中学一年における図形教材の論証的取扱いについて

岩　倉　　一

1. 対　　象

中学一年B組（男子26名，女子26名，完全抽せんにより入学）

2. 実施期間

6月上旬～同下旬

3. 参考文献

○中学校に於ける論証の性格（石谷茂）
○中学校に於ける図形教材について（小林衞）
○中学校数学教材について（東教大附中）
以上"日本数学教育会誌"所掲による。

4. 研究主旨

中学校の図形教材について色々議論されているが，その論点の一つに論証的取扱いをいかにするかということが挙げられている。この点について中学校の数学における図形教材を指導する意義から考えれば，徒らに論証にとらわれるのは不可としなければならないが，論理的な訓練をする必要からも，又整然とした論理がその重要な意味をもつ数学の特性を理解させる上からも，少くとも教材面で現在以上の論証を取上げる必要を感ずる。しかし実際指導に当っては，実施の困難もあり，その方法に異論もあるので，本校においては中学校の図形教材に体系化（配列）を試み，指導面においてその中に論証的な取扱いを実験的に導入し問題点について何かの材料を捕えようとした。

以下はあくまでも模索であり，結論的なものではないことを断っておく。

5. 公　理　群

図形教材を体系化して論証的取扱いをするためには，公理的に取扱うもの（公理群）が必要である。勿論純論証幾何学におけるような公理だけでは無理であるから証明可能なものも公理としてあげておくことにする。以下に示すのは，中学一年の図形教材に必要と思われるもののみを（A），（B），（C）の三種類に分けて書いてある。

（A）明示せず，暗黙のうちに公理とするもの，

① 二点を通る直線は一つあって，ただ一つに限る。

② 二点間の最短距離はその二点を結ぶ線分である。

③ 相交わる二直線はただ一点で交わる。

④ 図形はその形，大きさを変えることなく移動及び裏がえしができる。

⑤ b＝a，c＝aならばb＝cである。

（B）論証の根拠として一応明示するもの，

① 平行線に一直線が交わるとき，同位角は等しい。またその逆も正しい。

② 一直線は180°である。

③ 一直線外の一点を通って，これに平行な直線は一つあって，ただ一つに限る。

④ 平行線の共通垂線の長さは等しい。

（C）やゝ高度の公理で，本来ならば明示する所であるが，莫然と示すもの，

① 三角形の合同条件（或いは三角形の決定条件）

6. 教材の配列

教材の配列には種々の考慮が必要であるが，

① 中学校における図形教材を基にして，②履習可能と思われる教材をこれに加えて，③基礎図

形から始めて，大体ユークリッド幾何学の配列に従い，その間作図と直観の力を借りて順次高度のものへと進めている。

以下には，章節に分けて配列の実際を示してある。なお各章には授業時数及び各節には指導項目と使用公理を示してある。

配列（目次）

1章　導入（1時間）

2章　基本になる図形（2時間）

§1点，直線，面について（A—①，②，③）

§2平行と垂直について（A—⑤）

3章　いろいろな図形の性質（6時間）

§1平行線の引き方（B—③）

§2平行線の性質（B—①，②，③）

○平行線の距離　○角について　○同位角は等しい。　○平行線に直線が交わるときにできる角について

§3平行四辺形について（A—④）

○平行四辺形とはどんな図形か　○等しい角について　○角を平行にうつす方法

§4垂線の引き方（B—④）

○垂線について　○垂線を引く方法

4章　三角形と多角形　（8時間）

§1三角形について（C—①）

○三角形とはどんな図形か　○三角形の表わし方と呼び方について　○いろいろな三角形　○三角形の内角の和　○外角と内対角　○三角形をかくこと

§2多角形について

○多角形とはどんな図形か　○多角形の表わし方と呼び方について　○対角線の数　○内角の和

§3正多角形について

○正多角形とはどんな図形か　○一角の大きさ　○正五，正六，正八角形のかき方と性質

§4いろいろな四辺形について

○正方形，菱形，長方形，平行四辺形及びその関係について　○四辺形はどんなときにかけるか。

7. 指導の実際における問題点について

〔6〕項における教材配列に従って指導を実施したわけであるが，最初から実験的な試みとして，計画と準備に慎重を缺く所があったために教材配列に多少の無理があり，又指導面においても指導上の不手際や指導力の不足が手伝って初期の目的を十分に達成することができなかったと思っているが，なお次の諸点についてはこれを問題点として可能な限りで留意したつもりである。

