図形教材における論証の導入と指導について

兵藤祚夫・岩倉　一・新海　寛

I 研究目的

今回の指導要領改訂に当り，特に注目され，論議の中心となったものに，図形教材において図形の学習方法として，論証を用いることが明示されている点である。この改訂された指導要領の全面的な実施までにはいまだ時日があるけれども，このためには何らかの移行方法をとっておいて，論証指導の完全実施への地ならしをしておかねばならないだろう。

そこで，改訂指導要領に提示されたものに即して研究の方向を確認するのが適当と思う。

改訂指導要領の2学年の部には，図形の論証について次のように述べられている。

1　内容　E図形(3)

「図形についての研究方法として，論証を用いる意義や方法の理解を図り，論理的に筋道を立てて考えることができるようにする。」

2　指導上の留意点(3)

「E(3)の図形についての論証とは，それ以前に学んだ図形の基本的な性質を根拠にして，種々の性質を演えき的な推論によって導くことを意味する。」

以上に述べられている事項は，論証指導の在り方と目的，論証の意味であり，これが今回あたえられた論証指導の骨子であろう。

しかし，この骨子にいかに肉づけしていくかという点に問題があり，関心もまたここにある。ここで，改訂指導要領に示されている辞句の受け取り方いかんによって，2つの異なる立場が考えられる。すなわち一方は従来のユークリッド幾何学に原型を求めようとする立場であり，他はユークリッド幾何学を意識的に回避する立場である。前者におけるユークリッド幾何学を原型とする体系美の認識，論証の厳密ということはおろそかにできないだろうし，また，後者における新しい時代に即応した教育的な論証指導への意欲と努力は望ましいものである。かくみれば，いずれの立場にも一理あるが，共に一方にこだわって跛行的なものになるのを極力用心しなければならないと思う。

そこで，改訂指導要領に提示されている指導の目的をみると「論理的に筋道を立てて考えることができるようにする」というように述べてあり，これこそ中学校における論証指導の要諦であろうと思う。

この見地から論証の導入と指導に当っては，論理的に筋道を立てて考える習慣と能力を養うにはどうすればよいかというように問題を設定し，その具体的な研究問題として，次の2つをあげることにする。

① 論証の導入はどうすればよいか。

② 導入後の論証指導はどうすればよいか。

これは論証指導上の根本問題であるが，甚だ漠然としたもので，何処に研究の端緒を見出すか困難な問題である。しかし，現段階としては，このような型で問題を提起し，これを次項に示すような方法で研究するのが，当面の目的となる。なお，より系統的な問題の研究は今後に残し，今回は将来の足場を固めてみたいと思っている。

II 研究方法

この研究は，かねて図形教材の論証指導について実践的に研究していることの継続であって，現在も進行中である。今回は，研究目的の項で既述のような目的に従って，次のような方法で実際に図形教材の指導を通して実施してみたいと思う。

① 導入時における問題点を摘出し，その指導を種々の仕方で試みる。

② 論証指導における問題点を摘出し，その指導を種々の仕方で試みる。

以上のように，実際指導の途中で問題点を見つけ出し，その指導法を研究し，それを試みるという仕方で進めたい。

III 研究経過の概要

1. 指導の要点（ねらい）

研究方法の大要は決まったのであるが，この実施に当って，多角的に種々の問題点を指摘し，その指導法を工夫する仕方で実施すると，一つのまとまりある結果が得られないかも知れないという疑念があった。そ

こで従来の研究結果を参考にし，その上に積み重ねていくほうがより効果的ではないかと考え，指導に先立って従前の研究成果を基にして指導の要点を作り，これを中心に論証の導入を実施することにした。

さて，２つの研究方法に対応して次のように指導の要点を作った。

（１）論証導入における要点

導入時においては，次のような教材を指導する。

○基本図形……点，線，面の説明とこれらの位置関係

○かんたんな図形……角，対頂角とその性質

以上の教材の指導に際しては，次のような点を指導の中心として強調する。

① 推論の基礎を確立しなければならないこと，その基礎は何人も認めざるを得ないことを理解するように導く。しかし，公理や定理は暗示する程度にして明示しないようにする。もちろん，公理，定理の用語は使用しない。

