

[研究動向]

自己回帰モデルの遅延演算子による解法

樋野 励

I. はじめに

本質的には同じであったり、あるいは類似の性質を持っていても、表現の違いからそのことに気付かないことは決して珍しくない。本稿では、経済学で広く用いられる自己回帰モデル (autoregressive model) について、その解法の入門的な解説を試みる。自己回帰モデルは、統計学や信号処理などに用いられる確率過程の表現方法の1つである。ここでは、信号処理において良く用いられる遅延演算子による解法の説明を行う。その際、経済学で初歩的な問題として取り上げられる1次のモデルに加え、2次のモデルについても例題として取りあげる。この例題からは、機械構造物を扱う工学を学ぶ者にとっては馴染み深い結果が得られるため、工学と経済学への橋渡しになることを意図している。

II. 1次の自己回帰モデルとその解

1. 自己回帰モデルと蜘蛛の巣理論

自己回帰モデルの定義は次式の通りである。

$$x_t = c + \sum_{i=1}^n \varphi_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

ここで、 φ_i は、モデルのパラメータであり、 c は定数項である。 ε_t は、ホワイトノイズ (全ての周波数で同じ強度を有する信号) とすることが多いが必ずしもこれに限らない。

この式において、 $n = 1$ のモデルを1次の自己回帰モデルと呼び、AR(1) と記す。AR(1) で表される事象の例として、蜘蛛の巣理論 (cobweb theorem) (Ezekuek 1938, 三神 1995) は適切な話題の1つと考えられる。

蜘蛛の巣理論は、需要量と供給量に対して、価格の調整過程の説明として取り上げられる (Henderson, James M., 1980)。図1に示すように、需要量と生産量が価格の均衡点の近傍では、線

形式により表すことができることを仮定し、次式を考える。

$$\text{需要曲線の線形近似式} : d_t = a + \alpha p_t$$

$$\text{供給曲線の} \quad \quad \quad : s_t = b + \beta p_t^*$$

$$\text{市場均衡} \quad \quad \quad : s_t = d_t$$

ここで、 t 期の生産物の需要量を d_t 、供給量を s_t とし、 p_t をその価格とする。また、 α 、 β 、 a および b は、いずれもあらかじめ与えられる定数である。言うまでもなく、これらの定数の値によって、対象とする事象が特徴づけられる。このモデルでは、(i) 消費者は市場価格で生産物を購入でき、(ii) 生産者はなんらかの手段により市場の価格の予測を行い、その予想価格に応じて生産物をつくることを前提としている。

これらの式から、 d_t と s_t の消去により、次のように t 期の価格 p_t と価格の予測値 p_t^* の関係を求めることができる。

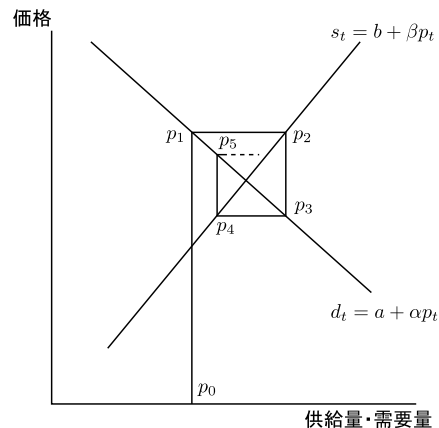


図1：供給・需要と価格の調整過程

$$p_t = \frac{b-a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} p_t^*$$

ここで、生産者が、 t 期の価格の予想値 p_t^* として、

1つ前の期である $t-1$ 期の価格 p_{t-1} を用いることを仮定する。すなわち、次式で与えられる関係を考える。

$$p_t^* = p_{t-1}$$

この関係に従い、次の 1 次の自己回帰モデルを得る。

$$p_t = \frac{b-a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} p_{t-1} \quad (1)$$

