DOI:10. 18999/ecos. 65.3-4. 1

政策ポートフォリオの選択とリバランス

中　島　英　喜

In this paper two normative decision makings by a standard institutional investor are investigated, policy portfolio planning and efficient rebalance strategy toward the selected plan. We consider costs for portfolio planning as well as transaction costs in rebalance. We also consider the difficulty in knowing the true values of parameters about risky asset returns. Some efficient rules or strategies gotten here can be opposed by cognitive biases. Especially, low confidence for estimated parameter values such as expected returns can make cognitive biases. If a rebalance execution or revising the selected plan is hesitated to on account of the low confidence, a cognitive bias should be suspected.

Keywords: Policy portfolio, Efficient rebalance, Costs, Low confidence for estimated parameter values, Cognitive bias

Ⅰ．はじめに

証券投資の理論（Modern Portfolio Theory）では，投資家は自身の期待効用を最大化するポートフォリオを選択する。その際，投資リスクは投資収益の分散もしくは標準偏差として近似的に定量化される。また，この投資リスクに対する投資収益の期待値の比率は，平均・分散効率性などと呼ばれる。

投資収益の期待値／投資リスク

摩擦のない標準的な仮定の下で，期待効用を最大化する投資家は（a）上記比率を最大化するとともに，（b）上記比率の分母の最適値を選択する。この意思決定の分割は分離定理（Separation Theorem）と呼ばれる。前者（a）は投資リスクの質の選択に関する意思決定であり，後者（b）は投資リスクの量の選択に関する意思決定と言える。

一方，現実に眼を転じると，我が国の短期金利は過去20年余りに亘り年率0.5%以下の低水準で推移している。制度的な資金を預かる機関投資家にとって，これは運用難と言うべき状態であり，それ故に，規制当局や委託者等の外部主体からは，明確で合理的な説明を求められている。例えば，国内の代表的な機関投資家である企業年金の基金には，「運用の基本方針」と「政策的資産構成割合」の策定が2018年４月以降義務付けられることになった。

こうした動きは，機関投資家資の現実の意思決定やその情報開示に関して，上述の証券投資の理論をより直接適用するよう求めるものと思われる。しかし，現実の市場には摩擦があり，理想化された仮定の下で得られる解が最適であるとは限らない。そこで本稿では，上述の機関投資家に求められる「政策的資産構成」に焦点を当て，取引コストやその他摩擦を無視できない時の構成計画の策定とその運用を考える。なお以下では，政策的資産構成を政策ポートフォリオと呼び，その計画と実際の乖離の調整（計画の運用）をリバランスと呼ぶ。

Ⅱ．基本的な考え方

本節では，安全資産とN種類の危険資産が存在し，これら資産の取引にコストがかかるケースを想定して，１期間投資における最適リバランス問題を考える。まず，N種類の危険資産のリターン・ベクトルRの期待値と共分散行列をそれぞれ$\mu+r_s\mathit{1}$とΣで表す。なおr_sは１期間投資の安全利子率であり，$\mathit{1}$は全要素１の定数ベクトルである。

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{E}[R-r_s\mathit{1}]\\ \Sigma &= \mathrm{var}[R]\\ &= \mathrm{E}[RR']-\mathrm{E}[R]\mathrm{E}[R'] \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで x' はベクトル x の転置であり，$\mathrm{E}[\cdot]$ と $\mathrm{var}[\cdot]$ は期待値と分散の演算子である。続いて，ポートフォリオ π の選択によって，下記の近似的な期待効用関数 U を最大化する問題を考える（λ は投資家に固有な定数）。