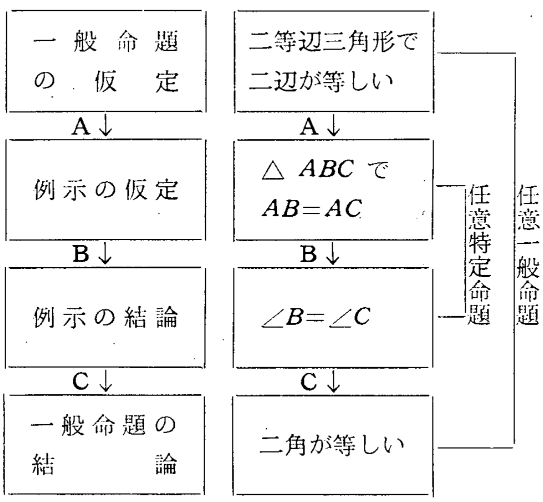
② 用語の使用とその統一が必要であることを理解するように導く。この際に，定義というように明示しない。

③ 何人も納得をするように説明できることは大切であること，またそのように説明することは必要であり，その方法はどうすればよいかを考えさせて，論証（証明）の導入を試みるようにする。この際，従来の「説明」から新しい「証明」に自然に移行するように指導する。

（２）論証の指導における要点

今夏，日数教の全国大会で発表した拙論「中学校の図形教材における論証の取扱について」において論証の構造図として次のようなものを示し，問題点を指摘した。（広島大学・小林一栄氏に負う）

（例）



ここで，次のような問題点がある。

① A，Cの過程において，任意特定命題と任意一般命題をいかに関連させるか。

② Bの過程において，推論過程にふくまれる選択原理の複雑性をどのように処理するか。

そこで，①，②の問題点について，これを指導する要点を次のように作った。

①の指導の要点

イ．命題は「AならばBである」の形に導く。この際，Aは仮定，Bは結論であることを明示する。

ロ．仮定と結論を文字や記号を使って表わすように導く。この際，将来必要と思われるような記号やその使い方を説明する。

②の指導の要点

イ．仮定と結論の識別をはっきりするように導く。かつ，仮定→証明→結論の一連の関係を理解させるようにする。

ロ．できるだけ文章を節約し，記号，文字，式で表わし，推論過程をはっきりするように導く。

ハ．証明では仮定から導き出されるいろいろな性質をあげ，結論が成り立つためにどれが必要な性質であるか発見するようにさせる。

2. 指導の条件

前記の指導の要点に従って，次の条件の下に指導を実施した。

○対象……中学２年A，B組（各組50名）

完全抽選により入学した生徒であって，各クラスは普通学級とみなしてよい。

○教材……平面図形の性質

教科書として，啓林館「改訂中学生の数学２」の“単元Ⅵ図形の性質の調べ方”を一応使用したが，適宜補足または削除するようにした。

○期間……９月上旬より12月中旬まで

○備考……教材については，その性質は計量や推察によってほとんど既知のものである。なおこの学年には，一年生のとき論証指導は全然行っていない。

3. 指導の実施

（１）指導内容

A　図形の基本（論証の導入）

a　基本図形……点，線，面，二直線の位置関係（論証の準備）

b　かんたんな図形……対頂角とその性質（推論の基礎，用語，証明の導入）

B　平面図形の性質（論証→証明の指導）

a　角の相等
b　三角形の合同
c　平行線の性質　｝教科書に準拠して指導する。
d　三角形の相似
e　円の性質

（2）指導経過

指導内容に示した順に，論理的に筋道を立てて考える習慣と能力を養うということに重点を置いて，できるだけ設問形式で実施してみた。以下はその具体的な経過内容である。

A　図形の基本

a　基本図形……点，線，面，二直線の位置関係

① 図形とは何か――教室にあるもの，例えばチョーク箱，机，花びん等をとりあげて図形かどうか質問する。これに対する生徒の答から，図形はこんなものらしいというところに誘導する。