この回帰モデルを満足する価格 p_t は、ある条件下において螺旋状の軌跡を辿り価格の均衡値に至る。この収束過程で価格 p_t が取る値の軌跡が蜘蛛の巣のように見えるのが名前の由来となっている。ただし、この問題の興味は、単にこの価格値だけではなく、その収束条件を知ることにある。そのためには、このモデルの解を知る必要があるが、ここでは、この漸化式からの解の誘導は行わず（たとえば、広瀬、1989を参照）、本稿では遅延演算子による解法を挙げる。

2. 遅延演算子による解法

遅延演算子 D (delay operator, lag operator) (Devid Romer, 2006) とは、以下のように離散値を取る事象に対して、連続する 2 項の関係を与える。

$$Dy[n] = y[n-1] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

この関係から、たとえば $y[n-2]$ は、 $y[n-2] = Dy[n-1]$ であるから、 $y[n-2] = D^2y[n]$ と表される。この演算を施すことにより、 $y[n]$ が新たな変数 z の関数 $Y[z]$ に写されたとする。このとき、 $D = z^{-1}$ として、 $y[n-1]$ と $y[n-2]$ がそれぞれ、 $z^{-1}Y[z]$ と $z^{-2}Y[z]$ に写されると考えるのが、遅延演算子による解法になる。いわゆる z 変換を行うことになるが詳細は専門書（及川、1977）を参照されたい。

z 変換は差分方程式を扱うときに極めて有効である。このことは、ラプラス変換と微分方程式との関係を念頭におくと少しだけ理解の助けになるかも知れない。

z 変換の基本的な考え方について簡単な説明を行う。まず、式(1)の定数項を取り除きたいいわゆる齊次式から 1 次の自己回帰モデルの解の特徴の確認を行う。

$$p_t = \frac{\beta}{\alpha} p_{t-1} \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

この式は、公比 β/α の等比数列を与える。そのため、初項を 1 として、一般項 p_t は次式で与えられる。

$$p_t = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

言い換えればこの式が 1 次の自己回帰モデルの解の基本形になる。

このことを踏まえて差分式により表わされる事象の特徴の推測を行う。そのために、式(2)を恒等式の形で書き改める。つまり、次の式について考察を行う。

$$\alpha p_t - \beta p_{t-1} = 0. \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

この式によって表される 2 項間の関係は、与えられた $t (t = 1, 2, 3, \dots)$ の全てについて成り立たねばならない。すなわち、 p_t と p_{t-1} をそれぞれ t の関数 $f_p(t)$ および $f_p(t-1)$ と見たとき、これらは、同じ関数を基底に持たなくてはおかしい。このことが、2 つ以上の関数の線形和が右辺に表わされるように t によらない定数 (= 0) になるときの意味である。たとえば、 $y = f(x)$ により $x-y$ 平面に表される関数のグラフを考えよう。 $y = f(x-1)$ は、 $y = f(x)$ を x 軸方向に 1 だけ平行することによって描くことができる。ところが、この平行移動によって描かれるグラフ $y = f(x-1)$ を y 軸方向に定数 (β/α) 倍すると平行移動の前の関数 $y = f(x)$ のグラフと重なることを式(2)は言っている。このような関数を考えたとき、最初に頭に浮ぶのは、指数関数であろう。このことは、式(3)の一般項の説明としても受け入れやすい。つまり、線形差分方程式の解は、指数関数を前提に考えれば良く、 z (z は複素数) を底とする指数関数を扱う。

なお、ラプラス変換を微分方程式に施すときも、その基本的な方針は同じである。微分方程式の齊次式を恒等式として見たときに、一般解は、微分演算を行ってもその形を変えないことを表している。そのような関数は、自然乗数 e を底とする指数関数 e^s (s は複素数) である。