$$U=\mu'\pi-0.5\lambda(\pi'\Sigma\pi) \tag{2}$$

この最大化問題の解である最適ポートフォリオ π^* は次式で与えられる。

$$\pi^*=(\lambda\Sigma)^{-1}\mu \tag{3}$$

逆に，この最適ポートフォリオ π^* が与えられた場合，これを用いて N 個の投資対象の期待リターン μ を逆算できる。

$$\mu=(\lambda\Sigma)\pi^*$$

この逆算値と最適ポートフォリオ π^* を(2)式に代入すると，期待効用の最大値 U^* は次式で表される。

$$\begin{aligned}U^*&=(\lambda\Sigma\pi^*)'\pi^*-0.5\lambda(\pi^{*\prime}\Sigma\pi^*)\\&=0.5\lambda(\pi^{*\prime}\Sigma\pi^*)\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式を使うと，期待リターン μ を明示的に用いることなく，期待効用やリバランスの問題のベンチマークを記述できる。そこで，現実のポートフォリオ π が最適ポートフォリオ π^* と乖離する局面を考え，その乖離を δ で表す。

$$\delta=\pi-\pi^*$$

この場合，現実のポートフォリオ $\pi=\pi^*+\delta$ の下で得られる期待効用 U は，最適ポートフォリオ π^* の下で得られる期待効用 U^* に対して $U-U^*\leq 0$ だけ劣後する。

$$\begin{aligned}U-U^*&=[(\lambda\Sigma\pi^*)'\pi-0.5\lambda(\pi'\Sigma\pi)]-[0.5\lambda(\pi^{*\prime}\Sigma\pi^*)]\\&=[(\lambda\Sigma\pi^*)'(\pi^*+\delta)-0.5\lambda\{(\pi^*+\delta)'\Sigma(\pi^*+\delta)\}]-[0.5\lambda\{(\pi^{*\prime}\Sigma)\pi^*\}]\\&=-0.5\lambda(\delta'\Sigma\delta)\end{aligned} \tag{5}$$

したがって1期間投資における最適リバランス ε^* は，取引コストを加味した上で，現実のポートフォリオ π を ε 変化させて期待効用の低下幅を最小化する（すなわち期待効用の改善を最大化する）問題の解として与えられる。

$$\max_{\varepsilon}:\ -0.5\lambda(\delta+\varepsilon)'\Sigma(\delta+\varepsilon)-\mathrm{p}(\varepsilon) \tag{6}$$

ここで $\mathrm{p}(\varepsilon)$ は，リバランス ε の実行に必要なコストを表す非負の関数である。また $\mathrm{p}(\varepsilon)$ が，リバランス ε の各要素の絶対値の単純な線形関数ならば，(6)式の最大化問題は次のように書き換えられる。

$$\max_{\varepsilon}:\ -0.5\lambda(\delta+\varepsilon)'\Sigma(\delta+\varepsilon)-p'|\varepsilon| \tag{6a}$$

ここで p は，投資対象資産1単位の売買に要するコスト（非負のコスト単価）を要素とするベクトルであり，$|\varepsilon|$ は，リバランス ε の各要素の絶対値を要素とするベクトルである。この問題は，リバランス に関する絶対値の項を含むため，解 ε^* は簡単には表現できないが数値計算で求めることができる。

なお(6a)式では，コスト単価のベクトル p がゼロに近ければ最適リバランスは $\varepsilon^*=-\delta$ に近づき，コスト単価 p が大きくなると最適リバランスは $\varepsilon^*=0$ に近づく。実際，(6a)式の第1項はリバランス ε による期待効用の改善であり ε の2次関数である。一方，同式第2項はリバランス ε に必要なコストであり ε の1次関数（原点を挟んで非線型）である。このため，最適ポートフォリオ π^* に対する現実のポートフォリオ π の乖離 δ の各要素が一定値以下ならば，最適リバランスは $\varepsilon^*=0$ になる。

Ⅲ．現実的な問題

前節において，摩擦がない時の政策ポートフォリオの計画値 π^* は(3)式で与えられ，摩擦がある時の最適なリバランス ε^* は(6)式や(6a)式の解として与えられる。この計画値と最適リバランスは現実の投資に適用可能だが，前節の議論が1期間投資を前提にしている点に注意が必要である。すなわちその適用を単純に是とできるのは，期中のリバランスを許容しないケースに限られる。

