合にも分散関係が非自明になるが、その影響がより深刻である。簡単のために $\partial_i \pi_0 = 0$ としよう。分散関係は、

$$\omega = k^0 = \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{1 + 4\frac{c_3}{\Lambda^4}(\partial_0 \pi_0(x))^2}} \tag{5.14}$$

となる。ここで $c_3 < 0$ の場合因果律が破れることが見て取れる。しかもそれは位相速度で群速度でも同じことである。これは、高階微分の効果は方程式の 2 次の部分に直接変化を加えるからである。このように、高階微分の寄与による分散の変化はたとえそれが最低次のものであったとしても、位相速度や群速度の意味で因果律を破壊し得る。従って、高階微分重力理論を検証するうえで、一つの非自明な指標を与えるのもとしてこれらは有効である。

次に先端速度（front velocity）について定義しておく。これは、ある方程式について、ある点に与えた影響が伝わる、一番速い速度によって定義される。以下の方程式を考える。

$$a_{ij}\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + b_{ij}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + c_{ij}\phi_j \;=\; 0. \tag{5.15}$$

ここで、ϕ_i は、$u,\ \partial_x u,\ \partial_t u, ...$ といったものをまとめて書いており、微分方程式を 1 階にしたものとみる。また $a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij}$ は 1 階にした時に現れた関数である。この連立方程式の特性曲面（characteristic）を考える。即ち、ある与えられた微分方程式の初期条件に対し、時間発展が一意的に解ける領域と解けない領域の境界を考える（Cauchy 問題ができなくなる領域)。そのような境界は時間に関する微分項について代数的に解けなくなる領域として定義される。そのような曲面を求めるために、デカルト座標 x に代えて一般的な

座標 y を導入しこの上での曲線 $y(t)$ を考える。ここで、この曲線は特性曲面 $\mathcal{C}$ 上にあり、(t_0, y_0) を通るとする・全微分は、

$$\frac{d\phi_i}{dt} \;=\; \frac{\partial\phi_i}{\partial t}\bigg|_0 + \frac{\partial\phi_i}{\partial y}\bigg|_0 \frac{dy}{dt} \tag{5.16}$$

となる。ここで、$\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\Big|_0$ などは (t_0, y_0) での値である。これを用いて $\frac{\partial\phi_j}{\partial t}$ を方程式から除去すると、

$$\Big(-a_{ij}\frac{dy}{dt} + b_{ij}\Big)\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\bigg|_0 + a_{ij}\frac{d\phi_j^{(0)}}{dt} + c_{ij}\phi_j^{(0)} \;=\; 0 \tag{5.17}$$

となる。ここで、曲線 $y(t)$ が特性曲面上にあるので、先端速度 v_f は $v_f = \frac{dy}{dt}$ である。あとは、これが一意に解を持たなくなる場所を求めればよい。それは、

$$\det\Big[a_{ij}v_{\rm wf} - b_{ij}\Big] \;=\; 0 \tag{5.18}$$

である。よって、これによって先端速度が定義される。この速度は、ある意味最も強く因果律を保証している。なぜなら、ある点での変化の情報がどれだけ早く伝わるかを定義するからである。

先端速度と位相速度について次のことが成り立つ。

$$v_{\rm wf} = \lim_{k\to\infty} v_{ph}(k). \tag{5.19}$$

以下、それを示しておく。方程式 (5.15) に

$$\phi_i \;=\; \varphi_i \exp i(wt - kx) \tag{5.20}$$

を代入すると、

$$\Big(i\omega a_{ij} - ikb_{ij} + c_{ij}\Big)\varphi_j \;=\; 0 \tag{5.21}$$

を得る。ここで、両辺を k で割って、解のある条件を書くと

$$\det\Big[a_{ij}v_{\rm ph}(k) - b_{ij} - \frac{i}{k}c_{ij}\Big] \;=\; 0 \tag{5.22}$$

となる。$k \to \infty$ で第三項は消えて、先端速度の定義と同一になり示せた。群速度をとっても同様のことが示せる。

5.1.2 背景場と因果律

因果律を定義する二つ目の方法が背景場を用いることであった。この例について、われわれはすでに 1 つ例を見ている。それは、(5.14) においてはある背景上で分散関係が変わっていたという事実である。これは π そのものの背景によって変化が起きているが、当然、時空の背景が非自明になった場合も同様のことが起きる。

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}\left(k_\mu k_\nu + ...\right) = 0. \tag{5.23}$$

このときは (5.14) の第一項から変化することになる。時空構造がどのように因果律を破壊するかは様々だが、一例として運動の時間の進行方向を逆転させるといったものがある。後の節で詳述するが、これは一部の理論の shock wave 解を通して起こり得る。

5.2 なぜ因果律を検証するか

理論の整合性として理論が因果律を保つ必要があると述べた。ここで因果律を保たねばならない理由と、それぞれの定義において因果律が破られると何が起こるかを解説する。

まず、一般に位相速度や群速度は、実は光速を超えるような状況は存在し得る。これは、例えば、特定の媒質の内部での電磁場や、特定の背景場や曲がった背景時空上での場の理論において出現する。実際前節でその例を見た。これは、実は因果律を厳密な意味で破っているわけではない。これが意味するのは波面や波束が波長に対しどれだけ速く振動しているかについての指標である。従って、情報が光速を超えて伝播することを直接意味するわけではない。それを意味するのは先端速度である。実際、上記の例では全て情報は光速を超えて伝わっていない。高波数の極限をとるといずれの例の場合でも、位相速度や群速度は光速度以下になる。従って、これらが破れることによって直接的に理論が不整合になるわけではない。しかしながら先端速度の超光速伝播や背景時空などによる時間の逆行の場合は異なり、理論にいくつかの病的な現象が現れる。