3. 蜘蛛の巣モデルの解

遅延演算子、ここでは z 変換を行うことにより解を求める。まず、式(1)を、定数項の時間遅れの効果に気を付けて、次式のように表す。

$$p[n] = \frac{b-a}{\alpha}u[n-1] + \frac{\beta}{\alpha}p[n-1] \quad n \geq 1$$

ここで、 $u[n]$ は、 $n \geq 0$ で 1 の値を取る単位ステップ入力であり、次の定義を与える。

$$u[n] = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

この差分式の z 変換の結果は次のとおりである。

$$P[z] - \frac{\beta}{\alpha}z^{-1}P[z] = \frac{b-a}{\alpha} \times z^{-1}U[z]$$

ここで、 $U[z]$ は、単位ステップ入力 $u[n]$ の z 変換の結果であり、 $U[z] = \frac{1}{1-z^{-1}}$ であることが知られている。したがって、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}z^{-1}\right)P[z] &= \frac{b-a}{\alpha}z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} \\ P[z] &= \frac{b-a}{\alpha}z^{-1}\frac{1}{(1-z^{-1})\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{b-a}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{\beta}{\alpha}z^{-1}}\right) \end{aligned}$$

ここで $1/(1-Az^{-1})$ が、 A^n の z 変換の結果であることから、次の解を得る。

$$p[n] = \frac{b-a}{\alpha-\beta}\left\{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right\}$$

この結果から、価格 $p[n]$ が十分に時間が経過したのちに一定値になる、すなわち均衡値を得るためには $\beta < \alpha$ でなくてはならないことが分る。

Ⅲ. 2 次の自己回帰モデルと周波数応答

1. 2 次の自己回帰モデルの解法

生産者が、 t 期の 1 つ前の期である $t-1$ 期の価格 p_{t-1} だけでなく、2 つ前の期である $t-2$ 期の価格 p_{t-2} を利用して、 t 期の価格 p_t の予測を行う場合は、異なる期の間の関係は 2 次の自己回帰モデルにより表すことができる。このような高次の差分方程式に対しても遅延演算子による取り組みは有効である。

過去の実績を用いて、次に起る事象の値を加重移動平均法や指数平滑法による予測を行えば、2 次代表される高次の自己回帰モデルが得られる。こ

では、次のように、 t 期の価格の p_t を $t-1$ 期と $t-2$ 期の価格 p_{t-1} を p_{t-2} を $\alpha:\beta$ の外分による予測を考える。

$$p_t = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}p_{t-1} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}p_{t-2} + \gamma \quad t = 2, 3, \dots$$

まず、遅延演算子による解法の流れを確かめるために、次の 2 次の自己回帰モデルを取り上げる。1 次の差分方程式と同様に定数項を時間遅れの影響を考慮に入れて次式を考える。

$$p[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}p[n-1] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}p[n-2] + \gamma u[n-2] \quad n = 2, 3, \dots \quad (4)$$

この式(4)の各項の z 変換行をい、次式を得る。

$$P[z] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}z^{-1}P[z] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}z^{-2}P[z] + \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}\gamma$$

これより、 $P[z]$ 、および $p[n]$ は次のように求めることができる。ただし、 $p[0] = 0$ および、 $p[1] = 0$ の仮定を設けている。

$$\begin{aligned} P[z] &= \frac{\gamma(\alpha-\beta)z^{-2}}{(\alpha-\beta-\alpha z^{-1}+\beta z^{-2})(1-z^{-1})} \\ &= \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{(2\beta-\alpha)^2} \left\{ \frac{\alpha-\beta}{1 - \frac{\beta}{\alpha}z^{-1}} + \frac{3\beta-2\alpha}{1-z^{-1}} - \frac{2\beta-\alpha}{(1-z^{-1})^2} \right\} \\ p[n] &= \frac{\gamma(\alpha-\beta)^2}{(2\beta-\alpha)^2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{3\beta-2\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{2\beta-\alpha}{\alpha-\beta}(n+1) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