② 図形の特長は何か――この設問から図形は点，線，面およびこれらの組合せからできていることを理解させる。このようにして図形の定義の伏線にする。

③ 点，線，面とは？――　一学年で既習した事項を暗示しながらいくつかの答を導き出してこれらの定義を下のように与え，最後に図形の定義をする。

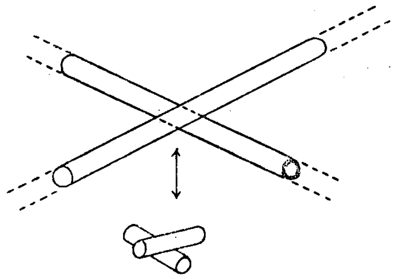
点→位置だけあって大きさがない。

線→点が動いてできたもので，長さがあって太さがない。

面→線が動いてできたもので，広さがあって厚みがない。

図形→点，線，面およびこれらが組合わさってできているもの。

（注1）図形は感覚的なものでなく，考えられたものであることを理解させるのは至難であるが，下図のように直線についてモデル化して説明を試みてみた。直線に太さがあれば，直線が交わるとき，一つの点で交わらないではないかと矛盾を指摘する。



（注2）次の公理，定理を暗示する。

○二点を通る直線は一本だけある。

○直線は一点で交わる。

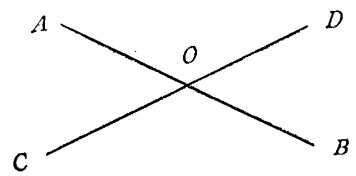
④ 二直線の位置関係はどうか――生徒は「交わる」，「平行」の2つの場合をあげた。更に「ねじれの位置」を示して，これは前二者のいずれでもないことを知らせる。次にこの三つの関係位置を説明させてみたが，生徒の知識は極めて曖昧で，表現が拙劣であった。これを次のようにまとめてみせる。

○同一平面上で｛一点のみ共有→交わる／点を共有しない→平行

○同一平面上になく交わりもしない→ねじれの位置

b　かんたんな図形……対頂角とその性質

① 二直線が交わってできる角にはどんな性質があるか。

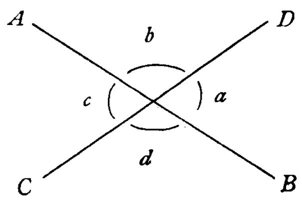


(イ) まず4つの角の大きさを測ってみて，向いあった角が等しいことを答えさせる。

(ロ) 二直線が交わるとき，一般的に(イ)の事柄が成り立つことを帰納的に導かせ，これを文章にいい表わすにはどうすればよいか生徒に答えさせてみる。この結果，正確に表現することの難しさを知らせて適確に表現する方法を考えさせ，ここで対頂角の用語を導入し，“二直線が交わってできる二組の対頂角はそれぞれ等しい”というようにまとめ上げる。このようにして，定義と命題を表現することが導入される。しかし，これらの用語は明示しない。

② 「対頂角は等しい」この理由を説明しなさい。――特殊な場合についての説明は一般性をもっていないので，一般性をもっている説明を考えさせる。

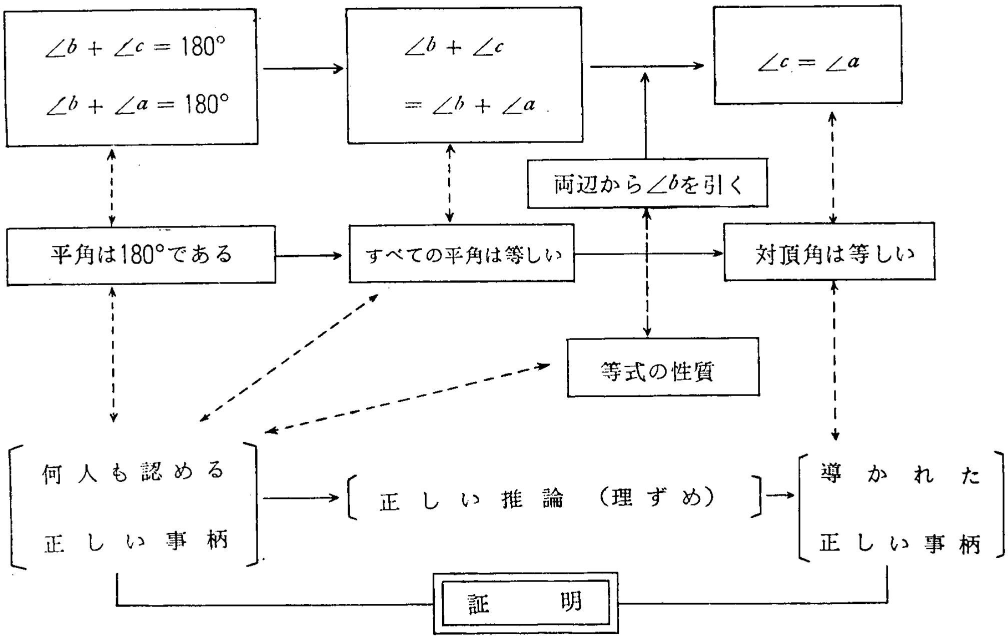
“下の図で，$\angle a=\angle c$ を説明しなさい”



