別紙４

報告番号	※　　　　　第　　　　　号

主　論　文　の　要　旨

論 文 題 目　Semibricks and Koenig–Yang correspondences in τ-tilting theory
（τ 傾理論における半煉瓦と Koenig–Yang 対応）

氏　　　名　淺井　聡太

論　文　内　容　の　要　旨

体 K 上の有限次元多元環 A の表現論とは、有限次元加群圏 $\mathsf{mod}\,A$ を調べる分野であり、その中で、射影加群と単純加群は、基本的かつ重要な研究対象である。A は射影生成加群の典型例である。また、単純加群全体の集合は、加群圏 $\mathsf{mod}\,A$ の最小生成系といえる。これらは長きにわたり、様々な形で一般化が行われ研究されてきた。その中でも顕著な先行研究である Koenig–Yang 対応と Adachi–Iyama–Reiten による τ 傾理論から、導来圏や加群圏における様々な概念の間に、一対一対応が存在することがわかり、特に次の集合の間には全単射が存在する。

- 完全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ の基本的 2 項準傾複体の同型類全体の集合 $\mathsf{2\text{-}silt}\,A$
（射影生成加群の完全導来圏での一般化）
- 有界導来圏 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\,A)$ の 2 項単純系の同型類全体の集合 $\mathsf{2\text{-}smc}\,A$
（単純加群全体の有界導来圏での一般化）
- 加群圏 $\mathsf{mod}\,A$ の基本的台 τ 傾加群の同型類全体の集合 $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,A$
（射影生成加群の加群圏での一般化）

これらは、Ingalls–Thomas, Marks–Šťovíček などの研究により、近年さらなる発展を遂げている。しかしこの中には、加群圏において単純加群を一般化した概念が含まれていない。この穴を埋めるため、単純加群の集合を一般化した、半煉瓦という概念をこの論文では導入する。

以下、簡単に半煉瓦の定義や性質を述べる。煉瓦 S とは、自己準同型環 $\mathsf{End}_A(S)$ が斜体となるような加群のことであり、また煉瓦の同型類の集合 $\mathcal{S}$ で、任意の異なる元 $S, S' \in \mathcal{S}$ に対し、$\mathsf{Hom}_A(S, S') = 0$ を満たすもののことを、半煉瓦と呼ぶ。例えば単純加群をいくつか集めた集合は、半煉瓦である。一般に半煉瓦 $\mathcal{S}$ が加群の拡大で生成する $\mathsf{mod}\,A$ の部分圏は $\mathsf{Filt}\,\mathcal{S}$ と書かれる。Ringel の結果から、$\mathsf{Filt}\,\mathcal{S}$ は部分アーベル圏となり、$\mathcal{S}$ は $\mathsf{Filt}\,\mathcal{S}$ の単純対象の同型類全体に他ならない。

一般には、台 τ 傾加群などに比べ半煉瓦は非常に多く存在するため、この論文では半煉瓦に対して、左有限性と呼ばれる、ねじれ類が定める条件を導入する。具体的には半煉瓦 $\mathcal{S}$ について、それを含む最小のねじれ類 $\mathsf{T}(\mathcal{S})$ が関手的有限であるとき、$\mathcal{S}$ を左有限であると定める。左有限な半煉瓦全体の集合を $\mathsf{f_L\text{-}sbrick}\,A$ と記す。

