DOI:10. 18999/ecos. 65.3-4. 7

# 人口成長率と国債発行残高に関する動学的政治経済分析*

荒　渡　　　良

This study analyzes the relationship between the population growth rate and the size of government debt in a dynamic politico-economic model. In this framework, I show that countries with a relatively low population growth rate realize tight fiscal policy with low government debt accumulation.

Keywords: government debt; population growth rate; probabilistic voting model; small open economy

## Ⅰ. はじめに

20世紀末から21世紀初頭にかけて，多くの先進国にとって国債残高の増大は主要な経済問題の一つとなった。OECD諸国の平均的な国債発行残高の対GDP比は1980年代のはじめには30%程度であったが，2000年代には50%程度にまで増加している（Azzimonti，Francisco，and Quadrini，2014）。特に日本ではその傾向は顕著であり，1980年代には40%程度だった国債発行残高の対GDP比が2000年代のはじめには100%を超え，2010年には150%も突破した。

国債発行量を決定づける要因にはいくつかのものがあるが，代表的なものとして人口成長率の違いが挙げられる。まず，国債発行は現在の財政負担を将来に先送りする手段であるため，若年層は国債発行を抑制するインセンティヴを持つ。ここで，人口成長率の上昇は若年層の相対的なサイズを大きくするため，若年層の政治的影響力を増大させることを通じて国債発行を抑制する効果を持つ。一方で，人口成長率の上昇は将来の課税ベースを大きくし，将来の政府の財政負担能力を向上させる。そのため，現在世代に財政負担を将来に先送りするインセンティヴを生じさせ，国債発行を増大させる効果を持つ。従って，どちらの効果が大きいかによって，人口成長率の変化が長期の国債残高を抑制するのか，増大させるのかが決まると予想される。本稿の目的は，多数の小国開放経済からなる動学的政治経済モデルを構築・分析することで，上述の問題を理論的に検証することである。

これまで，数多くの研究によって，投票行動を内生化した政治経済学の枠組みを用いた国債発行量に関する理論的な検証が行われてきた。これらの研究の多くは国債発行量が過剰になる要因を分析することにあり，コモンプール問題（Tabellini, 1986; Velasco,1999），政情不安定（Persson and Svensson, 1989; Aghion and Bolton, 1990; Alesina and Tabellini, 1990; Tabellini and Alesina, 1990; Natvik, 2013），利他性（de Walque and Gevers, 2001），税の平準化（Battaglini and Coate, 2008），世代間対立（Song，Storesletten，and Zilibotti, 2012）など様々な要因が分析対象となってきた。しかしながら，これらの研究では国家間の人口成長率の違いが国債発行に与える影響は分析から捨象されている。

そこで，本稿では人口成長率と投票によって決まる国債発行量の関係を説明する動学的政治経済モデルを構築・分析する。本稿のモデルはSong，Storesletten，and Zilibotti（2012）で構築された，多数の国から構成される二期間世代重複モデルに基づいている。Song，Storesletten，and Zilibotti（2012）はマルコフ完全均衡において，今期の国債発行が次期の政府予算を逼迫させることを通じて，次期の公共財供給量を減少させるという効果に注目

*論文審査受付日：2017年９月22日。採用決定日：2018年１月17日（編集委員会）

している。若年層は次期にも生存しているため，今期の国債発行が次期の公共財供給量を減少させるという効果を考慮した上で投票を行う。Song, Storesletten, and Zilibotti（2012）はこの「規律効果」が国債発行残高の累増を妨げる一要因であり，国家間における公共財に対する選好の違いが規律効果の大きさと長期的な国債発行残高に差異をもたらすと結論付けている。しかし，彼らのモデルでは国家間の人口成長率の違いが長期的な国債発行残高にどのような影響を及ぼすのかについては分析されていない。そこで，本稿ではSong, Storesletten, and Zilibotti（2012）のモデルから生産活動を捨象し，その代わりに国家間における人口成長率の異質性を導入したモデルを構築・分析した。本稿の貢献は人口成長率の違いが各国の国債発行残高にどのような相互依存的な影響を及ぼすのかを理論的に検証したことである。

分析の結果，人口成長率が高い程国債発行量が増大し，長期の国債発行残高が大きくなることが確認された。人口成長率の上昇は若年層の人口比を大きくするため，若年層の政治的影響力を増大させる。これは規律効果を強めるため，国債発行量を抑制する効果を持つ。一方で，人口成長率の増大は将来の課税ベースを大きくするため，現在の財政負担を将来に先送りするインセンティヴを生じさせ，国債発行を増大させる効果を持つ。この時，前者の効果は現在の財政支出の減少を意味するため，若年層と老年層の政治的対立によってその効果が弱められる。一方で，後者の効果はまだ生まれていない次世代に対する財政負担の先送りであるため，政治的対立にさらされることはない。分析の結果，上述のような理由から前者の効果と比べると後者の効果がより強く働き，人口成長率の上昇が国債発行を促進することが確認された。

## Ⅱ．モデル

多数の小国開放経済が連続的に存在し，その集合を $j \in [0,1]$ とする。また，時間は離散的に表現し，インデックス $t=0,1,2,\cdots$ で表すとする。各国は若年期と老年期の二期間だけ生きる個人から構成されており，各個人は若年期に働き，老年期には退職すると仮定する。また，第 $j$ 国における $t$ 期生まれの人口は $N_{j,t}$，人口成長率は $n_j > -1$ であるとする。人口成長率は有限個の値しか取らないと仮定し，その集合を $n_j \in \{\underline{n}, n^1, n^2, \cdots, n^M, \overline{n}\} \equiv \Gamma_N$ とする[1)]。

### 1．家計の効用最大化問題

家計は私的財と公共財の消費から効用を得ると仮定し，第 $j$ 国，$t$ 期生まれの若年個人の効用関数を次の様に特定化する。

$$U_{j,t}^{y} = \frac{(c_{j,t}^{y})^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \theta \cdot \frac{(g_{j,t})^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \beta \cdot \left\{ \frac{(c_{j,t+1}^{o})^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \theta \cdot \frac{(g_{j,t+1})^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \right\}.$$