この場合，リバランスを行うのは期初だけであり，計画策定前の足元のポートフォリオ π と(3)式の計画値 π^* との乖離 δ に対して，(6)式や(6a)式の解をリバランス ε^* として実行することになる。

しかし現実には，政策ポートフォリオの計画で想定する投資期間は3～5年であることが多く，期中のリバランスも許容するのが通常である。この場合，想定した投資期間を細分化して，多期間もしくは連続時間の取引を許容した投資問題を議論する必要がある。この時，(6)式や(6a)式の近視眼的な適用が

効率的なリバランスになるかは自明ではない。

また議論の前提を多期間にする場合，政策ポートフォリオの計画 π^* を基準としたリバランスの問題とは別に，期初の計画策定で用いた(1)式のパラメータ（μ と Σ）の値の期中シフトの可能性も考慮する必要がある。この場合，計画 π^* の期中変更とそれに伴うリバランスが新たな問題になる。

さらに言えば，(1)式のパラメータの真値は，期初においても期中においても既知ではなく，各時点で入手可能な評価値が真値と一致する保証もない。取引コストやパラメータ値のシフトの可能性，さらにパラメータの真値の評価問題を無視できないとしたら，これらを明示的に考慮できるように議論の前提を一般化する必要がある。

しかし投資問題の多面的な一般化は，議論の技術的な困難を高めるだけでなく，その成果の現実への適用も困難にする虞がある。したがって，実務への適用を意識した議論を行う場合，現実の機関投資家の人的および物的資源や意思決定プロセスの現状を踏まえて，議論の前提を如何に上手く一般化もしくは制約するかが重要になる。

Ⅳ．多期間投資への拡張

(1)式のパラメータ値の入手問題を捨象でき，投資にかかる摩擦が純粋な取引コストに限られる場合，政策ポートフォリオの実行期間における(1)式のパラメータ値のシフトは特別問題にならない。この場合，シフトした値を(3)式に代入して政策ポートフォリオの計画値 π^* を随時更新し，これを足下のポートフォリオ π と比較して、取引コストを加味した上で期待効用の改善を考えれば良い。すなわち，期初の計画値を特別視する必要はなく，問題は，直近の計画値 π^* を意識した足下のポートフォリオ π のリバランスに一元化できる。

この場合，ある期（t 期）に行ったリバランスは，このリバランスを行わない時に比べて，２つのルートを通じて当期（t 期）以降の期待効用を改善する。一つは，次回（$t+s$ 期：$s \geq 1$）のリバランスまで（t 期，•••，$t+s-1$ 期）の期待効用の改善であり[1]，もう一つは，次回のリバランスにかかるコストの平均的な抑制である。

すなわち，ある期のリバランスのコストは当期に帰属するが，その効果は将来複数期間に亘って期待できる。こうした効果を考慮するには，問題を多期間に亘る動的戦略の選択として定式化する必要がある。しかし問題の前提を現実に近づけて一般化すると，最適解に関する技術的困難が高まるトレードオフが生じる。この場合，実行可能性の観点から解となるリバランス戦略の集合を予め限定し，その中から数値シミュレーションで最善策を探し出すといったアプローチが現実的であると思われる。

これに対し，１期間投資における(6)式や(6a)式のリバランス問題を，便宜的な仮定に基づいて多期間の問題に拡張する代替的なアプローチも考えられる。

$$\max_{\varepsilon}: \ -[0.5\lambda(\delta+\varepsilon)'\Sigma(\delta+\varepsilon)] - p'_{adjusted}|\varepsilon| \tag{6b}$$