次に特に問題とした点を四つの項目に分け実例について具体的に示すことにする。

（1）公理の導入方法について

〔6〕項においてどの節にどのような公理を導入してあるかを括弧の中に示してあるが，どこにどの公理をなんのため導入したのか実際について，二，三の例をあげることにする。

①2章§2において〝平行線の性質〟として〔B〕—①を明示し，〝錯角は等しい〟ことの証明に適用する。

②同じ節において〝角について〟の説明の所に〔B〕—②を導入し，〝対頂角は等しい〟ことを証明している。

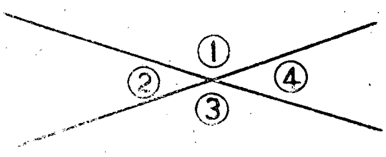
③3章§1において〔B〕—①，②及び既に証明した〝錯角は等しい〟という定理を使って〝三角形の内角の和は180°である。〟を論証する。

（2）論証の導入方法について

論証の方法は公理の導入と関連して考えられるので，前記の公理の導入例について証明の実例を実際指導した通りに書くことにする。

①〝対頂角は等しい〟なぜか。

（対頂角の定義はしてある）



（わけ）

一直線は180°の角であるから

①の角＋②の角＝180°

②の角＋③の角＝180°

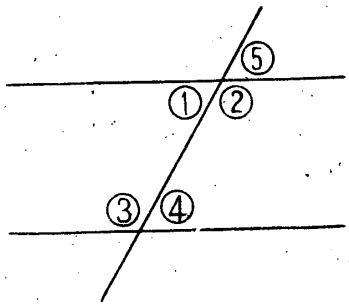
だから　①の角＋②の角＝②の角＋③の角

②の角を両方からとると，残りは等しいから

①の角＝③の角

同じようにして②の角＝④の角

② "錯角は等しい。" なぜか。



（わけ）

①の角＝④の角，②の角＝③の角が分ればよい

①と⑤の角は対頂角だから①の角＝⑤の角

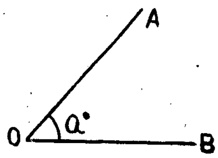
④と⑤の角は同位角だから⑤の角＝④の角

だから　①の角＝⑤の角＝④の角

だから　①の角＝④の角

同じ様にして，②の角＝③の角

なおこの証明においては，角を表わす記号を数字で表わしてあるが，下記のように角に記号をつけて，その表わし方を∠ＡＯＢ又は∠ａとすることを教えておいた。



③ "三角形の内角の和は180°である。" なぜか。

三つの方法によって説明する。即ち(イ)，(ロ)は論証的方法で，(ハ)は実験的方法によっている。

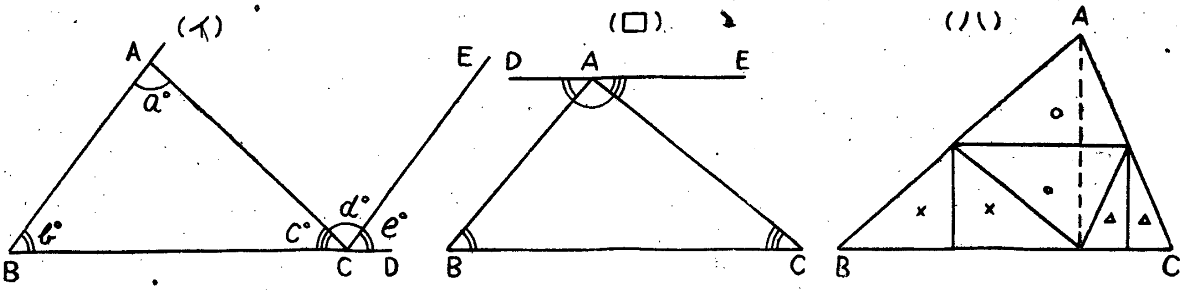
（３）注目すべき点，疑問点

問題にすべき点は多いが，特に気付いたものをあげることにする。

①図形教材に入る前に小学校において既習の図形について知っていることを云わせた所，中学校においてこれから学習すべき図形の殆んど全部を挙げている。勿論それらの図形の理解は必ずしも完全であると云えないだろうが，にも拘らず中学校と小学校における図形教材が些か重複し過ぎているのではないかということを感ずる。このため，後に指導の上で既習教材に関心がうすく悪影響を及ぼすようなことになった。

②基本図形のうち "点" について，"点は二直線が出あった所である" と説明したが，この際 "円錐の頂点は矢張り点ですか" という疑問が起ったので，これを任意の二つの母線の交点として説明した。このことは生徒の図形に対する論理的な態度の一つの現われとして，今後の指導上注目すべき点と考えられる。