但し $c_{j,t}^{y}$ は若年期における私的財の消費，$c_{j,t+1}^{o}$ は老年期における私的財の消費，$g_{j,t}$ は $t$ 期における一人当たりの公共財供給量，$\beta \in (0,1]$ は割引因子，$\theta > 0$ は公共財への選好の強さを表すパラメータである。また，$\sigma > 0$ は異時点間の代替の弾力性の逆数を表す。

各個人は若年期において 1 だけの労働を非弾力的に供給し，外生的に与えられた $w$ の賃金を得るとする[2)]。若年期と老年期における予算制約はそれぞれ次の通りである。

$$c_{j,t}^{y} + s_{j,t} \le (1-\tau_{j,t}) \cdot w,$$
$$c_{j,t+1}^{o} \le R s_{j,t}.$$

ただし，$s_{j,t}$ は貯蓄，$\tau_{j,t}$ は $t$ 期における所得課税率，$R$ は世界利子率である。以下では定常状態において世界利子率 $R$ が時間を通じて一定である状況に注目して分析を進める。

### 2．政府の予算制約式

各国の政府は国際金融市場で国債を取引すると仮定する。政府は現在の国債発行残高を所与として，所得課税率，公共財供給量および新規の国債発行量を決定する。従って，$t$ 期における $j$ 国政府の予算制約式は次の様に表される。

$$b_{j,t+1} = \frac{g_{j,t}}{1+n_j} + \frac{R b_{j,t}}{1+n_j} - \frac{\tau_{j,t} w}{2+n_j}. \tag{1}$$

ただし，$b_{j,t}$ は $j$ 国の $t$ 期における一人当たり国債発行残高である[3)]。

次に，政府はデフォルトを起こさない，すなわち，国債発行残高は最大税収の割引現在価値の総和（自然債務限度）を超えないと仮定する。このモデルでは労働供給は非弾力的であると仮定しているため，$t$ 期の税収は $\tau_{j,t}=1$ で最大化される。定常状態では

世界利子率 $R$ が時間を通じて一定になるため，自然債務限度に関する制約は次の様に表される。

$$(N_{j,t+1}+N_{j,t})\cdot b_{j,t+1}\leq\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_{j,t+s}\cdot w}{R^s}\quad\Leftrightarrow$$
$$b_{j,t+1}\leq\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\frac{w}{R-(1+n_j)}\equiv\bar{b}_j. \quad (2)$$

上式より自然債務限度は人口成長率 $n_j$ の増加関数である。これは，人口成長率が高い国ほど将来の課税ベースと政府の財政負担能力が大きくなるため，自然債務限度が大きくなることを意味する。

### 3．経済均衡

若年期および老年期における私的財の消費関数および貯蓄関数は次の様に導出される。

$$c^y_{j,t}=\frac{1}{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}\cdot w\cdot(1-\tau_{j,t}), \quad (3)$$
$$c^o_{j,t+1}=\frac{\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}\cdot R\cdot w\cdot(1-\tau_{j,t}), \quad (4)$$
$$s_{j,t}=\frac{\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}\cdot w\cdot(1-\tau_{j,t}). \quad (5)$$

ここで，私的財の消費関数を効用関数に代入することで間接効用関数が導出される。定数の部分を無視すると，若年個人の間接効用関数は次の様に導出される。

$$V^y_{j,t}=\frac{1}{1-\sigma}\cdot\Big[\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}^{\sigma}\cdot\{w\cdot(1-\tau_{j,t})\}^{1-\sigma}$$
$$+\theta\cdot(g_{j,t})^{1-\sigma}+\beta\theta\cdot(g_{j,t+1})^{1-\sigma}\Big]$$
$$=V^y(\tau_{j,t},g_{j,t},g_{j,t+1}). \quad (6)$$

右辺の第一項は若年期および老年期における私的財の消費から得る効用を，第二項は若年期の公共財から得る効用を，第三項は老年期の公共財から得る効用を表す。

一方，老年個人の間接効用関数は次の通りである。

$$V^o_{j,t}=\frac{1}{1-\sigma}\cdot\theta\cdot(g_{j,t})^{1-\sigma}. \quad (7)$$

但し，$t$ 期における老年個人の私的財消費量は $(t-1)$ 期の貯蓄によって決まるため，$t$ 期首においては所与である。そのため，私的財消費から得る効用の部分は定数となるため，上記の間接効用関数では省略されている。

## Ⅲ．政治均衡

本稿のモデルではLindbeck and Weibull (1987) によって定式化された確率的投票モデルに国家間における人口成長率の違いを導入した政治メカニズムを考える。以下では時間のインデックス $t$ を省略し，ある変数 $x$ の次期における値を $x'$ のように再帰的に表記する。

### 1．人口成長率の違いを導入した確率的投票モデル

以下では若年層と老年層をそれぞれインデックス $J\in\{y,o\}$ で表す。ここで，Lindbeck and Weibull (1987) と同じく二つの政党 $A$，$B$ が存在すると仮定する。それぞれの政党は政府の予算制約および自然債務限度に関する制約を満たすような政策の組 $\{b'_j,\tau_j,g_j\}$ をアナウンスし，もしも投票の結果過半数の票を獲得したのであれば，アナウンスした政策を必ず実行する。補論 A.1 で示されているように，均衡において，両政党がアナウンスする政策は若年層と老年層の間接効用関数について，各グループの政治的影響力の大きさに応じて加重平均をとったものを最大化するように決定される。具体的には，$j$ 国における政治目的関数は次のように表される。

$$\max_{\tau_j,g_j,b'_j}\quad\Omega(\tau_j,g_j,b'_j;n_j,R)=\omega(n_j)\cdot V^o(\tau_j,g_j,b'_j)$$
$$+(1-\omega(n_j))\cdot V^y(\tau_j,g_j,b'_j).$$