まず、古典論の範囲においていくつかの障害が現れる。例として以下の二つがある。

- Closed Timelike Curves(CTC) の出現
- Cauchy 問題の破綻

CTC は局所的には因果的であるにもかかわらず、大局的には輪になって閉じている曲線である。この曲線上ではある点で与えた影響が、同じ点に戻ってくる。従って初期値問題で微分方程式を解くということに意味がない。同様のことが偏微分方程式の Cauchy 問題でも起きる。つまり、因果律が破れた理論では正常な問題設定で物理を記述することができない。これは、先端速度の定義を考えるとよくわかる。特性曲面が光円錐より外側にあると、ある面で定義した初期条件の影響が spacelike に伝わり、それを繰り返して元の面に戻ってこれるからである。CTC や Cauchy 問題の破綻は背景時空による時間の逆行でも起きる [14]。このとき間の逆行を繰り返して CTC を作ることができるし、このような逆行が可能ならばそもそも Cauchy 問題は成立しないからである。

従って、NMG 理論や ZDG 理論において shock wave 時空を調べる動機がここで一つ生じる。この意味での因果律に違反すると即座に物理的に病的な現象が現れるからである。

次に量子論では、基本的に古典論と同じではあるが、それに加えて量子効果により、よりたちの悪い現象が起きたり、因果律の成否の評価が微妙になることがある。それを見るために (5.11) について再度考察する。この理論は $c_3 < 0$ で位相速度が光速度を超えることをみた。実はこの係数の領域は、スケール Λ において、適切な仮定（理論の局所性、Lorentz 不変性、S 行列の解析性など）を置いた理論で補完することを条件に置くと、とり得ないということが示されている [12]。この事実は、位相速度が光速を超える事と、理論を補完することができないことが同じことであることを示している。

これは因果律に対して強い制限を課すが必ずしもこの理論で全ての因果律の成立が保証されるわけではない。最も強く因果律を保証する先端速度については微妙である。なぜなら、先端速度は位相速度の高波数の極限だからである。理論が高エネルギーで補完される低エネルギー理論であるならばそれが使えるのはスケールがカットオフ Λ 以下の場合のみである。従って、先端速度を本当に計算する時には、高次のすべての項の効果、つま

り紫外の補完理論が必要となる。これが、因果律の成否が微妙になるという意味である。つまり、先端速度による因果律は、せいぜいカットオフ Λ の付近までのものとして近似的に求められるのみとなる。

背景を用いる方法を用いて議論する場合にも同じことがいえる。しばしば背景は、高階微分項を含んだ理論によって計算されるが、これが有効なのは、あくまで理論のカットオフ以下のスケールである。その解が実現されるために必要なエネルギーがそのカットオフを上回っていると因果律の成否の判定は微妙になってしまう。

以上の事情は NMG 理論でどのようになっているであろうか。まず、線形理論の速度はスカラー場と同じく群速度で定義でき、同じように光速度を下回っている。AdS 時空上の摂動でも同様である。問題は、相互作用するときつまり、高階微分項との結合がある時だが、あまりよくわかっていない。先端速度が光速を守るかどうかもわかっていない。そもそも NMG 自体がカットオフを持っており、最初に現れるスケールが $\Lambda_{\frac{5}{2}} = (M_P^{\frac{1}{2}} m^2)^{\frac{2}{5}}$（$G^{-1} = M_P$）であるので、このスケールまでは良いがそれ以降は群速度も先端速度も大して意味がなくなる。NMG はこの $\Lambda_{\frac{5}{2}}$ を固定した decoupling limit で Gallileon の相互作用

$$\mathcal{L} = 2\pi\Box\pi - \frac{1}{2}(\partial\pi)^2\Box\pi \tag{5.24}$$

を持つ。[12] での議論に依ると、Gallileon 型の相互作用をする理論は全て、正常な補完は持たず、超光速成分も含む。従って、NMG も同様にして位相速度の意味で因果律を破り、正常な補完を持ち得なくなっている可能性がある（ただしこれは、decoupling limit をとっての議論である。これは必ずしもそのままの理論で計算した場合には一致しないしないことが 4 次元の mssive gravity の場合において示されている [13]）。

shock wave 時空を用いた因果律についても上記のような量子論的な障害は存在する。もし shock wave 時空上の因果律の意味でその破れが起きた場合、低エネルギーの近似が破綻したと考えて、ミクロのより基礎的な理論に補完して再度因果律の検証をする必要があるが、この補完したミクロの理論に非自明な制限が加わるということが知られている [14]。この先行研究を受けて、ここで二つ目の因果律を考察する動機が生じる。もし NMG 理論や ZDG 理論が何か基礎的な理論の意味のある低エネルギーの有効理論であるならば、因果律の破れからその基礎的な理論に対する条件を得ることできる可能性があるからである。