③ "垂線や角の二等分線の引き方" を指導する際にその理由を説明するために" 三角形の合同定理" を基礎にする訳であるが，この定理を明示することはできないので，直観的な方法で重ね合せるなど説明は曖昧にならざるを得ない。



(イ)の場合についてだけ証明を示す。

Ｃから直線ＡＢに平行な直線をひくと，

∠ｂと∠ｅとは同位角だから　∠ｂ＝∠ｅ

∠ａと∠ｄとは錯角だから　∠ａ＝∠ｄ

だから　∠ａ＋∠ｂ＝∠ｅ＋∠ｄ

両方に∠ｃを加えると　∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝∠ｅ＋∠ｄ＋∠ｃ

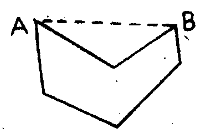
ところが　∠ｅ＋∠ｄ＋∠ｃ＝180°

だから　∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝180°

この証明で角を表わすのに，例えば∠ａを表わすのに，∠ＢＡＣを使うと理解させ難い。

しかし垂線や二等分線は簡単な図形にも必要なことで，中学校の一年で履習する必要があるだろうが，その導入を如何にすべきか問題であろう。

④多角形の対角線について説明した時，左図のような凹多角形を示してＡとＢとを結ぶ線分は対角線になるか否かを問うた際に，対角線を曖昧にしか理解していないので，これが対角線であると答える生徒がなかった。この機会に用語をはっきりさせることがいかに重要であるかを生徒に理解させることができ



た。論理的に追いつめると，中学一年でも可成りの程度まで論理化ができるように思う。

（４）学習困難点

①角を平行に移すこと

Fig I

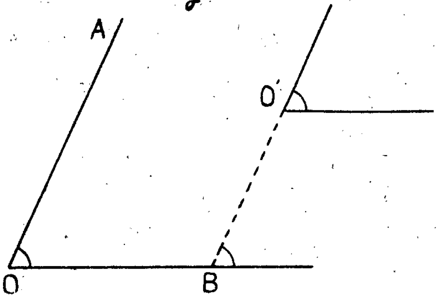
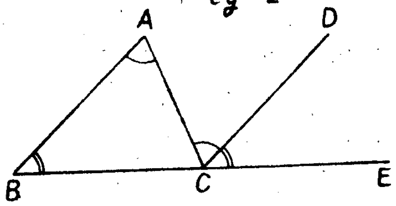


Fig 1において，∠ＡＯＢ を頂点が O′ に来るように平行に移すのに〝同位角が等しい〟ことを利用して説明したが，理解がやゝ困難であったようである。一般に図形を移動することは連続的な思考を要求するので，困難である。

②三角形の外角はその内対角の和に等しいこと

Fig 2



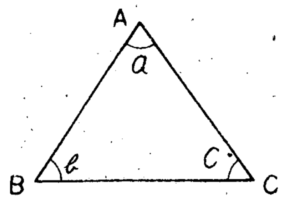
これは Fig 2においてＡＢに平行線を引いて，錯角と同位角の等しいことから説明したが，三角形の内角の和が180°になることは比較的容易に理解できながら，これは理解困難であった。この理由としては，〝内対角〟の意味（定義）の理解が困難であったことが考えられる。内対角の用語は生徒には初めての用語であって，これを直ちに次の問題に導入するため理解が困難であった訳だが，理論を積立ててゆく数学においてはこのような訓練が必要であろう。

③多角形に於ける対角線の数，ｎ辺形において次の公式を説明した。

$$対角線の数=\frac{n\,(n-3)}{2}$$

同じ対角線を２度数える所が，やはりむつかしいようである。即ち感覚的には一本の対角線を論理的には２本と数えるという推理方法は生徒にはやや高度である。一般に少しでも理論的抽象化を伴う教材は理解困難のようである。

④図形を幾何学における記号を使って表わすこと。例えば三角形ＡＢＣを△ＡＢＣとか，角を∠ＡＯＢとか，表わして，これを使って論証すると，理解が困難である。例えば三角形の内角の和について，∠ＡＢＣ＋∠ＢＡＣ＋∠ＢＣＡ＝180°とするより∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＝180°とする方が理解しやすい。これから少くとも一年においては幾何的取扱より代数的取扱を多くする方がいいのではないか。



8. 結　　論

この研究は先に研究主旨において述べておいたように，図形教材を教科書にとらわれず実際に論証的に取扱う際に当面する問題点を把握しようとする実験的な試みであり，問題点の模索であったわけであるから，次にのべるのは結論と云うべきものであるより，むしろ問題点の大体の纒めと云った方がよいだろう。さてこれを次の四項目に纒めてみる。