但し $\omega(n_j)\equiv 1/(2+n_j)$ は老年層と若年層の人口比によって決まる，老年層の相対的な政治的影響力の大きさを表しており，人口成長率 $n_j$ の減少関数である。これは，人口成長率の低い国ほど老年層の相対的なサイズが大きいため，老年層の政治的影響力も大きいことを意味する。

以下ではマルコフ完全均衡に注目して均衡動学を導出する。このモデルには家計の資産と国債残高という二つの状態変数があるが，(7)式から老年層の政策に対する選好は家計の資産残高とは無関係であることが分かる。従って，このモデルにおける政策関数は国債残高 $b_j$ のみの関数として表される。

### 2．定常マルコフ完全均衡

**定義1**．定常マルコフ完全均衡は下記の二つの条件をどちらも満たすような世界利子率 $R$，定常状態における各国の国債残高 $\{b_j\}_j$，国債発行に関する政策関数 $B(b_j;n_j,R)$，公共財供給に関する政策関数 $g_j=G(b_j;n_j,R)$，そして課税

に関する政策関数 $\tau_j = T(b_j; n_j, R)$ によって特徴付けられる。

（i）各政策関数は

$$\langle B(b_j; n_j, R), G(b_j; n_j, R), T(b_j; n_j, R)\rangle = \underset{\{\tau_j, g_j, b'_j\}}{\arg\max}\, \Omega(\tau_j, g_j, b'_j; n_j, R),$$

を満たす。但し $g'_j = G(b'_j; n_j, R)$ であり，以下の政府の予算制約式及び自然債務上限の制約を満たす。

$$B(b_j; n_j, R) = \frac{G(b_j; n_j, R)}{1+n_j} + \frac{Rb_j}{1+n_j} - \frac{T(b_j; n_j, R)w}{2+n_j},$$

$$B(b_j; n_j, R) \leq \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \frac{w}{R-(1+n_j)} \equiv \bar{b}_j.$$

（ii）下記の国際金融市場の均衡条件を満たす。

$$\int_j s_j \mathrm{d}j = \int_j b'_j \mathrm{d}j,$$

但し，$b'_j = B(b_j; n_j, R)$かつ $s_j = \frac{\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \cdot w \cdot (1 - T(b_j; n_j, R))$ である.

ここで，$R$ を所与とすると $g_j$ と $\tau_j$ に関する一階条件が次の様に導出される[4]。

$$\left(\frac{g'_j}{g_j}\right)^{\sigma} = -\frac{1}{1+n_j} \cdot \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \beta \cdot \frac{\partial G(b'_j; n_j, R)}{\partial b'_j}, \quad (8)$$

$$\frac{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{1-\tau_j} = \theta^{\frac{1}{\sigma}} \cdot w \cdot \frac{1}{g_j}. \quad (9)$$

(8)式の条件は公共財供給量に関する一般化オイラー方程式を表している。右辺にある$\beta \cdot (\partial G(b'_j; n_j, R)/\partial b'_j)$ の項は若年層の有権者による規律効果（disciplining effect）を表している。規律効果はSong, Storesletten, and Zilibotti（2012）でも議論されており，今期の国債発行が次期の政府予算を圧迫し，次期の公共財供給量を減少させるという効果を表している。若年層は老年層とは異なり次期にも生存しているため，次期の公共財供給量の減少を小さくするインセンティヴを持っており，これが今期の国債発行を妨げる効果を持つ。

ここで(8)式右辺の定数部分は規律効果の大きさを決定づけている。まず，$1/(1+n_j)$ の部分は今期の人口一人当たり政府支出一単位の増加が次期の人口一人当たりの国債残高を $1/(1+n_j)$ 単位増大させることを表している。人口成長は一人当たり国債残高を減少させる効果を持つため，この部分は人口成長率 $n_j$ の減少関数となっている。人口成長率が高くなると，今期の国債発行が次期の政府予算を逼迫させる力が弱くなるため，規律効果を弱くする。次に，$(1+n_j)/(2+n_j)$ の部分は人口に占める若年層の割合であり，若年層の相対的な政治的影響力を表している。人口成長率の上昇は若年層の人口比を大きくすることを通じて若年層の政治的影響力を大きくするため，規律効果を強くする。一方，(9)式は税率に関する一階条件であり，左辺で表される課税の限界費用と右辺で表される課税の限界便益が等しくなるように税率が決定されることを表している。

以下では(8)式と(9)式を満たすような政策関数を導出する。Guess and Verify法を用いると，下記のような線形の政策関数が存在することが分かる。

**補題 1．** $R$ を所与とした時，定常マルコフ完全均衡における第 $j$ 国の政策関数は次の様に求められる。

$$G(b_j; n_j, R) = (1+n_j) \cdot \gamma_j^* \cdot (\bar{b}_j - b_j),$$

$$T(b_j; n_j, R) = 1 - \left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\} \theta^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \frac{1+n_j}{w} \cdot \gamma_j^* \cdot (\bar{b}_j - b_j),$$

$$B(b_j; n_j, R) = \bar{b}_j - (\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \beta\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot (\bar{b}_j - b_j).$$

但し，$\gamma_j^* (>0)$ は次の条件式を満たす。

$$\frac{R}{1+n_j} - \gamma_j^* \cdot \left[1 + \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\} \cdot \theta^{-\frac{1}{\sigma}}\right] = (\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (10)$$

**証明．** 補論A.3を参照。

## Ⅳ．定常状態

この節では人口成長率の違いが定常状態における国債残高に与える影響について分析する。

### 1．資産市場の均衡と世界利子率

まず，補題 1 にある国債残高の政策関数を次の様に書き直す。

$$\bar{b}_j - b'_j = \phi_j^* \cdot (\bar{b}_j - b_j).$$

但し

$$\phi_j^* \equiv (\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad j \in [0,1]. \quad (10)$$