これに対する生徒の答案を次にそのまま書いてみる。

（答）$\angle b$ と $\angle c$ を加えると180°になる（$\angle b+\angle c=180°$）。$\angle b$ と $\angle a$ を加えると180°になる（$\angle b+\angle a=180°$）。両辺に$\angle b$があるから$\angle b$ をとると（$\angle c=180°-\angle b$，※ ※ $\angle a=180°-\angle b$），残りの角が等しくなる（$\angle a=\angle c$）。

以上の解答で（　）内は指導のため後から生徒に示したものである。次にこの生徒の解答をもとにして下のように図解してみた。⁂



⁂ ここで，証明の初歩的な形を与えてみる。

即ち上記図解について，次のような説明をしてみた。

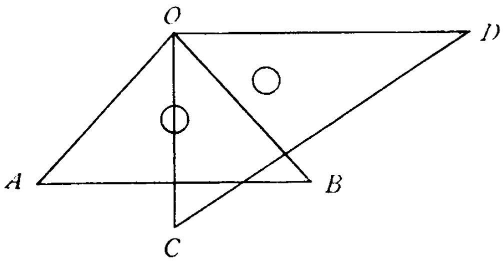
「ある事柄（二直線が交わる）から，何人も認める事柄や既に明らかになっている事柄（平角は180°であって，すべての平角は等しい。等式では両辺から等しいものを引いても等式が成り立つ。）を適宜に使って正しい推論によって他の事柄（対頂角は等しい）を導き出すことを証明という。」

（註）証明の内容を理解させることは大変である。その理由は，次の疑問によるように思う。「従来の説明とどこが違っているのだろうか。問題の解決をかえってむつかしく考えているのではないか。」これらの疑問は指導の不備にもよるであろうが，この疑問は更に進んで論証（証明）の指導をすることによって，相当理解するのではないかと思ったのでそのまま指導を続けてゆくことにした。

B　平面図形の性質

a　角の相等……証明の指導

（問題１）次のような三角定木の直角の頂点を重ねておくと２つの角AOCとBODは等しくなることを証明しなさい。



この問題を，以下のように指導をした。

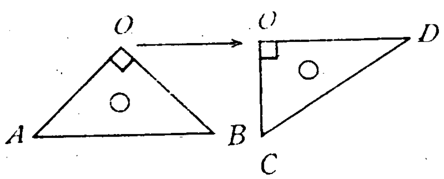
① 問題の意味をできるだけ記号と式を使って書きなさい。――この問に対して生徒の解答を２つ取り上げた。

○生徒A：

○∟(AOB)（CODとAOBを重ねる）

→$\angle AOC=\angle BOD$？

○生徒B：



――→$\angle AOC=\angle BOD$？

以上の解答を次のようにまとめてみる。

$\angle AOB=\angle R, \angle COD=\angle R \rightarrow \angle AOC=\angle BOD$

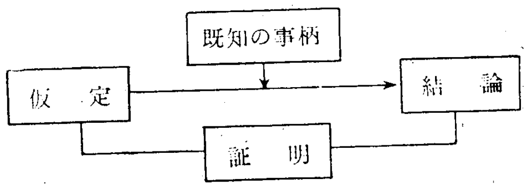
② ①の結果から，問題は「A ならば B である」という形をしている。これをこの問題について更に詳しくしらべると，

$$\left.\begin{array}{l}\angle AOB=\angle R\\ \angle COD=\angle R\end{array}\right\}-\quad \angle AOC=\angle BOD$$