①図形教材の撰択，配列及び項目は一応教科書をはなれて，〔６〕項において示したような要領で作られた訳であるが，しかし既に採用している教科書の教材内容を全く遊離することができなかったので，（この論証的方法はＡ，Ｂ両組のうちＢ組にのみ実施し，他のＡ組は教科書通りに指導してその比較もしてみたかったので）教材の配列や項目の挙げ方については大分無理な配列もあって修正の余地がある。この配列の如何は図形教材の論証的指導に重大な影響があるので，十分配慮すべきである。

②図形の作図について，図形の性質を先に論証してから，その結果に基づいてその図形の作図を指導すべきか，又は作図を直観的，実験的に行ってから図形の性質を論証する方がいいか。そのいずれが理解し易く親しみ易いか，その指導する教材によって論証より作図の方向と逆に作図より論証の方向は何れを採用するか異なってくるであろ

うが，ともかく問題となる点であろう。勿論原則的には図形の性質を論証してから，それに基づいて作図すべきであるが，必ずしもこの原則に従うことができないようである。しかし従来の教科書における如く，過度の作図より論証の方向は避けるべきであると思う。

③従来，直観的，実験的な指導に馴れ親しんで来た生徒には，図形を論証的に取扱うことに初めのうちは可成りの抵抗があったことは事実であるが，論証を必要とする問題に突当る毎にその都度生徒の理解が非常に曖昧でそのために既知と思っていた図形がいかに未知の事柄に満ちているかを知らせ，進んでそれを知りたい意慾をそそることができ，生徒をして論証がいかに重要であるかを理解させることができると思う。

④論証については③において言及した如くその必要性を生徒自身に納得させることができるわけであるが，更にこれを進めてこの研究の一つの目的であった〝どの程度までそれを導入できるか〟という問題に対しては相当程度に導入可能であるという結果が得られたように思う。又このように論証的に教材を扱うことが数学を学ぶ態度にプラスになる面が多いように思う。これに反して直観的，実験的な方法のみ重視する傾向は，ある意味では学習態度を安易なものにし，マイナスになる点が多いのではないかと思う。勿論旧制中学における形態まで抽象化することは避けねばならないと思う。

9. テスト

○実施対象……中学一年B組（男子26名，女子26名）

○実 施 日……6月25日

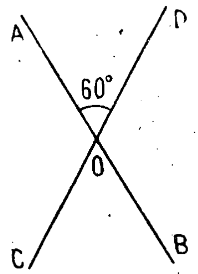
○実施範囲……2章いろいろな図形の性質まで

○問　　題

(1)　二つの直線AB，CDが図にかいたように点0で交わり，∠AOD＝60° であるとき，次の問に答えなさい。

①対頂角はどれか。角を表わす記号をつかってあらわしなさい。

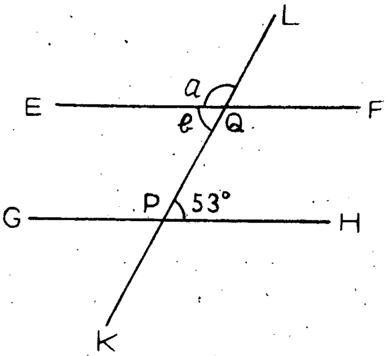
②∠AOD以外の角の大きさを求めなさい。



③鋭角，鈍角はどれか。おのおの一つずつかきなさい。

(2)　下の図で直線EFとGHが平行であるとき，問に答えなさい。

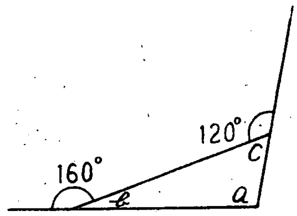
①∠EQPと∠QPHとはなに角というか



②∠LQEと∠QPGとはなに角というか

③∠a，∠bはなん度になるか

(3)　下の図にかいてある三角形ABCの内角∠a，∠b，∠cを求めなさい



○結果……i) 平均 全体 26.0点 （40点満点）
ii) (1)全般に不良，(2)①②不良，③良
(3)良

○診断……中間テストであるから，勿論決定的なものではないが，テストに表われた結果からみると，次のように云われる。

①角の表現ができていなかったが，これは幾何記号を使用するのは或る程度に留める必要があることを意味するであろう。

②用語の意味が十分に理解できていなかったようである。これは定義に対する留意程度が低いことを意味するであろう。

③総じて幾何学的な表現を用いる問題は不良であるといえる。今後この点を考慮すべきだろう。