NMG 理論および ZDG 理論における shock wave 背景を用いた因果律の検証は、本論文の主な結果である。次節以降これを詳しく見ていこう。

5.3 Einstein Gravity 理論と因果律

shock wave 時空を用いて因果律を成否を調べる方法について説明するために、まずは Einstein 重力理論（一般相対性理論）を例にとって解説する。因果律を調べるために使う shock wave の時空は以下の計量の仮定で与えられる。

$$ds^2 = F(u,\ \vec{y})du^2 - dudv + d\vec{y}^2_{d-2}. \tag{5.25}$$

ここで、$,\vec{y}$ はヌル方向の座標 $u,\ v$ と直行するデカルト座標である。仮定より $F(u,\ \vec{y})$ は v に依存していないのでそちらの方向には一様である。これは、この解が平面波であることを意味する。この波を生じさせるソースとして以下の物質場を考える。

$$T_{\mu\nu} = p\delta(u)\delta(\vec{y})\delta^u_\mu\delta^u_\nu. \tag{5.26}$$

ここで $p > 0$ である。これは、u 方向に光速で移動する非常に局在した物質、つまり無質量の粒子である。この粒子が u 方向を移動する際に局在した波がその周りにできるはずである。

実際に解を構成して確認する。Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = GT_{\mu\nu} \tag{5.27}$$

より、

$$\partial^2_{\vec{y}}F = -2Gp\delta(u)\delta(y) \tag{5.28}$$

となる。ここで $\partial^2_{\vec{y}}$ は $\vec{y}$ に対する $d-2$ 次元のラプラシアンである。これは容易に解けて、$d > 4$ で

$$F(u,\ \vec{y}) = \frac{\Gamma(\frac{d-4}{2})}{2\pi^{\frac{d-4}{2}}}\delta(u)\frac{Gp}{r^{d-4}} \tag{5.29}$$

となる。ここで、Γ はガンマ関数であり $r = |\vec{y}|$ である。

さて、ここでもう一つの無質量粒子が v 方向にに向けて移動しているとする。$F(u,\ \vec{y})$ は $u = 0$ でデルタ関数的な特異性を持っているので、この粒子の軌道を $u = 0$ を超えて一つの座標で追うことはできなくなる。次のような新しい座標を導入する。

$$v = v_{new} + \frac{\Gamma(\frac{d-4}{2})}{2\pi^{\frac{d-4}{2}}}\frac{Gp}{b^{d-4}}\theta(u). \tag{5.30}$$

ここで b は粒子が u=0 にある時の $\vec{y}$ 方向への距離である。全微分をとって計量 (5.43) に代入してやると、デルタ関数の部分がちょうど差し引かれ、新しい座標で平坦になる。このとき粒子は v 座標を $\frac{\Gamma(\frac{d-4}{2})}{2\pi^{\frac{d-4}{2}}}\frac{Gp}{b^{d-4}}$ だけ不連続に移動している。これが、この shock wave 時空が与える Shapiro 時間遅延である。この値が正であることが重要である。もし常にそうならば、常に起きるのは時間の過ぎる方向への移動だからである。そして $d > 4$ の一般相対性理論の場合には確かにそうなっていることが分かる。$d = 4$ の時には、時間の遅れが距離によって減衰しないため、その「遅れ」をどう定義するかが微妙である。しかし、座標の継ぎ目で正の方向に移動させるので、これも時間の遅れの効果である、

$d = 3$ の場合を見てみる。方程式は

$$\partial^2_y F = -2Gp\delta(u)\delta(y) \tag{5.31}$$

となり、解は

$$F(u, y) = C_0 + C_1 y - Gp\delta(u)y\theta(y) \tag{5.32}$$

である。ここで、$C_0,\ C_1$ は u の任意関数である。この最初の二項は一見解の配位があるように見えるが、これらは、適切な座標変換で計量の形を全く変えることなく消すことが出来る。実際、ソースがなければ真空で、伝播できる自由度もないので、座標による見せかけのもである。以下のように置けばよい。

$$(u,v,y)\to(\tilde{u}=\int\frac{du}{f^2(u)},\ \tilde{v}=v-\frac{1}{f(u)}\frac{df}{du}y+\int dug(u),\ \tilde{y}=\frac{y}{f(u)}). \tag{5.33}$$

関数 $g,\ f$ は自由に取れるので、$C_0,\ C_1$ は自由に取れる。そこで、第三項が $y\to\infty$ で Minkowski 時空になるように、$C_0=0,\ C_1=\delta(u)$ ととると、

$$F(u,y)=Gp\delta(u)y\theta(-y) \tag{5.34}$$

となる。これは正の関数なので、3 次元でも一般相対性理論は因果律を守る。

一般相対性理論では、意味のある次元（$d>2$）全てで、因果律を確認できた。しかしこれは、低エネルギー近似の最低次でしかない。より運動量の大きな粒子が飛んでいる場合、カットオフ $M_P=G^{\frac{-1}{d-2}}$ までに、より高次の項が出現する可能性がある。[14] では、これらの可能性について考察し、実際に高階微分項を含む理論では、一般に時間の逆行が起き、因果律が破れることが示された。それを防ぐには、対応する項が現れたスケールで新たな理論で補完するしかないが、そのためには無限個の有質量高階スピン粒子が必要であることが同論文によって示された。このような理論の例はもちろん弦理論である。そこで、低次元の重力理論で整合的な理論である NMG 理論や ZDG 理論にも同じことを期待するのは自然である。そこでまず shock wave 時空上で各々の理論が因果律を満たすのかを検証することにした。