である。ここで，$\overline{\phi}$ を次の様に定義する。

$$\overline{\phi} \equiv \max\{\phi_j^*\}_{j\in[0,1]}.$$

ここで，次の補題が成立する。

**補題２．** $\phi_j^*$ が最も高い国は $b_j < \overline{b}_j$ の定常状態に収束し，それ以外の国は $b_j = \overline{b}_j$ の定常状態に収束する。

**証明.**

Song, Storesletten, and Zilibotti（2012）と同様に証明する。まず，初期時点において $b_j = \overline{b}_j$ となる特殊な場合については無視することにする。この時，均衡において $\phi_j^* > 1$ を満たす国が存在することはあり得ない。$\overline{b}_j - b_j' = \phi_j^* \cdot (\overline{b}_j - b_j)$ から $\phi_j^* > 1$ の国では時間を通じて $b_j$ が負の無限大に発散する。これは債権が無限に大きくなることを意味するが，自然債務限度があるために無限の債務を負うことが出来る国は存在しない[5)]。従って，この場合には国際金融市場の均衡条件が満たされない[6)]。次に，均衡において $\overline{\phi} < 1$ が成立することはあり得ない。この場合には全ての国が自然債務限度 $\overline{b}_j$ まで国債残高を蓄積する。補題１から自然債務限度に到達した場合には税率が100％になるため，家計の貯蓄はゼロになる。従って，$\overline{\phi} < 1$ の場合には定常状態において国債の買い手がおらず，国際金融市場の均衡条件が満たされない。以上から，均衡においては $\overline{\phi} = 1$ であり，$\phi_j^* = 1$ である国は国債残高が自然債務限度よりも小さい水準に収束し，$\phi_j^* < 1$ の国は国債残高が自然債務残高の水準まで蓄積される。

補題２から定常状態における世界利子率 $R^*$ は $\overline{\phi} = 1$ を満たすことが分かる。以下では $\phi_j^* < \overline{\phi}$ であり，定常均衡における国債残高が $b_j < \overline{b}_j$ となる国のインデックスを $j^*$ と表すことにする。$\overline{\phi} = 1$ より $\phi_j^*$ が高い国においては $\gamma_{j^*}^* = (2+n_{j^*})/((1+n_{j^*})\beta)$ が成立することに注意すると，(10)式から次の均衡世界利子率 $R^*$ の決定式が得られる。

$$\frac{R^*}{1+n_{j^*}} = 1 + \frac{2+n_{j^*}}{(1+n_{j^*})\beta} \cdot \left[1 + \frac{1+n_{j^*}}{2+n_{j^*}} \cdot \left\{1+\beta(\beta R^*)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\} \cdot \theta^{-\frac{1}{\sigma}}\right]. \quad (12)$$

ここで，次の補題が成立する。

**補題３．** $\sigma > 1/2$ もしくは $\sigma = 1/2$ かつ $\theta > \sqrt{\beta(1+n_{j^*})}$ の場合，(12)式を満たす $R^* > 1$ が一つだけ必ず存在する。

**証明.** 補論A.4を参照。

以下では $R^* > 1$ の定常状態に注目し，次の仮定を置く。

**仮定１．** $\sigma > 1/2$。

この仮定は多くの実証研究によって支持されるものである。例えばKydland and Prescott（1982），Hall（1988），Campbell and Mankiw（1989），Browning, Hansen, and Heckman（1999），Campbell（1999）らは $\sigma > 1$ であるとの推計結果を，Hansen and Singleton（1982），Attanasio and Weber（1989），Vissing-Jorgensen and Attanasio（2003）らは $\sigma \geq 1/2$ との推計結果を提示している。

### ２．人口成長率と定常状態における国債残高

補題２から，定常状態における国債残高の水準は他国と比べて $\phi_j^*$ が大きいか小さいかに依存することが分かる。そこで，以下では各国の性質を特徴付ける人口成長率 $n_j$ と $\phi_j^*$ の関係について考察する。

**命題１．** 利子率 $R$ が任意の水準に与えられているとする。この時，$\partial\phi_j^*/\partial n_j < 0$ が成立する。

**証明.** 補論A.5を参照。

補題２より，$\phi_j^*$ が低い国は定常状態において国債残高が自然債務限度と等しくなる。従って，命題１は人口成長率が低い国では定常状態においても国債残高が自然債務限度を下回る一方で，人口成長率が高い国では定常状態において国債残高が自然債務限度に達することを意味する。

命題１の経済学的含意は次の通りである。(8)式で示されている通り，人口成長率の変化は公共財供給量と国債発行量に二つの効果を持つ。一つ目に，人口成長率の上昇は若年層の人口比の上昇を意味するため，若年層の政治的影響力 $(1+n_j)/(2+n_j)$ を大きくする。そのため，規律効果が強くなって国

債発行が抑制される。二つ目に，人口成長率の上昇は将来の課税ベースの増大を意味するため，今期の国債発行によって生じる将来の財政負担増を抑制する効果を持つ。(1)式の政府の予算制約式より，今期の政府支出一単位の増加は次期の人口一人当たり国債残高を $1/(1+n_j)$ 単位増大させる。つまり，人口成長率が高いほど今期の国債発行による次期の公共財供給量の減少分が小さくなるため，規律効果が弱められ，国債発行が促進される。

上述の通り，人口成長率の上昇は(i)若年層の政治的影響力の増大を通じた効果（国債発行量を抑制），(ii)将来の課税ベースの増大を通じた効果（国債発行量を促進）という二つの側面から国債発行量に影響を及ぼす。この時，(i)の効果は現在の財政支出の減少を意味するため，若年層と老年層の政治的対立によってその効果が弱められるのに対して，(ii)の効果はまだ生まれていない次世代に対する財政負担の先送りであるため，政治的対立にさらされることはない。その結果，(ii)の効果が(i)の効果を上回るため，人口成長率の上昇は国債発行量を増大させる。