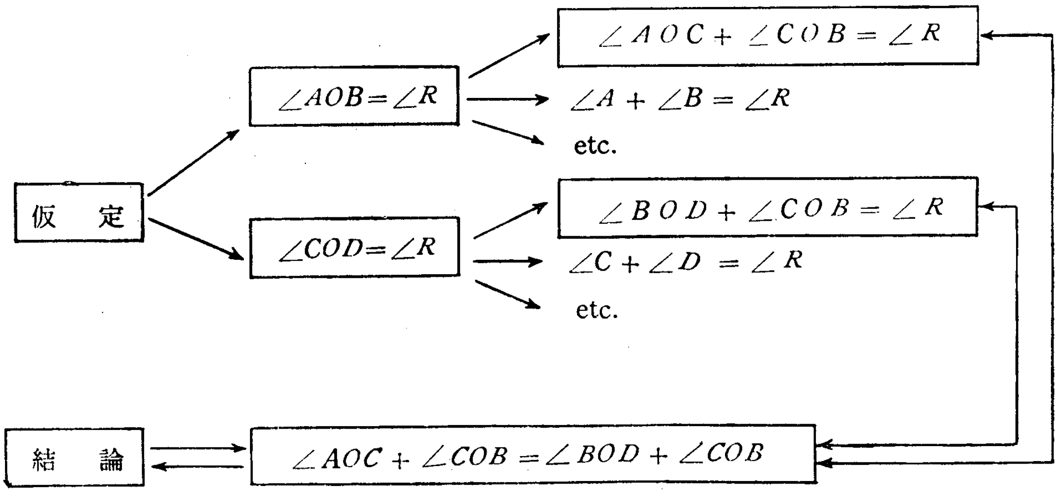
A〔仮定されたこと〕→B〔導き出された結論〕

ここで，A を仮定，B を結論とよぶようにする。更に仮定と結論の用語を使って今一度証明の意味を説明する。これを図解すると*

*



③ ②で証明の位置づけがはっきりしてきたので，引続いて証明の指導を試みる。その方法として種々考えられるが，仮定と結論を両方から結びつける仕方を指導してみる。（解析的）⊗



⊗図解の中で，$\boxed{}$ の枠で囲まれた式を仮定から結論への矢印の順に書けば，それが証明であることを示す。

④ 最後に，②，③で説明したことを一つにまとめて，次のように答案を作ってみる。

〔仮定〕 $\angle AOB=\angle R$,　$\angle COD=\angle R$

〔結論〕 $\angle AOC=\angle BOD$

〔証明〕 $\angle AOB=\angle R$ から

$\angle AOC+\angle BOC=\angle R$

$\angle COD=\angle R$から $\angle BOD+\angle BOC=\angle R$

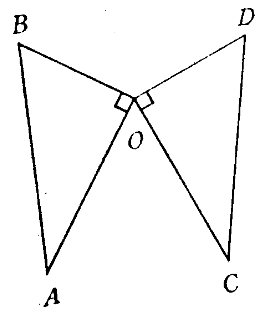
故に $\angle AOC+\angle BOC=\angle BOD+\angle BOC$

両辺から$\angle BOC$を引くと

$\angle AOC=\angle BOD$

（註）命題を仮定→結論の形に書いて証明させるような指導を強制したのではなく，この目的は証明の指導上，仮定と結論の区別を明瞭にすることが必要であるという見地から実施したものである。従って，この後の指導では命題を「AならばBである」の形で把握するようにさせたが，強いて仮定，結論という用語を使わないようにした。

（問題２）右のように２つの直角三角形の直角の頂点を重ねておくと，２つの角 BOCとAOD は等しくなる。



① 問題の意味をできるだけ記号と式を使って表わしなさい。――この際，予め $\boxed{}\to\boxed{}$ と書いて仮定と結論をこの枠の中に記入するようにしてやった。３，４人の生徒に書かしてみたが，大体できるようである。しかし，このような枠を作って，問題の意味を分析する仕方は全部の生徒にとって容易であるというわけにはいかないようである。

② 次に，これに対する２人の生徒（上位成績）の解答をそのままあげてみる。

（生徒１）$\angle AOB=\angle COD$

$\angle AOB+\angle AOC=\angle COD+\angle AOD$

$\therefore\angle BOC=\angle AOD$

（生徒２）$\angle AOB=\angle COD$,

$\angle BOC=\angle AOD$

$\angle BOC - \angle AOC = \angle AOB$

$\angle AOD - \angle AOC = \angle COD$

生徒1は証明の要領を大体理解したようであるが，生徒2は推論過程に理解不十分な点がある。しかし両人ともに数式を使いこなしているので将来が楽しめると思った。

以上のようにして，論証の導入と証明の指導を一応完了したことになるのであるが，生徒にとっては多くの疑念が残っておりこれだけでは勿論十分ではないので，引続いて，次の教材を通じて論証指導を行った。