2. 例題

2 次の自己回帰モデルに具体的な数値を与えてその挙動を調べる。ここでは、次の 2 次の自己回帰モデルを取りあげる。 $x[n]$ は、 $x[n-1]$ と $x[n-2]$ を 2:1 の外分点から僅かに外れている値を用いる。つまりこのモデルは、式(4)に対する結果である式(5)を用いることはできず、改めて数値的な解析を行う。係数の値については付録を参照されたい。

$$x[n] = \frac{202.5}{103.5}x[n-1] - \frac{100}{103.5}x[n-2] + \frac{1}{103.5}f[n-2] \quad (6)$$

差分式に従って逐次値を求めることによって、解析的に解を求めることなく、その事象の挙動を知ることができる。図 2 は、 $x[0] = x[1] = 0$ とし、時

刻 $n = 0$ に、インパルス状の外乱 $u[0] = 10$ が加わることを仮定して、 $x[n]$ の値を求めた結果を示している。このように、この差分方程式の解は、時間とともに一定値 (= 0) に収束することが分る。

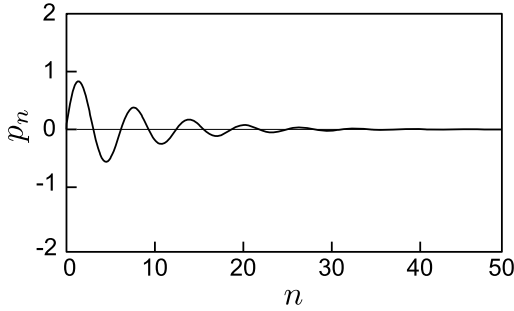


図 2 : インパルス応答

この 2 次の自己回帰モデルに対する遅延演算子を用いた求解の過程を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 103.5X[z] - 202.5z^{-1}X[z] + 100z^{-2}X[z] &= z^{-2}F[z] \\
 (103.5 - 202.5z^{-1} + 100z^{-2})X[z] &= z^{-2}F[z] \\
 \frac{X[z]}{F[z]} &= \frac{z^{-2}}{103.5 - 202.5z^{-1} + 100z^{-2}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

ここでは、 z 変換の結果を部分分数に変形せず、事象の一般解を求めていない。それにも関わらず、多くの情報を得ることができる。たとえば、式(7)を求めた時点で、 $z^{-1} = (81 \pm \sqrt{7}i)/80$ に極を持つことが分る。つまり、極が複素数であることから入力に対する応答は振動を生じ、さらに $|(81 \pm \sqrt{7}i)/80| = 1.035 > 1$ であることから、この応答は減衰しながら一定値に収束することが分る。これは、図 2. に示した事象の挙動と一致する。

蜘蛛の巣モデルでも触れたように系の安定性は重要な論点である。工学では、解の安定性に加えて、外部からの入力に対する応答に興味がある。すなわち、ここで扱うような系は外部からの入力の周波数に応じて挙動が変わる。この特性を周波数応答と言う。周波数応答は式(7)において $z = e^{i\omega}$ の置き換えにより求めることができる。周波数応答曲線を図 3 に示す。