5.4 New Massive Gravity 理論と因果律

一般相対性理論で例を見たのでいよいよ NMG での shock wave 時空を考察する。運動方程式を再掲する。

$$-G_{\mu\nu}+\tfrac{1}{m^2}K_{\mu\nu}=0, \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu}=\Box R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{4}(\nabla_\mu\nabla_\mu R+\Box Rg_{\mu\nu})-4R_{\nu\lambda}R^\lambda_\mu\\ -\tfrac{9}{4}RR_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}(\tfrac{3}{2}R_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho}-\tfrac{13}{16}R^2).\end{aligned} \tag{5.36}$$

仮定 (5.43) を代入して、

$$\frac{1}{2}\partial_y^2F(u,y)-\frac{1}{m^2}\partial_y^4F(u,y)=2Gp\delta(u)\delta(y) \tag{5.37}$$

を得る。この解は、

$$F(u,y)=C_1y+C_0+\frac{Gp\delta(u)\theta(y)}{m^2}(e^{-m|y|}+m|y|) \tag{5.38}$$

となる。一般相対性理論の場合と同じく最初の二項は好きな形にとれるので、今回も $y\to$ inf で Minkowski 時空になるように $C_0,\ C_1$ をとる。最終的に、

$$F(u,y)=\frac{Gp\delta(u)}{m^2}(e^{-m|y|}-my\theta(-y)) \tag{5.39}$$

となる。$y > 0$ の領域で、この関数は正の値しかとらない。従って、常に時間の遅れを引きおこして、時間を逆行することは無い。NMG は因果律を守ることがわかった。

ここで興味深い事実が一つある。NMG が ghost を持たないのは上述したように Einstein-Hilbert 項の部分の符号を負にとったからだが、その符号を $\sigma = \pm$ と書くと解は

$$F(u,y) = \frac{-\sigma G p \delta(u)}{m^2}(e^{-m|y|} - my\theta(-y)) \tag{5.40}$$

となる。ここで面白いことがわかる。因果律が守られたのはこの符号を負にとったからなのである。つまり、理論の Unitary 性と因果律は必ず両立し、破れるときにも同時に破れる。

5.5 Zwei Dreibein Gravity 理論と因果律

次に、Zwei Dreibein Gravity 理論での因果律を調べる。しかし、ここで注意が必要である。Zwei Dreibein Gravity 理論は Dreibein で定義されており、しかも計量が二つ存在する。上記の Shock wave を考えるうえで、どのように解の仮定を置けばいいだろうか。ここでは、$\beta_2 = 0$ ととっているので、 Dreibeine_2^a は e_1^a によって決定される。そこで、e_1^a の方を実際の計量と考えて、以下のように仮定を置く。

$$e_1^0 = \sqrt{f(u,\ y)}du + \tfrac{1}{2\sqrt{f}}dv,\quad e_1^1 = \tfrac{1}{2\sqrt{f}}dv,\quad e_1^2 = dy, \tag{5.41}$$

$$e_2^0 = g(u,\ y)du + h(u,\ y),\quad e_2^1 = p(u,\ y) + q(u,\ y)dv,\quad e_1^2 = s(u,\ y)dy. \tag{5.42}$$

ここで e_2^a についている関数 $g,\ h,\ p,\ q,\ s$ は、いずれも、e_1^a について解いた後に、その解を用いて後で決定される関数である。e_1^a の仮定を計量の言葉に直すと

$$ds^2 = -f(u,\ \vec{y})du^2 - dudv + d\vec{y}^2_{d-2} \tag{5.43}$$

となる。f の前の負号に注意するべきである。このときは、解が常に負であるならば因果律が満たされる。運動方程式

$$0 = \sigma R_1^a + \frac{1}{2}m^2\epsilon^{abc}\left[\alpha_1 e_{1\,b}e_{1\,c} - 2\beta_1 e_{1\,b}e_{2\,c}\right], \tag{5.44}$$

$$0 = R_2^a + \frac{1}{2}m^2\epsilon^{abc}\left[\alpha_2 e_{2\,b}e_{2\,c} - \beta_1 e_{1\,b}e_{1\,c}\right], \tag{5.45}$$

$$0 = T_I^a \tag{5.46}$$

に代入するのだが、e_2^a が e_1^a で解けることによりこの方程式は f につての高階微分方程式になる。また、仮定が単純であるため、実際にはすべての項は効かず、4 階微分方程式になる。その形は、

$$\frac{-\sigma}{2m^2\gamma\beta_1}\partial_y^4 f + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{\gamma}\right)\partial_y^2 f = Gp\delta(u)\delta(y) \tag{5.47}$$

である。これは、NMG の時とほぼ同様にして解くことができて、

$$\begin{aligned} f(u,y) &= c_1 y + c_0 \\ &+ Gp\delta(u)\theta(y)\left(-m^2\beta_1\frac{\sigma+\gamma}{\sigma}\right)^{-1} \\ &\cdot\left(\mathrm{epx}\left[-m\sqrt{\beta_1\frac{\sigma+\gamma}{\sigma}}|y|\right]+m\sqrt{\beta_1\frac{\sigma+\gamma}{\sigma}}|y|\right) \end{aligned} \tag{5.48}$$

となる。この関数は

$$m^2\beta_1\frac{\sigma+\gamma}{\sigma}>0 \tag{5.49}$$

の時のみ常に負である。つまりそのときのみ因果律が守られる。この条件は ZDG 理論が背景時空中での有効質量の二乗 (4.18) が正になる条件と同じものである。有効質量の二乗が正でなければ分離した $h_{-a}, v_-{}^a$ の自由度が安定にならないので、このときも理論の Unitary 性と、因果律は同時に満たされ、同時に破れることがわかった。