## V．おわりに

本稿では人口成長率の違いが長期的な国債発行残高に与える影響について，多数の小国開放経済からなる動学的政治経済モデルを用いて理論的に検証した。

分析の結果，人口成長率の上昇は国債発行量に二つの効果を及ぼすことが確認された。まず，今期の国債発行は次期の財政状況を逼迫させ，次期の公共財供給量を減少させる。そのため，若年層は老年層と比べると国債発行を抑制するインセンティヴを持つ（「規律効果」）。人口成長率の上昇は若年層の人口比を大きくすることを通じて，若年層の政治的影響力を増大させるため，規律効果を強め，国債発行量を抑制する。一方で，人口成長率の上昇は将来の課税ベースの増大を意味するため，今期の国債発行による将来の財政負担増を小さくする。そのため，今期の若年層が財政負担を次世代に先送りするインセンティヴを持つことで規律効果が弱められ，国債発行が促進される。ここで，前者の効果は現在の財政支出の減少を意味するため，若年層と老年層の政治的対立によってその効果が弱められるのに対して，後者の効果はまだ生まれていない次世代に対する財政負担の先送りであるため，政治的対立にさらされることはない。従って，後者の効果の方が前者の効果よりも強く働くために，人口成長率の上昇は国債発行量を増大させる。

最後に，本稿の問題点をいくつか指摘する。一つ目に，本稿のモデルでは生産活動が捨象されている。人口成長率の変化は労働供給量を変化させるため，生産活動の変化を通じて賃金水準やGDPを変化させるであろう。より精緻な分析を行うためには，生産の側面を明示的にモデル化する必要がある。二つ目に，本稿では理論的な分析だけを行っているが，モデルの結果の妥当性を実証的に検証する必要がある。これらについては今後の研究の課題としたい。

### A　補論

#### A.1　政治目的関数 Ω(·) の導出

有権者は各政党がアナウンスした経済政策およびイデオロギー・バイアスに従ってどちらの政党に投票するのかを決定する。具体的には，グループ $J$ の有権者 $k$ が政党 $A$ に投票するための条件は次の様に表される。

$$V^J(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) > V^J(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) + \sigma^{kJ} + \delta. \tag{13}$$

但し，$V^j$ はグループ $J$ の間接効用関数，$\{\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}\}$ と $\{\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}\}$ はそれぞれ政党 $A$ と政党 $B$ がアナウンスした政策の組である。次に，有権者は政策の他に各政党間に選好上のバイアスを持つと仮定する。まず，$\sigma^{kJ}$ はグループ $J$ の有権者 $k$ が個人的に持つイデオロギー・バイアスであり，$\sigma^{kJ}$ が正の値を取る場合には政党 $B$ を，負の値を取る場合には政党 $A$ を相対的に好むことを意味する。また，簡単化のために $\sigma^{kJ}$ はグループに関わらず $[-1/(2\phi), 1/(2\phi)]$ の区間で一様分布していると仮定する。次に，$\delta$ は社会全体でのイデオロギー・バイアスを表す確率変数であり，正の値を取る場合には政党 $B$ が，負の値を取る場合には政党 $A$ が相対的に好まれていることを意味する。また，$\delta$ は $[-1/(2\phi), 1/(2\phi)]$ の区間に一様分布していると仮定する。

投票は下記のように行われる。まず，二つの政党が独立かつ同時に政策の組 $\{\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}\}$ と $\{\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}\}$ をアナウンスする。次に，確率変数 $\delta$ の値が決定される。最後に投票が行われ，より多くの票を獲得した政党が予めアナウンスした政策を実行する。

ここで，グループ $J$ の有権者のうち，政党 $A$ でも政党 $B$ でも無差別な個人のイデオロギー・バイアスを $\sigma^J$ とおくと，次式を得る。

$$\sigma^J = V^J(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) - V^J(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) - \delta. \tag{14}$$

$\sigma^{kJ}$ が大きいほど政党 $B$ を好むため，$\sigma^{kJ} > \sigma^J$ の有権者は政党 $B$ に，$\sigma^{kJ} \leq \sigma^J$ の有権者は政党 $A$ に投票する。この時，政党 $A$ の得票率 $\Gamma_A$ は下記のように求められる。

$$\Gamma_A = \frac{1}{N_{j,t}+N_{j,t-1}} \cdot \left\{ \underbrace{N_{j,t-1} \cdot \phi \cdot \left(\sigma^o + \frac{1}{2\phi}\right)}_{old} + \underbrace{N_{j,t} \cdot \phi \cdot \left(\sigma^y + \frac{1}{2\phi}\right)}_{young} \right\}$$
$$= \frac{\phi}{2+n_j} \cdot \left\{ \left(\sigma^o + \frac{1}{2\phi}\right) + (1+n_j) \cdot \left(\sigma^y + \frac{1}{2\phi}\right) \right\}. \tag{15}$$

(14)式より $\sigma^J$, $J \in \{y, o\}$ は確率変数 $\delta$ に依存しているため，政党 $A$ の得票率 $\Gamma_A$ も確率変数である。(14)式と(15)式を用いると，政党 $A$ が過半数の票を獲得する確率は次の様に導出される。

$$\begin{aligned}
P^A &= \mathrm{Prob}_\delta\left[\Gamma_A \geq \frac{1}{2}\right] \\
&= \mathrm{Prob}_\delta\left[\frac{\phi}{2+n_j} \cdot \left\{ \left(\sigma^o + \frac{1}{2\phi}\right) + (1+n_j) \cdot \left(\sigma^y + \frac{1}{2\phi}\right) \right\} \geq \frac{1}{2}\right] \\
&= \mathrm{Prob}_\delta\Bigg[ V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) - V^o(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) - \delta + \frac{1}{2\phi} + (1+n_j) \cdot \Big\{ V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\qquad - V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) - \delta + \frac{1}{2\phi} \Big\} \geq \frac{2+n_j}{2\phi} \Bigg] \\
&= \mathrm{Prob}_\delta\Big[ \{ V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) - V^o(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} + (1+n_j) \cdot \{ V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\qquad - V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} \geq (2+n_j)\delta \Big] \\
&= \mathrm{Prob}_\delta\Bigg[ \frac{1}{2+n_j} \cdot \{ V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) - V^0(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} + \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \{ V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\qquad - V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} \geq \delta \Bigg] \\
&= \phi \cdot \Bigg[ \frac{1}{2+n_j} \cdot \{ V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) - V^0(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} + \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \{ V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\qquad - V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} + \frac{1}{2\phi} \Bigg] \\
&= \frac{1}{2} + \phi \cdot \Bigg[ \frac{1}{2+n_j} \cdot \{ V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) - V^0(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} + \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \{ V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\qquad - V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \} \Bigg].
\end{aligned}$$