ここで，$p_{adjusted}$ は，当期のリバランスの効果が翌期以降に及ぶことを勘案して，当期に帰属させるコストを適当に割り引いたものである。このため，$p_{adjusted}$ の各要素（正値）は p の当該要素以下になる。この定式化は便宜的なものであるが，あるリバランス戦略の下で期待できる割引率行列 D（$p_{adjusted} = Dp$）を適当に与えれば[2]，多期間のセッティングにおいても比較的簡単にリバランス問題の答を求めることができる。

Ⅴ．計画の策定にかかる摩擦

このように，(1)式のパラメータ値の入手問題を捨象でき，投資にかかる摩擦が純粋な取引コストに限られる場合，問題は多期間投資のリバランス問題に一元化できる。しかし現実には，意思決定に用いるパラメータの真値はほぼ不可知である。また，その質の良い評価値の入手は簡単ではなく，標準的な入手方法が用意されている訳でもない。

このため機関投資家の中には，外部の専門家から有料の助言を継続的に求めるものも少なくない。また近年，機関投資家のガバナンスの観点から，中立的な複数の外部の専門家による委員会等を設け，パラメータ値の評価方法や評価値の妥当性をそこで評価させるケースも増えている。

実際，こうした外部資源の活用の有無やその程度に関わらず，政策ポートフォリオ計画 π^* の策定や変更には相当のコストがかかる。またそのコストの大きさは従量的というより固定的であり，カネで解決が難しい時間的なものも含まれる。

$$[0.5\lambda(\pi^*_{efficiant}-\pi^*_{current})'\Sigma(\pi^*_{efficiant}-\pi^*_{current})] - c_{adjusted} \quad (7)$$

(7)式は，政策ポートフォリオ計画の変更に関する判断基準を示したものである。ここで $\pi^*_{current}$ は直近策定した政策ポートフォリオの計画値であり，$\pi^*_{efficiant}$ は(1)式のパラメータの最新評価値に基づく計画値案である。また $c_{adjusted}$ は計画変更のペナルティを表す非負定数であり，計画変更に要する総合的なコストを，次回のルーティンの計画見直しまでの残存期間を考慮して適当に割り引いたものである[3]。

すなわち(7)式の第 1 項は計画値 $\pi^*_{current}$ の変更による期待効用の改善を表し，同第 2 項はその計画変更に必要な総コストの期間案分を表す。したがって，同式の値が正値になるか否かが計画変更の判断基準になる。なお，同式の $\pi^*_{efficiant}$ はコストをかけた本格検討前の暫定値であり，ペナルティ定数 $c_{adjusted}$ の評価も簡単ではないが，合理的な判断材料の一つにはなるだろう。

Ⅵ．計画の実行や見直しにかかる障壁

前節では，(1)式のパラメータ値の評価にかかる困難等が，政策ポートフォリオ計画の柔軟な変更を妨げる固定的なコストになることを指摘した。政策ポートフォリオを数年毎に定期的に見直す場合，この固定的なコストによるペナルティ定数 $c_{adjusted}$ は，次回の見直しまでの期間が長いほど小さくなる。したがって，(1)式のパラメータの値の期中シフトが同程度ならば，前回の見直しから時を置かないほど計画変更のハードルは低くなるはずである。

しかし，計画の見直しにかかる固定的なコストが大きいと，本来は埋没コストとして認識すべき直近の定期見直しのコストを過大評価してしまうかもしれない（例えば「半年前に見直したばかりなのに…」)。こうしたコストの過大評価は，本来行うべき計画の見直しを阻害し，投資効率の低下をもたらす。

またこの埋没コストの問題とは別に，(1)式のパラメータ値の評価に関して，その真値の不可知性がもたらす障壁が投資効率を損なう虞もある。さらにこの障壁は，政策ポートフォリオの計画値 π^* の見直しだけでなく，計画値を基準とした通常のリバランスの効率性も損なう。以下では，リバランスの問題に焦点を当てて議論を進める。