5.6 Anti-de Sitter 時空への拡張

ここまでで、NMG 理論と ZDG 理論の因果律を平坦な時空上に shock wave が存在する時空上で考察してきた。しかしながら、このような shock wave は曲がった時空上でも考察することができる。その時にも、時間の逆行を起こさず因果律を守るかは平坦時空上で因果律を守っていても一般には明らかでない。そこでここでは、Anti de Sitter(AdS) 時空上での shock wave による Shapiro 遅延を解析し、この場合でも因果律が守られているかを NMG 理論、ZDG 理論の両方で確認する。

5.6.1 Einstein Gravity 理論の AdS 上での因果律

平坦な場合と同様に、まず Einstein 重力理論を用いて、因果律の成否を調べる方法を説明する。AdS 時空上での shock wave 時空の仮定は以下のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{l^2}{y^2}(F(u,y)du^2 - dudv + dy^2). \tag{5.50}$$

ここで、ℓ は AdS 半径である。平坦時空の場合に倣って、$F(u,\ y)=0$ のとき、この計量はポアンカレ座標系における AdS 時空になっている。

Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = Gp\frac{\ell}{y}\delta^u_\mu\delta^u_\nu\delta(u)\delta(y-a) \tag{5.51}$$

より $F(u,\ y)$ について以下の方程式を得る。

$$\frac{\partial_y F}{2y} - \frac{\partial_y^2 F}{2} = Gp\frac{\ell}{y}\delta(u)\delta(y-a). \tag{5.52}$$

これは容易に解くことができて、

$$F(u,y) = C_2 y^2 + C_0 - 2Gp\ell\theta(y-a)\left(a^{-1}y - 1\right) \tag{5.53}$$

となる。平坦時空の場合と同様に、C_2 と C_0 は座標変換によって自由にとることができるので、$y \to \infty$ で AdS 時空になるように選ぶと解は、

$$F(u,y) = 2Gp\ell\theta(-y+a)\left(-a^{-1}y + 1\right) \tag{5.54}$$

となる。この関数は常に 0 以上の値をとるので、この shock wave によっては時間は常に遅れる方向に Shapiro 遅延が働き、因果律が守られる。このようにして、AdS 上でも shock wave による Shapiro 遅延によって Einstei 重力理論では因果律が守られることを見た。

5.6.2 NMG 理論の AdS 上での因果律

次に、NMG 理論で同様の解析を行い、因果律が守られているかを確認する。宇宙項が入った NMG 理論の運動方程式は、以下のように与えられる。

$$-G_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = GT_{\mu\nu}, \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = &\Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\nabla_\mu \nabla_\mu R + \Box R g_{\mu\nu}) \\ &- 4R_{\nu\lambda}R^\lambda_\mu - \frac{9}{4}RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left(\frac{3}{2}R_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho} - \frac{13}{16}R^2\right). \end{aligned} \tag{5.56}$$

これに、AdS shock wave の仮定と点状のソースを代入すると、方程式

$$-\frac{y^3}{2\mu^2}\partial_y^4 F - \frac{y^2}{\mu^2}\partial_y^3 F + \frac{(1+2\mu^2)y}{4\mu^2}\partial_y^2 F - \frac{(1+2\mu^2)}{4\mu^2}\partial_y F = \frac{Gpa^2}{\ell}\delta(y-a) \tag{5.57}$$

を得る。ここで $\mu = m\ell$ は無次元のパラメータである。この方程式も解くことができて、漸近的に AdS になる解は、

$$\begin{aligned} F(u,y) = &-\frac{2Gpa^{-\sqrt{\frac{1}{2}+\mu^2}}\mu^2}{\ell(-1+2\mu^2)\sqrt{1+2\mu^2}} y^{-\sqrt{\frac{1}{2}+\mu^2}}\Big(-\sqrt{2}a^{1+\sqrt{2+4\mu^2}}y\theta(y-a) \\ &- \sqrt{2}ay^{1+\sqrt{2+4\mu^2}}\theta(-y+a) \\ &- \sqrt{1+2\mu^2}a^{2+\sqrt{\frac{1}{2}+\mu^2}}y^{\sqrt{\frac{1}{2}+\mu^2}}\theta(-y+a) \\ &+ \sqrt{1+2\mu^2}a^{\sqrt{\frac{1}{2}+\mu^2}}y^{2+\sqrt{\frac{1}{2}+\mu^2}}\theta(-y+a)\Big) \end{aligned} \tag{5.58}$$

となる。この解は $\mu^2 > \frac{1}{2}$ のとき、常に正の値をとるので Shapiro 遅延は時間が遅れる方向に働き因果律が守られる。逆に、これ以外の領域では一般に因果律は守られない。ここで、この $\mu^2 > \frac{1}{2}$ というパラメータの領域は第四章で説明した、AdS 上の NMG 理論の摂動理論において unitarity が守られる領域であった。従って、NMG 理論では AdS 時空上でも unitarity と因果律が両立し、片方が守られるときはもう片方も必ず守られ、片方が破れるともう片方も破れるという性質がある。

5.6.3 ZDG 理論の AdS 上での因果律

ZDG 理論でも AdS 上の shock wave を考察し因果律の成否を調べる。まず、考える計量は e_1^a を次のようにとることで定義できる。

$$e_1^0 = \tfrac{l}{y}\sqrt{f(u,y)}du + \tfrac{l}{y}\tfrac{1}{2\sqrt{f}}dv, \quad e_1^1 = \tfrac{l}{y}\tfrac{1}{2\sqrt{f}}dv, \quad e_1^2 = \tfrac{l}{y}dy, \tag{5.59}$$

$$e_2^0 = g(u,y)du + h(u,y), \quad e_2^1 = p(u,y) + q(u,y)dv, \quad e_1^2 = s(u,y)dy. \tag{5.60}$$