政党 $B$ が過半数の票を獲得する確率は $1-p_A$ なので，

$$\begin{aligned}
P^B &= 1 - P^A \\
&= \frac{1}{2} + \phi \cdot \Bigg[ \frac{1}{2+n_j} \cdot \{ V^o(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) - V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \} + \frac{1+n_j}{2+n_j} \cdot \{ V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \\
&\qquad - V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \} \Bigg].
\end{aligned}$$

この時，どちらの政党も過半数の票を得る確率を最大にするようにアナウンスする政策を決定することに注意すると，ナッシュ均衡は次の様に特徴付けられる。

$$\begin{aligned}
(\tau^*_{j,A}, g^*_{j,A}, b'^*_{j,A}) &= \arg\max_{\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}} \omega_j \{ V^o(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\quad - V^o(\tau^*_{j,B}, g^*_{j,B}, b'^*_{j,B}) \} + (1-\omega_j) \{ V^y(\tau_{j,A}, g_{j,A}, b'_{j,A}) \\
&\quad - V^y(\tau^*_{j,B}, g^*_{j,B}, b'^*_{j,B}) \}, \\
(\tau^*_{j,B}, g^*_{j,B}, b'^*_{j,B}) &= \arg\max_{\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}} \omega_j \{ V^o(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \\
&\quad - V^0(\tau^*_{j,A}, g^*_{j,A}, b'^*_{j,A}) \} + (1-\omega_j) \{ V^y(\tau_{j,B}, g_{j,B}, b'_{j,B}) \\
&\quad - V^y(\tau^*_{j,A}, g^*_{j,A}, b'^*_{j,A}) \}.
\end{aligned}$$

但し，$\omega_j \equiv 1/(2+n_j)$ である。従って，均衡ではどちらの政党も同じ政策の組をアナウンスする。

$$\begin{aligned}
(\tau^*_{j,A}, g^*_{j,A}, b'^*_{j,A}) &= (\tau^*_{j,B}, g^*_{j,B}, b'^*_{j,B}) \\
&= \arg\max_{\tau, g, b'} \omega_j V^o(\tau, g, b') + (1-\omega_j) V^y(\tau, g, b').
\end{aligned} \tag{16}$$

これが3.1節で与えられている政治目的関数である。

### A.2　(8)式と(9)式の導出

(6)式と(7)式を政治目的関数 $\Omega$ に代入すると，

$$\Omega(\tau_j, g_j, b_j'; n_j, R) = \omega(n_j)\cdot\frac{1}{1-\sigma}\cdot\theta\cdot(g_j)^{1-\sigma}$$
$$+(1-\omega(n_j))\cdot\frac{1}{1-\sigma}\cdot\Big[\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}^{\sigma}\cdot\{w-(1-\tau_j)\}^{1-\sigma}$$
$$+\theta\cdot(g_j)^{1-\sigma}+\beta\theta\cdot(g_j')^{1-\sigma}\Big].$$

この式から，$g_j$ と $\tau_j$ に関する一階条件が次の様に.
得られる。

$$\{(1-\omega(n_j))+\omega(n_j)\}(g_j)^{-\sigma} + (1-\omega(n_j))+\beta(g_j')^{-\sigma}\cdot\frac{\partial g_j'}{\partial b_j'}\cdot\frac{\partial b_j'}{\partial g_j'}=0, \quad (17)$$
$$-\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}^{\sigma}\cdot w^{1-\sigma}(1-\tau_j)^{-\sigma} + \beta\theta(g_j')^{-\sigma}\cdot\frac{\partial g_j'}{\partial b_j'}\cdot\frac{\partial b_j'}{\partial \tau_j}=0. \quad (18)$$

$\omega(n_j)\equiv 1/(2+n_j)$ 及び(1)式の政府の予算制約式より $\partial b_j'/\partial g_j = 1/(1+n_j)$ であることに注意して(17)式を整理すると，(8)式が得られる。次に政府の予算制約式より $\partial b_j'/\partial\tau_j = -w/(2+n_j)$ であることに注意して(18)式を整理すると，

$$\frac{\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}^{\sigma}}{(1-\tau_j)^{\sigma}}\cdot w^{1-\sigma} = -\beta\theta(g_j')^{-\sigma}\cdot\frac{\partial g_j'}{\partial b_j'}\cdot\frac{w}{2+n_j}.$$

最後に(17)式を用いて $\partial g_j/\partial b_j'$ を消去して整理すると，(9)式が得られる。

### A.3　補題 1 の証明

(9)式で表される $\tau_j$ に関する一階条件を政府の予算制約式に代入すると次式を得る。

$$b_j' = \frac{g_j}{1+n_j}+\frac{Rb_j}{1+n_j}-\frac{w_j}{2+n_j}\cdot \Big[1-\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\cdot\frac{1}{w}\cdot g_j\Big].$$

ここで自然債務限度の定義より $w/(2+n_j) = \{R-(1+n_j)\}\bar{b}_j/(1+n_j)$ であることに注意すると，上式は次の様に書き換えられる。

$$b_j' = \frac{g_j}{1+n_j}+\frac{Rb_j}{1+n_j}-\frac{R-(1-n_j)}{1+n_j}\cdot\bar{b}_j + \frac{1}{2+n_j}\cdot\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\cdot g_j. \quad (19)$$