簡単のため，1 期間投資で取引コストの単価が一定のケースを考える。この時，リバランス問題は(6a)式で与えられる。同式で，第 1 項はリバランスによる期待効用の改善を表し（(5)式との比較)，同第 2 項はリバランスのコストによる期待効用の悪化を表す。同式の変数と係数は全て観測可能であり，機械的に実行できるように思われる。しかし，同式の δ は政策ポートフォリオの計画値 π^* に依存しており，この計画値は(1)式のパラメータ値に依存している。

この時，もしこのパラメータの真値が可知ならば，(6a)式の解の機械的な実行に違和感を覚えることはないだろう。しかし，現実にはその真値は不可知であり，適当な評価値をある意味便宜的に使用している。このため計画値 π^* も便宜的なものに過ぎず，真に効率的なポートフォリオとは異なるかもしれない。そうなると，(6a)式の第1項の効率性の改善は十分確信できないあやふやなものとなる。

一方，同式第 2 項の取引コストは事前に真値を入手できる。したがって(6a)式は，確信の程度が大きく異なる 2 つの値を直接比較していることになる((6)式も同様)。このため，機関投資家の責任者が，(6a)式や(6)式の解の機械的な実行を躊躇し，結果としてリバランスの執行を見送る傾向が生じたとしても不思議でないように思われる。

確かに，確信度の異なる 2 つの値の直接比較に違和感を抱くのは自然であり，意思決定の効率性の観点からも問題がある。しかし逆に，この点を以って(6)式や(6a)式のルールを軽視すると，計画値 π^* の妥当性やそこからの乖離 δ がもたらす効率性の低下を過小評価してしまい，本来のリバランスを実行できない虞がある。

こうした認知バイアスによる投資効率の悪化を防ぐためには，(6)式や(6a)式で確信の程度が劣る第 1 項に関して，その大きさを合理的に割り引く必要がある。なお，真値が不可知な状態は標準的な統計の前提だし，そうした状態での規範的行動はベイズ統計や意思決定理論の適用対象である[4]。次節では，(2)式の元になる期待効用関数を用いて，確信の程度を合理的に織り込んだリバランスを示す。

Ⅶ．情報の不確かさを考慮したリバランス

簡単のため，(1)式のパラメータの内，リターン R の共分散行列 Σ の真値は既知で，期待値 μ の真

値のみ不可知とする。また，期待値μの評価は統計的でない手法によるものとする。このため期待値の評価値$\bar{\mu}$は確定的であり，頻度論的誤差を含まないが，評価手法が十分でないため，技術的な誤りの可能性を排除できないものとする。この誤りϕは，頻度論的にはバイアス（偏り）だが，手法の利用者である投資家はその値を経験的に知ることができない。このため投資家はこの誤り を確率変数と見なす。

実際，リターンの期待値μの評価は，ビルディング・ブロック等の手法を使うことが多い。この場合，投資家は期待値μの決定モデルを用いてその評価値$\bar{\mu}$を入手する。期待値μの評価に関する上記の仮定は，こうしたケースをなぞるものである。

この場合，投資家が期待値μの評価バイアスを避けるよう努めるなら，技術的な誤りϕの期待値は$\mathrm{E}[\phi]=0$と見なすのが自然である。さらに，この技術的な誤りϕが資産市場の不確実性と関係ないとしたら，リターンRとの間に$\mathrm{E}[\{(R-r_s 1)-\mu\}\phi']=0$を仮定できる。この時，投資家の期待効用関数は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
U &= \mathrm{E}[\mathrm{u}\{(R-r_s 1)'\pi)-\mathrm{u}(0)]/\dot{\mathrm{u}}(0) \\
&\approx \mathrm{E}[\mathrm{u}(0)+\dot{\mathrm{u}}(0)\{(R-r_s 1)'\pi\}+ \\
&\qquad 0.5\ddot{\mathrm{u}}(0)\{(R-r_s 1)'\pi\}^2-\mathrm{u}(0)]/\dot{\mathrm{u}}(0) \\
&= \bar{\mu}'\pi+0.5\{\ddot{\mathrm{u}}(0)/\dot{\mathrm{u}}(0)\}\{\pi'(\bar{\mu}\bar{\mu}'+\mathrm{E}[\phi\phi']+\Sigma)\pi\} \\
&= \bar{\mu}'\pi-0.5\lambda\{\pi'(\mathrm{M}+\Psi+\Sigma)\pi\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

