

論文審査の結果の要旨および担当者

報告番号	※	第	号
------	---	---	---

氏 名 浅井 聡太

論 文 題 目

Semibricks and Koenig–Yang correspondences in τ -tilting theory
(τ 傾理論における半煉瓦と Koenig–Yang 対応)

論文審査担当者

主 査 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 理学博士
岡 田 聡 一

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 教授 博士 (理学)
伊 山 修

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (理学)
栗 田 英 資

委 員 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 准教授 博士 (数理科学)
伊 藤 由 佳 理

論文審査の結果の要旨

環上の加群の重要なクラスとして射影加群と単純加群があるが、これらの関係を調べることは常に重要な課題であり、本論文もその延長線上に位置している。

森田理論は射影生成加群から加群圏全体を回復するものである。一方で、森田同値よりもはるかに緩い導来圏同値を扱うためには森田理論を拡張した傾理論が必要となり、傾理論における主要な対象は射影生成加群の拡張である傾加群と傾複体である。近年の変異理論の発展により、傾加群と傾複体をさらに拡張した台 τ 傾加群 (support τ -tilting module) と準傾複体 (silting complex) の重要性が明らかになってきた。また、これらの 2 通りの拡張について、台 τ 傾加群と 2 項準傾複体のそれぞれの同型類の間に 1 対 1 対応が存在することも知られている。(以下では同型類の間の 1 対 1 対応を単に 1 対 1 対応と書く。) さらに、体上の有限次元多元環の導来圏では、準傾複体、単純系 (simple-minded collection)、代数的 t 構造、有界余 t 構造の間に自然な 1 対 1 対応 (総称して Koenig–Yang 対応と呼ぶ) が存在する。

単純加群は加群圏の最小単位であり、単純加群の直和に分解できるものが半単純加群である。一方、自己準同型が 0 または同型に限るような加群を煉瓦 (brick) と呼び、煉瓦からなる集合で、異なる煉瓦の間の準同型が 0 に限るものを半煉瓦 (semibrick) と呼ぶ。Schur の補題により (半) 単純加群は (半) 煉瓦である。また、有限次元多元環の半煉瓦は、加群圏の広大部分圏 (wide subcategory) と 1 対 1 に対応することが知られている (Ringel)。半煉瓦は古典的な概念であるが、体系的な研究は多くはない。

この論文は、一般的な枠組みで半煉瓦と Koenig–Yang 対応の関係を扱った Part 1 と、Dynkin 籠から定まる前射影多元環上の半煉瓦を具体的に扱った Part 2 の、2 部から構成されている。

Part 1 では、体上の有限次元多元環の半煉瓦に対して左有限という条件を導入し、左有限半煉瓦の基礎理論を構築している。主要な結果の 1 つは、台 τ 傾加群と左有限半煉瓦の間の標準的な 1 対 1 対応の構成である。これは古典的な射影加群と単純加群の対応をはるかに拡張するものであり、重要な発見である。一般に半煉瓦を構成する煉瓦の同型類の個数は有限になるとは限らないが、この結果の応用として、左有限半煉瓦を構成する煉瓦の同型類の個数が単純加群の同型類の個数以下であることがわかる。さらに、Part 1 では、この 1 対 1 対応を応用して、多くの興味深い結果を導いている。特に、左有限半煉瓦と 2 項単純系、左有限半煉瓦の双対概念である右有限半煉瓦の間に自然な 1 対 1 対応を構成している。これらの諸結果は、Koenig–Yang 対応に全く新しい結果と手法を提供するものである。

Part 2 では、籠の表現論において重要な Dynkin 籠に付随した前射影多元環の場合に、半煉瓦を詳細に解析している。一般の場合には、Part 1 の結果と水野による前射影多元環の台 τ 傾加群の分類を用いて、前射影多元環の半煉瓦がすべて左有限であり、Coxeter 群 W の元と 1 対 1 に対応すること、および、煉瓦が W の (右弱順序から定まる束構造に関する) 結び既約元と 1 対 1 に対応することを導いている。また、半煉瓦の煉瓦への分解が Coxeter 群の元の標準的結び表現に対応することも示している。さらに、 Δ が A 型、 D 型である場合には、 W の元の (符号付き) 置換としての表示を用いて、 W の元の標準的結び表現を与え、結び既約元に対応する煉瓦を籠の表現として具体的に記述することにより、半煉瓦の構造を完全に決定している。

以上のように、本論文は当該分野において新しい知見を与えるものであり、学位論文として十分な内容を備えている。各部の内容はそれぞれ独立した論文として arXiv で公開されており、Part 1 の内容は副論文として International Mathematics Research Notices 誌から (online で) 出版されている。9 月 3 日に本論文に関する公開学位審査セミナーを行い、明快な講演と的確な質疑応答を通じて、申請者が博士の学位を取得するに足る高い学識を有することを確認した。

以上により、学位審査委員会は、申請者には博士 (数理学) の学位が授与される資格があるものと判断する。