この論文は全 2 部からなり、それぞれ以下のような内容となっている。

第 1 部の目的は、左有限な半煉瓦全体の集合 $\mathsf{f_L\text{-}sbrick}\,A$ を用いて Koenig–Yang 対応を統合す

ることである。このために標準的な全単射 $s\tau\text{-tilt}\,A \to \text{f}_{\text{L}}\text{-sbrick}\,A$ および $\text{2-smc}\,A \to \text{f}_{\text{L}}\text{-sbrick}\,A$ を構成する。全単射 $s\tau\text{-tilt}\,A \to \text{f}_{\text{L}}\text{-sbrick}\,A$ は加群圏において射影生成加群と単純加群全体を一般化した集合同士を結ぶ全単射であり、一方 $\text{2-smc}\,A \to \text{f}_{\text{L}}\text{-sbrick}\,A$ は単純加群全体を導来圏と加群圏において一般化した概念の間の全単射である。これらの全単射により、下の図のように Koenig–Yang 対応が拡張・整備される。また、全単射 $s\tau\text{-tilt}\,A \to \text{f}_{\text{L}}\text{-sbrick}\,A$ を用いて、左有限な各半煉瓦の元の個数が、単純 A 加群の同型類の個数を上回らないことも示される。

$$\begin{tikzcd} & \text{射影生成加群の一般化} & \text{単純加群全体の一般化} \\ \text{導来圏} & \text{2-silt}\,A \arrow[r, "{[\text{KY, BY}]}"] \arrow[d, "{[\text{AIR}]}"'] & \text{2-smc}\,A \arrow[d, "\textbf{当論文}"'] \\ \text{加群圏} & s\tau\text{-tilt}\,A \arrow[r, "\textbf{当論文}"] & \text{f}_{\text{L}}\text{-sbrick}\,A \end{tikzcd}$$

なお、A が τ 傾有限、つまり $s\tau\text{-tilt}\,A$ が有限集合であれば、すべてのねじれ類が関手的有限であることが Demonet–Iyama–Jasso により示されている。この場合、$\text{mod}\,A$ のすべての半煉瓦は左有限であり、特に有限集合である。したがって A が τ 傾有限であれば、半煉瓦全体の集合 $\text{sbrick}\,A$ から、自己準同型環が斜体の積であるような加群の集合への全単射が、$\mathcal{S} \mapsto \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S$ で与えられる。

第 2 部では、第 1 部で得た一般論をもとに、Dynkin 図形 $\Delta = \mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$ 型の前射影的多元環 Π 上の煉瓦や半煉瓦を研究する。前射影的多元環と Δ 型の Coxeter 群 W の関係はよく調べられており、第 1 部と Mizuno の結果を合わせることで、Π が τ 傾有限であることや全単射 $S(?) \colon W \to \text{sbrick}\,\Pi$ の存在が得られる。第 2 部の目的は各 $w \in W$ に対する半煉瓦 $S(w)$ を、具体的に書き表すことである。

Coxeter 群 W は右弱順序と呼ばれる半順序により束である。束論の観点から、W の結び既約な元全体の集合 $\text{j-irr}\,W$ や、与えられた元 $w \in W$ の標準結び表現 $w = \bigvee_{i=1}^{m} w_i$ $(w_i \in \text{j-irr}\,W)$ を考えることは、重要であるが、これらは Π の表現論とも深く関連する。まず $\text{brick}\,\Pi$ を $\text{mod}\,\Pi$ の煉瓦全体の集合とすると、全単射 $S(?) \colon W \to \text{sbrick}\,\Pi$ は全単射 $\text{j-irr}\,W \to \text{brick}\,\Pi$ に制限されることがわかる。さらに当論文では、与えられた元 $w \in W$ に対し、直既約分解 $S(w) = \bigoplus_{i=1}^{m} S(w_i)$ が成立するような $w_1, w_2, \dots, w_m \in \text{j-irr}\,W$ とは、束 W における元 w の標準結び表現に他ならないことを示す。

上の準備を踏まえ、当論文では、各 $w \in \text{j-irr}\,W$ に対する煉瓦 $S(w)$ を、w の符号付き置換としての表示から、具体的に書き表す方法を構成する。さらに一般の元 $w \in W$ に対し、Reading による有限 Coxeter 群の標準結び表現の特徴付けを利用して、w の標準結び表現を特定することで、半煉瓦 $S(w)$ の具体形を明らかにする。これらが第 2 部の主結果である。