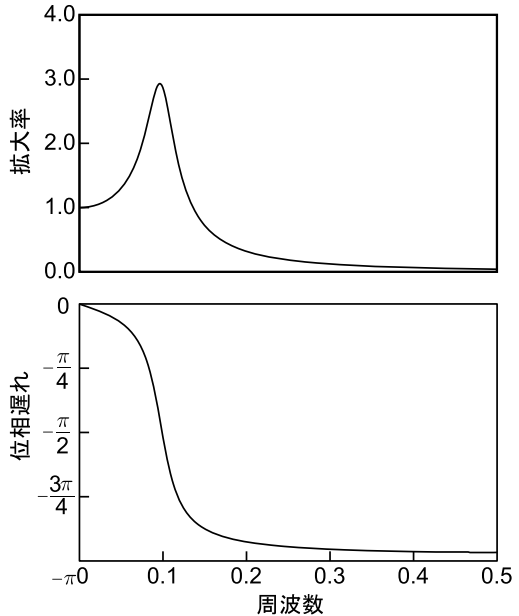


図 3 : 応答曲線

IV. おわりに

経済学では、差分式による対象の記述が多く見られる。本質的には微分方程式により表される 1 自由度の振動現象と同じであり、数学的にも同じ手法により両者を扱うことが可能である。本稿では、1 次および 2 次の自己回帰モデルを取り上げ、差分方程式の解法について概要の説明を行った。特に 2 次の差分方程式は、機械構造物の検討の基礎である 1 自由度の振動系の挙動に馴染みの深い結果が得られるような係数を意図的に取り上げている。工学部から経済学部へ、そしてその逆の学問領域を学ぶきっかけになることを望んで筆を置く。

V. 参考文献

- 及川多喜雄 (1977), 『制御系の数学』内田老鶴園新社。
- 中川憲治, 岩壺卓三, 室津義定 (1986) 『工業振動学』森北出版。
- 広瀬明 (1989), 「くもの巣理論の数理解析 一初学者のための差分方程式の解法一」『秋田経済法科大学経済学部紀要』 No.11, p59-66.
- 三神俊信 (1995), 「IS-LM モデルと量的因果連鎖」『政経論叢』第 63 巻第 2・3 号, pp.77-108.
<http://hdl.handle.net/10291/8388>.
- Ezeliel, Mordcai (1938), The Cobweb Theorem,

Quarterly Journal of Economics, pp.255-280.

David Romer (2006), 堀雅博ら訳、『上級マクロ経済学』
日本評論社。

Henderson, James M., and Quandt, Richard E. (1980),
Microeconomic Theory -A Mathematical Approach-
(Third Edition), McGraw Hill.

付録

工学系、特に機械工学の分野では構造物の振動現象を取り扱い、中でも1自由度の振動系の運動方程式は学部 of 早い段階で学ぶ最も基礎かつ重要な課題である。具体的には、構造物の質量を m 、減衰を c そしてばね定数を k として、これに時間的に変化する外力を時間を t で表すことにより、 $f(t)$ と与える。このとき、着目点の釣り合いの位置からの変位をやはり時間 t の関数として $x(t)$ で表せば、次式で与えられる。

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = f(t) \quad (8)$$

第1項は慣性力であり、第3項は復元力である。それぞれニュートンにより提唱された運動の第2法則とフックの名を冠する弾性の法則であり、いずれも高等学校でそれらの基礎を学ぶ。第2項はいわゆる粘性のある物体に作用する力である。この力は速度に比例し、保存力でないために、外力が作用しないときには時間の経過とともにいずれ停止する。

この方程式は、2階の微分方程式である。ラプラス変換により階を求めることができるが、ここではこの微分方程式から、1自由度の振動系の差分式を導く。とは言っても、差分方程式は形式的に容易に導出は可能である。離散化にあたりサンプリングの間隔を Δt とすれば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} m \frac{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]}{\Delta t^2} + c \frac{x[n] - x[n-1]}{\Delta t} \\ + kx[n] = f[n-2] \\ \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} + k \right) x[n] - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} \right) x[n-1] \\ + \frac{m}{\Delta t^2} x[n-2] = f[n-2] \end{aligned}$$

例えば、 $m = 1.0$ $c = 0.25$ $k = 1.0$ $\Delta t = 0.1$ を与え、以下の値を得る。

$$\begin{aligned} \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} + k &= 100.0 + 2.5 + 1.0 = 103.5 \\ \frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{c}{\Delta t} &= 200 + 2.5 = 202.5 \\ \frac{m}{\Delta t^2} &= 100.0 \end{aligned}$$

なお、式(8)の過渡応答は、解析的に次式で与えられることが知られている(中川ら, 1986)。

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

ここで ζ , ω_n そして ω_d は以下のように定義される。

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n.$$

この関数は重み関数と呼ばれ、インパルス力が加えられた時の時間領域の応答を意味する。図2は、この重み関数の結果と一致する。

(名古屋大学大学院経済学研究科)