平坦時空の場合と同様に、理論では $\beta_2 = 0$ の場合を考え、e_2^a が e_1^a によって解ける状況を考える。従って $g(u,y)$, $h(u,y)$, $p(u,y)$, $q(u,y)$, $s(u,y)$ は、$f(u,y)$ について方程式を解けば、そのあとに求められる。$f(u,y)$ についての運動方程式は高階微分の方程式となり以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{2y^2(\sigma-\alpha_1\ell^2m^2)}\Bigg[&y^4\frac{\partial^4 f(u,y)}{\partial y^4} + 2y^3\frac{\partial^3 f(u,y)}{\partial y^3}\\ &- \left(1+M^2\ell^2\right)\left(y^2\frac{\partial^2 f(u,y)}{\partial y^2} - y\frac{\partial f(u,y)}{\partial y}\right)\Bigg] = \frac{\ell}{y}Gp\delta(u)\delta(y-a).\end{aligned} \tag{5.61}$$

ここで、M は (4.18) によって与えられる有効的な質量パラメータである。この方程式は NMG 理論の場合とほぼ同じ形をしているので、同様に解くことができて、解は

$$\begin{aligned}f(u,y) =& \frac{2Gpa^{-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M^2\ell^2}{2}}}(\sigma-\alpha_1\ell^2m^2)}{\sigma\ell(-1+M^2\ell^2)\sqrt{1+M^2\ell^2}}y^{-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M^2\ell^2}{2}}}\Big(-\sqrt{2}a^{1+\sqrt{2+2M^2\ell^2}}y\theta(y-a)\\ &- \sqrt{2}ay^{1+\sqrt{2+2M^2\ell^2}}\theta(-y+a)\\ &- \sqrt{1+M^2\ell^2}a^{2+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M^2\ell^2}{2}}}y^{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M^2\ell^2}{2}}}\theta(-y+a)\\ &+ \sqrt{1+M^2\ell^2}a^{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M^2\ell^2}{2}}}y^{2+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{M^2\ell^2}{2}}}\theta(-y+a)\Big)\end{aligned} \tag{5.62}$$

となる。この解においては、$(\sigma-\alpha_1\ell^2m^2) > 0$ かつ $(-1+M^2\ell^2) > 0$ の場合に $f(u,y)$ は常に負となり、Shapiro 遅延によって時間が逆行することなく因果律が守られる。二番目の条件は NMG 理論の場合と同様に、AdS 周りでの摂動の成分が不安定にならず、理論が Unitary であるための条件である。一つ目の条件は、e_2^a を e_1^a について解き、高階微分の理論を得ようとしたときに現れる項をすべて足し上げることによって現れる $(\sigma-\alpha_1\ell^2m^2)$ の項の負号についての条件である。これは新しい条件だが、第二の条件と整合的に満たすことが可能である。従って ZDG 理論もまた AdS 時空上において Unitarity と Causality を同時に満たすことができる理論になっている。

6　まとめ

本論文ではshock wave時空を用いる方法で因果律を定義し、NMG理論とZDG理論という高い整合性と興味深い性質を持つ理論について、これらの理論でshock wave解を構成して因果律を守っていることを示し、またそのための条件が、理論の整合性に必要な別の条件であるunitarityの条件と整合的になることを示した。しかも驚くべきことに、これら二つの性質、因果律とunitarityの条件が深く関係していることを発見した。

NMG理論とZDG理論はghostが出現しないという条件から、厳しく制限されている理論である。NMGは3次元の高階微分重力理論だが、ghostを回避するためのパラメータの調整で、質量パラメータmの一つしか任意にとれるパラメータは残っていない。しかも途中で見て分かったように、この質量パラメータも曲がった空間上では、非自明な制限を受ける。従って、もし因果律の保持の条件がこのパラメータを制限していたら、この理論は整合的に存在できるパラメータの領域がなくなっていた可能性がある。しかし実際にはそうはならず、理論のunitary性と因果律が同時に満たされるという結果になった。しかもこれらは互いが破れるともう一方も破れるようにできている。理論の因果律とunitary性は本来関係はないものであるにもかかわらずである。実際[14]では、ghostを持たないにも関わらず、因果律を破る重力の理論の例も考察されている。

NMG理論のみならず同様の現象がZDG理論でも見られた。こちらの理論はパラメータをたくさん持つが、ghostを消すためと、高階微分理論と対応を付けて、考察するために$\beta_2 = 0$という状況に限って考察した。このときZDG理論を背景から摂動展開して、力学自由度の成分を分離した時に現れる有効質量が正の時のみ、因果律が保たれた。この有効質量が正の時のみ背景上のmodesは安定なため、やはり理論のunitary性と因果律が両立する形で表れている。

また、NMG理論ZDG理論の両方について平坦時空だけでなくAdS時空上のshock waveについても因果律が保たれることを示し、このときにもAdS上で摂動の自由度が安定である（unitaryである）条件と、因果律の条件が整合的になることを示した。