ここで，(8)式，(9)式および(19)式を満たすような政策関数が次のような線形関数であると予想する。

$$g_j' = (1+n_j)\cdot\gamma_j\cdot(\bar{b}_j - b_j'). \quad (20)$$

但し，$\gamma_j$ は未定係数である。(20)式を(8)式に代入すると次式が得られる。

$$\left(\frac{(1+n_j)\cdot\gamma_j\cdot(\bar{b}_j-b_j')}{g_j}\right)^{\sigma} = \frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\beta\cdot\gamma_j.$$

ここで，上式を $b_j'$ について解くと，

$$b_j' = \bar{b}_j - \frac{1}{1+n_j}\cdot(\gamma_j)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot g_j.$$

この式を(19)式に代入して整理すると，次式を得る。

$$g_j = \frac{R\cdot(\bar{b}_j-b_j)}{1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}+(\gamma_j)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

従って，$R$ が所与の下で以下の条件を満たす $\gamma_j$ が存在するのならば，(20)式の予想が正しいと結論付けられる。

$$(1+n_j)\cdot\gamma_j = \frac{R}{1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}+(\gamma_j)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}}. \quad (21)$$

ここで上式を整理すると，次式を得る。

$$\frac{R}{1+n_j}-\gamma_j\cdot\left[1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\Big\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\right] = \gamma_j^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

以下では(21)式の左辺を $LHS$，右辺を $RHS$ と表す。$LHS$ は $\gamma_j$ の減少関数であり，更に $LHS|_{\gamma_j=0} = R/(1+n_j) > 0$ かつ $\lim_{\gamma_j\to\infty} LHS = -\infty$ を満たす。次に，$RHS$ は $\gamma_j$ の増加関数であり，更に $RHS|_{\gamma_j=0}=0$ かつ $\lim_{\gamma_j\to\infty} RHS = \infty$ を満たす。以上から，(21)を満たすような $\gamma_j(>0)$ が必ず一つだけ存在することが分かる。税率と国債発行量に関する政策関数はここで求めた $g_j = (1+n_j)\cdot\gamma_j\cdot(\bar{b}_j - b_j)$ を(9)式および(19)式に代入することで導出できる。

### A.4　補題 3 の証明

まず $\sigma\geq 1$ の場合について考える。以下では(12)式の左辺を $LHS(R^*)$，右辺を $RHS(R^*)$ と表すこ

とにする。まず，$LHS(R^*)$ は増加関数であり，更に $LHS(1)=1/(1+n_{j^*})$ かつ $\lim_{R^*\to\infty} LHS(R^*)=\infty$ である。次に $\sigma \geq 1$ に注意すると，$RHS(R^*)$ は減少関数であり，更に $RHS(1)>1/(1+n_{j^*})$ かつ $\lim_{R^*\to\infty} RHS(R^*)\in(1,+\infty)$ である。従って，$\sigma\geq 1$ の時，(12)式を満たす $R^*>1$ が一つだけ必ず存在する。

次に，$1>\sigma>1/2$ の場合について考える。(12)式から

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial RHS(R^*)}{\partial R^*}=\beta^{\frac{1}{\sigma}-1}\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\cdot\frac{1-\sigma}{\sigma}\cdot(R^*)^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}>0,\\
&\frac{\partial^2 RHS(R^*)}{\partial (R^*)^2}=\beta^{\frac{1}{\sigma}-1}\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\cdot\frac{1-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{1-2\sigma}{\sigma}\cdot(R^*)^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}\\
&\qquad<0,\\
&\lim_{R^*\to\infty}\frac{\partial RHS(R^*)}{\partial R^*}=0.
\end{aligned}
$$

が成立する。一方，$\partial LHS(R^*)/\partial R^*=1/(1+n_{j^*})$ なので，$1>\sigma>1/2$ の場合にも(12)式を満たす $R^*>1$ が一つだけ必ず存在する。

最後に $\sigma=1/2$ の場合について考える。(12)式に $\sigma=1/2$ を代入して整理すると，均衡世界利子率が次のように導出される。

$$
R^*=1+\frac{(2+n_{j^*})+\beta n_{j^*}+(1+\beta^2)\theta^{-2}(1+n_{j^*})}{\beta\cdot\{1-\beta\theta^{-2}(1+n_{j^*})\}}. \tag{22}
$$

従って，$\theta>\sqrt{\beta(1+n_{j^*})}$ の場合に $R^*>1$ が成立する。

### A.5 命題 1 の証明

まず，補題 1 にある $\gamma_j^*$ の決定式は次の様に書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\\
&\quad\gamma_j^*\cdot\left[1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\cdot\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\right]-\frac{R}{1+n_j}=0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

ここで，陰関数定理を用いると(23)式より次式を得る。

$$
\frac{\partial\gamma_j^*}{\partial n_j}=
-\frac{(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}}\beta^{\frac{1}{\sigma}}\frac{1}{\sigma}+\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\frac{1}{(2+n_j)^2}+\gamma_j^*\frac{1}{(2+n_j)^2}\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\theta^{-\frac{1}{\sigma}}+\frac{R}{(1+n_j)^2}}{\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}+1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}}.
$$

ここで(11)式より，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_j^*}{\partial n_j}&=\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\frac{\partial\gamma_j^*}{\partial n_j}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\\
&\qquad(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}}\beta^{\frac{1}{\sigma}}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\frac{1}{(2+n_j)^2}\\
&=\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot\\
&\qquad\left\{\frac{\partial\gamma_j^*}{\partial n_j}+\frac{\gamma_j^*}{(1+n_j)(2+n_j)}\right\}.
\end{aligned}
$$

(24)式を代入して整理すると次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_j^*}{\partial n_j}&=\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot\frac{\gamma_j^*}{(1+n_j)(2+n_j)}\\
&\times\left\{1-\frac{\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\frac{1+n_j}{2+n_j}\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\theta^{-\frac{1}{\sigma}}+\frac{2+n_j}{\gamma_j^*(1+n_j)}R}{\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}+1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}}\right\}\\
&=\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot\frac{\gamma_j^*}{(1+n_j)(2+n_j)}\\
&\times\frac{1-\frac{2+n_j}{\gamma_j^*(1+n_j)}R}{\frac{1}{\sigma}(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}+1+\frac{1+n_j}{2+n_j}\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\cdot\theta^{-\frac{1}{\sigma}}}.
\end{aligned}
$$