ここで$\mathrm{u}(\cdot)$は投資家の効用関数，$\dot{\mathrm{u}}(\cdot)$と$\ddot{\mathrm{u}}(\cdot)$はその1階および2階導関数であり，$\mathrm{M}=\bar{\mu}\bar{\mu}'$，$\Psi=\mathrm{E}[\phi\phi']$である。また，投資家が期待値$\mu$の真値を知っている場合，誤り$\phi$は常にゼロになる。この場合，$\Sigma$に対して$\mathrm{M}$を無視できるなら，(8)式は近似的に(2)式に退化する。なお(8)式の下で得られる最適ポートフォリオは，(3)式に代わって$\{\lambda(\mathrm{M}+\Psi+\Sigma)\}^{-1}\bar{\mu}$で与えられるが，ここでは議論をリバランスに絞るため，最適ポートフォリオπ^*についてはこの置き換えを前提として議論を進める。この場合，取引コストの単価が一定ならば，最適なリバランスは次式の解となる。

$$
\max_{\varepsilon}:\ -0.5\lambda(\delta+\varepsilon)'(\mathrm{M}+\Psi+\Sigma)(\delta+\varepsilon)-p'|\varepsilon| \tag{6c}
$$

以上の議論を踏まえて，超過リターンの期待値μの評価 に十分確信がない時の政策ポートフォリオの計画値π^*とリバランスを簡単な数値例で確認する。表1は，投資対象が株式と債券の2種類に限られる時の1期間投資の数値例である[5]。同表パネルAは投資の前提であり，同パネルBは投資家（$\lambda=4$）の最適行動である。

パネルAの前提の内，リターンRのパラメータの評価と取引コストの値は，いずれも本校執筆時点で標準的なものである。一方，期待値の評価$\bar{\mu}$の誤りϕの程度については，その標準偏差が期待値評価の半分になるように定めている。これは超過リターンの期待値が正値である蓋然性を概略確保するものであり，期待値評価の確信の程度としてはやや

表1．パラメータの真値の不可知性が1期間投資に与える影響（数値例）

(A)前提

	リターンR(年率)のパラメータ評価			取引コストp	期待値評価の誤りϕ	
	期待値	標準偏差	相関係数	単価率	標準偏差	相関係数
株式	5.00%	20.00%	−0.3	0.30%	2.50%	0
債券	1.00%	3.00%		0.05%	0.50%	

(B)意思決定

	政策ポートフォリオπ^*		リバランス実行（$\lvert\varepsilon\rvert^*>0$）の最小乖離$\delta$	
	期待値の真値既知（$\phi=0$）	期待値の真値不明	期待値の真値既知（$\phi=0$）	期待値の真値不明
株式	26.7%	26.4%	±1.90%	±1.87%
債券	73.3%	73.6%		

低い部類に属すると思われる。

それでパネルBを見ると，政策ポートフォリオにおける株式の比率は27%弱であり，現実の機関投資家に近い（企業年金の保有資産における国内外の株式の平均比率は約3割である）。一方，取引コストを考慮したリバランス実行の閾値は，現実のポートフォリオ（ここでは株式の比率）と政策的な計画値との乖離が1.9%に達した局面になる。これは，多くの機関投資家にとって，かなりタイトに見えるかもしれない。