この解析を通して、理論の因果律が保たれていることを確認しただけで無くunitarityとの興味深い対応も発見した。この対応は、これらの理論だけのものなのかそれとも他の理論にも同様の性質があるのかは重要である。NMG理論もZDG理論も拡張や変種の理論は数多く存在する。それらについても因果律の構造を調べ、unitarityと対応関係を持つかどうかを調べる必要がある。

また、このような対応がなぜ成り立つのか、因果律を確認する他の手法ではどうなるか、そもそもこの結果をもって因果律が守られたといってよいのかなどという、根本的疑問にも答えなければいけない。5.1節で述べたように、NMG理論では先端速度が光速を超えているかどうかがわかっていない。また、低エネルギーの理論として正常な補完を持ち得るか、その破綻によって位相速度または群速度の破れが起きているかも厳密には明らかになっていない。これら他の因果律の研究を行う必要性があるとともに、今回の結果がこれらの他の因果律の研究とどう関係してくるかは今後の研究課題の一つである。

今回の手法は背景をshock waveという特定のものしか考えていない。特定の配位の重力場によって時間が遅れたり進んだりするならば、他の配位では、今回安全だった理論も因果律が破れる可能性がある。また、背景以外の状況も限定的である。他のスピンをもつ

場との相互作用によるスピンの結合の効果があるときや、shock wave そのものが複数ある時の解の安定性（この解を用いて CTC を作るためにはこのような性質が必要になる）についてよく考えられているているとは言えない。さらに ZDG 理論に関しては $\beta_2 = 0$ の場合しか考察しておらず物質場も e_2^a にしか結合しないと暗に仮定していた。$\beta_2 = 0$ でない場合でも BD ghost が出ず、整合的な理論になる場合はあるので、その時に同様の解析をどのようにして行うかは大きな課題の一つである。また、ZDG に限らず一般の計量が複数ある重力理論について物質場の結合をどのようなものと仮定するのかは大きな問題である。本研究の場合では片方にのみ結合する 1 種類の物質場を考えたが、一般には本来両方の物質場と結合できてもよいはずである（それで ghost が出現するかは別問題であるが)。その時に shock wave をどう作るか、因果律をどう調べるかはまだよくわかっていない。これらについても今後の課題となる。

今回 NMG 理論と ZDG 理論について因果律が守られることを見たが、これの意味することは何であろうか。まず、当然だがこれらの理論は CTC 等の病的な現象を古典論の範囲で持たないことがわかった。従って、理論として安全に用いることができる。もう一つ、この shock wave を用いる解析で、より基礎的な理論の情報を得るという目的もあった。しかし、今回の結果では、因果律を守っているという結果であったので、そのような情報を得ることはできなかった。これは何を意味するのであろうか。一つの可能性は、この事実をもって NMG 理論や ZDG 理論は補完の理論を持たず、それ自体で完結して定義されるという主張である。しかしこれは考えにくい。NMG 理論は一般相対性理論同様繰り込み不可能な理論であり、低エネルギー近似が破綻するスケールが存在している。その拡張である ZDG も同様である。もう一つの可能性は補完は必要だが、この解析からはその制限が得られなかったというものである。ここの補完の理論はどのようなものであり得るだろうか。一般相対性理論の場合同様、弦理論だろうか。しかし現時点において NMG 理論や ZDG 理論はおろか 3 次元の Einstein 重力理論にさえ弦理論からの適切なコンパクト化と低エネルギー極限による導出は存在していない。これが、導出が存在しないのか単に発見されていないのかは明らかでないが少なくとも、弦理論という具体例を一つ持つ高次元の一般相対性理論と異なり、NMG 理論や ZDG 理論を補完すべき理論については何もわかっておらず例もないということである。従って、弦理論との関係を含め、これらの理論を補完する理論の構築の研究が重要である。因果律の更なる研究は、その発見に重要な役割を果たすと考えられる

上述の通り、全体としてこの因果律の研究はまだ序盤の段階であり課題が多く残っている。上述の問題に取り組むことで NMG 理論や ZDG 理論の高い整合性が証明され、新しい知見が得られるだろう。

謝辞

本研究の遂行と論文の執筆、提出に関して指導教員の野尻伸一教授には多くのことについてご指導、ご協力していただきました。研究活動中ずっとお世話になりましたこと、大変感謝しております。この場を借りて御礼申し上げます。また、重力・素粒子的宇宙論研究室の皆さんには研究についてはいつも議論してしてもらい、私生活においてもいつも助けていただいています。研究室の皆様にも心より感謝申し上げます。

参考文献

[1] Suraj N. Gupta. "Gravitation and Electromagnetism". *Phys. Rev.*, Vol. 96, pp. 1683–1685, Dec 1954.

[2] Robert H. Kraichnan. "Special-Relativistic Derivation of Generally Covariant Gravitation Theory". *Phys. Rev.*, Vol. 98, pp. 1118–1122, May 1955.

[3] Steven Weinberg. "Photons and Gravitons in Perturbation Theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations". *Phys. Rev.*, Vol. 138, pp. B988–B1002, May 1965.

[4] John F. Donoghue. "Leading Quantum Correction to the Newtonian Potential". *Phys.Rev.Lett.* **72** , 2996-2999, (1994).

[5] John F. Donoghue. "General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections". *Phys.Rev.* **D50** , 3874-3888, (1994).

[6] John F. Donoghue, Mikhail M. Ivanov, and Andrey Shkerin. "EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory". arXiv:1702.00319, (2017).

[7] C. P. Burgess. "Quantum Gravity in Everyday Life: General Relativity as an Effective Field Theory". *LivingRev.Rel.* **7** , 5, (2004).