最後に(10)式より，

$$
\begin{aligned}
&\frac{2+n_j}{\gamma_j^*(1+n_j)}\cdot R\\
&\quad=(2+n_j)+(1+n_j)\left\{1+\beta(\beta R)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right\}\theta^{-\frac{1}{\sigma}}\\
&\qquad+(2+n_j)(\gamma_j^*)^{\frac{1}{\sigma}-1}\left(\frac{1+n_j}{2+n_j}\beta\right)^{\frac{1}{\sigma}}>1,
\end{aligned} \tag{26}
$$

であるため，(25)式より $\partial\phi_j^*/\partial n_j<0$ が成立する。


### 謝辞

本研究は公益財団法人村田学術振興財団の支援により実施されました。また，本稿の作成過程において，1名の匿名査読者の方から数多くの有益なコメントを頂きました。ここに記して感謝致します。なお，本稿にありうべき誤りは，全て著者の責に帰するものです。

## 注

1）この仮定はどのタイプの国であっても，積分で定義したサイズがゼロにならないことを保証する。

2）本稿のモデルでは実質的には生産活動を捨象しており，非弾力的な労働供給の下で税率の変動が労働供給に全く影響を与えないことを仮定している。Song, Storesletten, and Zilibotti（2012）でも指摘されているように，この仮定によって解析的な分析が可能となる。Song, Storesletten, and Zilibotti（2012）では労働供給が内生的に決定されるモデルを分析しているが，多くの分析はカリブレーションによる定量的なものとなっている。一方，本稿では人口成長率と国債残高に関する定性的な結論を導くため，労働供給が非弾力的であるとして分析を進める。

3）公共財の総供給量を $G_{j,t}$，総国債残高を $B_{j,t}$ とおくと，政府の予算制約式は

$$B_{j,t+1} = G_{j,t} + RB_{j,t} - N_{j,t}\tau_{j,t}w.$$

両辺を $t$ 期の総人口（$N_{j,t} + N_{j,t-1}$）で割ると(1)式が得られる。

4）これらの式の導出方法については補論 A.2 を参照。

5）人口成長率が有限個の値しか取らないため，どのタイプの国であっても積分で定義したサイズがゼロにならないことに注意せよ。

6）自然債務限度の定義より，常に $\bar{b}_j - b_j \geq 0$ であることに注意せよ。

## 参考文献


Aghion, P., and Bolton, P. (1990), Government domestic debt and the risk of default: a political-economic model of the strategic role of debt. In: Dornbusch, R., and Draghi, M., (eds.), *Public Debt Management: Theory and History*, 315-344. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Alesina, A., and Tabellini, G. (1990), A positive theory of fiscal deficits and government debt. *Review of Economic Studies* 57, 403-414.

Attanasio, O., and Weber, G. (1989), Intertemporal substitution, risk aversion and the Euler equation for consumption. *Economic Journal* 99, 59-73.

Azzimonti, M., de Francisco, E., and Quadrini, V. (2014), Financial globalization, inequality, and the rising public debt. *American Economic Review* 104, 2267-2302.

Battaglini, M., and Coate, S. (2008), A dynamic theory of public spending, taxation, and debt. *American Economic Review* 98, 201-236.

Browning, M., Hansen, L.P., and Heckman, J. (1999), Micro data and general equilibrium models. In: Taylor, J., and Woodford, M. (eds.), *Handbook of Macroeconomics*, Volume 1A, 543-633. North-Holland, Amsterdam.

Campbell, J.Y., and Mankiw, N.G. (1989), Consumption, income, and interest rate: reinterpreting the time series evidence. In: Blanchard, O. J., and Fischer, S. (eds.), *NBER Macroeconomics Annual*, 185-246. MIT Press, Cambridge, MA.

Campbell, J.(1999), Asset prices, consumption and the business cycle. In: Taylor, J., 21 and Woodford, M. (eds.), *Handbook of Macroeconomics,* Volume 1C, 1231-1303. North-Holland, Amsterdam.

de Walque, G., and Gevers, L. (2001), Heterogeneous dynasties and the political economy of public debt. *Scandinavian Journal of Economics* 103, 369-389.

Hall, R. (1988), Intertemporal substitution in consumption. *Journal of Political Economy* 96, 339-357.

Hansen, L., and Singleton, K. (1982), Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica* 50, 1269-1286.

Kydland, F., and Prescott, E. (1982), Time to build and aggregate fiuctuations. *Econometrica* 50, 1345-1370.

Lindbeck, A. and Weibull, J. (1987), Balanced-budget redistribution as the outcome of political competition. *Public Choice* 52, 273-297.

Natvik, G.J. (2013), The political economy of fiscal deficits and government production. *European Economic Review* 58, 81-94.

Persson, T., and Svensson, L.E.O. (1989), Why a stubborn conservative would run a deficit: policy with time-inconsistent preferences. *Quarterly Journal of Economics* 104, 325-345.

Song, Z., Storesletten, K., and Zilibotti, F. (2012), Rotten parents and disciplined children: a politico-economic theory of public expenditure and debt. *Econometrica* 80, 14 2785-2803.

Tabellini, G. (1986), Money, debt and deficits in a dynamic game. *Journal of Economic Dynamics and Control* 10, 427-442.

Tabellini, G., and Alesina, A. (1990), Voting on the budget deficit. *American Economic Review* 80, 37-49.

Velasco, A. (1999), A model of endogenous fiscal deficits and delayed fiscal reforms. In: Poterba, J., and von Hagen, J. (eds.), *Fiscal Institutions and Fiscal Performance*, 37-58. University of Chicago Press, Chicago IL.

Vissing-Jorgensen, A., and Attanasio, O. (2003), Stock market participation, intertemporal substitution and risk aversion, *American Economic Review* 93, 383-391.


（名古屋大学大学院経済学研究科）