それで，リターンの期待値の評価の確信が低いと，リバランス開始の閾値が大きくなるかと言うと，ほとんど変わらずむしろ逆にタイトになる。すなわち，パラメータの真値に関する不可知性と評価値に関する確信の低さは，確かに政策ポートフォリオの計画値 の効率性を疑う材料であり期待効用の低下をもたらす（(8)式の $-0.5\lambda(\pi'\Psi\pi)$）。したがって，この計画値の効率性の低下を以ってリバランスを躊躇するのは一見自然に見える。しかし表1の結果は，この躊躇が認識バイアスである可能性を示している。

Ⅷ．まとめ

本稿では，機関投資家の政策ポートフォリオの策定とリバランスの問題を議論した。議論においては，意思決定や市場取引にかかる摩擦やコスト，および意思決定の前提となるパラメータの真値に関する不可知性を明示的に考慮した。その結果，政策ポートフォリオの策定にかかる固定的なコストが大きい場合，認識バイアスによって本来埋没コストとすべきコストを過大評価する危険性をまず指摘した。

次にパラメータの不可知性について，これが政策ポートフォリオの効率性の低下をもたらすものの，リバランスの実行はむしろタイトに行うべきことが示された。すなわち，パラメータの不可知性を理由に，リバランスの実行や政策ポートフォリオの計画見直しを躊躇するなら，それは認識バイアスを疑うべきかもしれない。

注

1）1期, 2期, •••, T期における通期の期待効用関数が，$U=U_1+U_2+\cdots+U_T$（$U_t=\mathrm{E}[\gamma^{t-1}\{\mu'\pi_t-0.5\lambda(\pi_t'\Sigma\pi_t)\}]$，$\gamma$は1より少し小さい定数）で表わされる場合，$t$期にリバランスを行わなかったケースに比べて，$t$期, ••• $t+s-1$期の期待効用 $U_t,\cdots,U_{t+s-1}$ を毎期ほぼ同程度改善できる（γ^s による減衰が穏和な場合）。なお，ここで π_t は第t期初のポートフォリオであり，$t=\tau$期において $\pi_{\tau+i}$（$i\geq1$）は不確実である。

2）例えば，問題を個々の投資対象 n（$n=1,2,\cdots,N$）と安全資産のリバランスに単純化すると，あるリバランス戦略の下で期待される平均的なリバランス間隔 s_n と次回リバランスのコストの平均的な低減率 d_n（本文の2番目のルートに相当）は比較的簡単に求められる。この場合，$D=[\mathrm{diag}(1-d_1)/s_1,\cdots,(1-d_N)/s_N]$ のような割引率行列を考えることができる。

3）政策ポートフォリオの計画値 π^* は，数年毎に定期的な見直しを行うのが通常である。なお，計画変更に伴う従量的な取引コストは捨象している。

4）Black and Litterman（1992）は，パラメータの真値の不可知性とその評価値の確信度を明示的に扱った研究の嚆矢だが，彼等は意思決定にかかる手法をベイズ統計ではなく，TheilやGoldberger の頻度論寄りのミックス推定量（mixed estimator）に求めている。これは，ベイズ統計の当時の立場を考慮したものかもしれない。

5）標準的な機関投資家に倣い，無リスクの安全資産を投資対象に含めない。このため，最適ポートフォリオは $\{\lambda(\mathrm{M}+\Psi+\Sigma)\}^{-1}$ と異なるが，取引コストを考慮した(8)式の最大化に変わりないため本質的な違いはない。

参考文献

企業年金連合会（ホームページ），企業年金資産運用実態調査結果（2015年度）の概要，https://www.pfa.or.jp/activity/tokei/shisanunyo/jittai/files/chosa_gaiyou_2015.pdf

Black, F. and Litterman, R.（1992），“Global Portfolio Optimization,” *Financial Analysts Journal* 48（5），28-43.

（名古屋大学大学院経済学研究科）