[8] David G. Boulware and S. Deser. "Can gravitation have a finite range?". *Phys. Rev.* **D6**, 3368, (1972).

[9] M.Veltman H.van Dam. "Massive and mass-less Yang-Mills and gravitational fields". *Nuclear Physics B.* **Volume 22** ,Pages 397-411, (1970).

[10] Valentin I. Zakharov. "Linearized gravitation theory and the graviton mass". *JETP Lett.* **12** ,312, (1970).

[11] Lavinia Heisenberg Claudia de Rham and Raquel H. Ribeiro. "Quantum corrections in massive gravity". *Phys. Rev. D.* **88** ,084058, (2013).

[12] Sergei Dubovsky Alberto Nicolis Allan Adams, Nima Arkani-Hamed and Riccardo Rattazzi. "Causality, Analyticity and an IR Obstruction to UV Completion". *JHEP*. **0610**, 014, (2006).

[13] Clifford Cheung and Grant N. Remmen. "Positive Signs in Massive Gravity". *JHEP*. **1604**, 002, (2016).

[14] Xian O. Camanho, Jose D. Edelstein, Juan Maldacena, and Alexander Zhiboedov. "Causality Constraints on Corrections to the Graviton Three-Point Coupling". *JHEP*. **1602**, 020, (2016).

[15] José D. Edelstein, Gaston Giribet, Carolina Gómez, Ercan Kilicarslan, Matías Leoni, and Bayram Tekin. "Causality in 3D massive gravity theories". *Phys. Rev.* **D95**, 104016, (2017).

[16] Timothy J. Hollowood and Graham M. Shore. "Causality and Micro-Causality in Curved Spacetim". *Phys.Lett.* **B655**, 67-74, (2007).

[17] G. M. Shore. "Superluminality and UV Completion". *Nucl.Phys.* **B778**, 219-258, (2007).

[18] Gabadadze-Gregory Dvali, G. R. and Massimo Porrati. "4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space". *Phys. Lett.* **B485** ,208-214, (2000).

[19] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. "The Galileon as a local modification of gravity". *Phys. Rev.*, Vol. D79, p. 064036, 2009.

[20] Andrei Gruzinov. "All Fierz-Paulian massive gravity theories have ghosts or superluminal modes". 2011.

[21] S. Deser, K. Izumi, Y. C. Ong, and A. Waldron. "Problems of massive gravities". *Mod. Phys. Lett.*, Vol. A30, p. 1540006, 2015.

[22] Irwin I. Shapiro. "Fourth Test of General Relativity". *Phys. Rev. Lett.* **13** , 789, (1964).

[23] Olaf Hohm Wout Merbis Eric A. Bergshoeff, Sjoerd de Haan and Paul K. Townsend. "Zwei-Dreibein Gravity". *PhysRevLett.* **111** ,111102, (2013).

[24] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend. "Massive Gravity in Three Dimensions". *Phys.Rev.Lett.* **102** , 201301, (2009).

[25] K. S. Stelle. "Classical Gravity with Higher Derivatives". *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 9, pp. 353–371, 1978.

[26] Ibrahim Gullu and Bayram Tekin. "Massive Higher Derivative Gravity in D-dimensional Anti-de Sitter Spacetimes". *Phys.Rev.* **D80** , 064033, (2009).

[27] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K. Townsend. "More on Massive 3D Gravity". *Phys.Rev.* **D79** , 124042, (2009).

[28] M. Fierz and W. Pauli. "On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field". *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. A173, pp. 211–232, 1939.

[29] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley. "Resummation of Massive Gravity". *Phys.Rev.Lett.* **106** , 231101, (2011).

[30] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, David Pirtskhalava, Andrew J. Tolley, and Itay Yavin. "Nonlinear Dynamics of 3D Massive Gravity". *JHEP.* **06** , 028, (2011).

[31] Claudia de Rham. "Massive Gravity". *Living Rev. Relativity.* **17** , 7, (2014).

[32] Wout Merbis Eric A. Bergshoeff, Andres F. Goya and Jan Rosseel. "Logarithmic Ads Waves and Zwei-Dreibein Gravity". *JHEP.* **04** ,012, (2014).

[33] J. D. Brown and Marc Henneaux. "Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three-dimensional gravity". *Comm. Math. Phys.* **Volume 104** , Number 2, 207-226((1986).

[34] Per Kraus and Finn Larsen. "Microscopic black hole entropy in theories with higher derivatives". *JHEP*, Vol. 09, p. 034, 2005.

[35] C. Imbimbo, A. Schwimmer, S. Theisen, and S. Yankielowicz. "Diffeomorphisms and holographic anomalies". *Class. Quant. Grav.*, Vol. 17, pp. 1129–1138, 2000.

[36] Hiromi Saida and Jiro Soda. "Statistical entropy of BTZ black hole in higher curvature gravity". *Phys. Lett.*, Vol. B471, pp. 358–366, 2000.

[37] Pierre. Sénéchal Philippe.Francesco, Pierre.Mathieu. "Conformal Field Theory", 1999.

[38] C. Deffayet, J. Mourad, and G. Zahariade. "Covariant constraints in ghost free massive gravity". *JCAP*, Vol. 1301, p. 032, 2013.

[39] Máximo Bañados, Cedric Deffayet, and Miguel Pino. "The Boulware-Deser mode in 3D first-order massive gravity". *Phys. Rev.*, Vol. D88, No. 12, p. 124016, 2013.