b　三角形の合同（合同を応用した証明問題）

c　平行線の性質（平行線を応用した証明問題）

d　三角形の相似（相似を応用した証明問題）

e　円の性質（円の性質を応用した証明問題）

この実際については，指導教材は異なるが指導方法が重複するので記述を省略する。

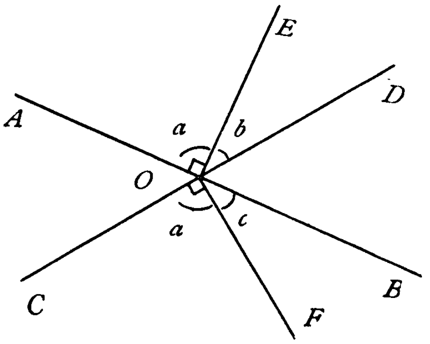
4. テ　ス　ト

（1）第1回テスト

「B平面図形　b三角形の合同」まで終った時に，題意を仮定と結論の形に分析できるかどうか，また証明をどの程度まで理解することができたかどうかを診断するためにテストを実施した。

① 問題……時間は50分で，各問には仮定，結論，証明を記入する欄を設けてある。

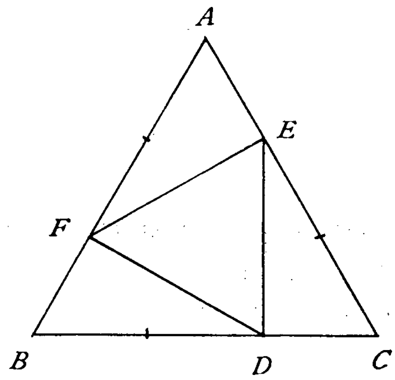
(1)　下の図で，AB, CDが一点 O で交わり，$\angle a$ が直角であるとすると，$\angle b$ と $\angle c$ は等しくなる。これを証明せよ。



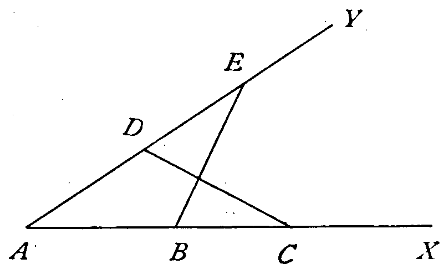
(2)　正方形 $ABCD$ の一辺 CD の中点 M と A, B を結ぶと，$\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ となる。これを証明せよ。また，右の点線のわくの中に問題の図形をかけ。（右に点線で枠をとった空欄を設けてある）

(3)　二等辺三角形 ABC の底角$\angle B$, $\angle C$ の二等分線と対辺との交点をそれぞれ D, Eとすると，$BD = CE$ である。これを証明せよ。また，右の点線のわくの中に問題の図形をかけ。(前問同様)

(4)　下の図で，正三角形 ABC の各辺の上に，$BD = CE = AF$ となるような点 D, E, F をとって三角形 DEF を作ると，三角形 DEF は正三角形になることを証明せよ。



(5)　「$\angle XAY$ の辺 AX 上に二点 B, C を，また AY 上に二点 D, E をとり，$AB = AD$, $AC = AE$ とすると，$BE = CD$ である。」この問題の仮定と結論をかけ。



② 成績の評価と診断

論証指導前（一学期）の成績を基準にして生徒を上，中，下の3階級に分け，各階級を比較対称してみると，次のような結果が得られた。

イ．仮定について……中，下の階級では不出来であるが，上位階級は良好である。しかし，全般的に記号や式の利用の仕方が不十分である。

ロ．結論について……全体を通じて良好であったが下位の階級では，これも不明瞭なものが少なくなかった。

ハ．証明について……下位階級は殆んど証明を理解していない。中位階級は平均して6割程できていたが，推論過程の混乱と記号使用の不正確が目立っていた。上位階級の8割位は推論過程は大体良好であったが，他の2割位の者に推論の混乱，記号使用の不正確が見受けられた。

ニ．問題（１）について，生徒の解答例を上，下位階級からそれぞれ一例ずつあげてみる。（両極端の例）

○上位階級の例……完全といってよい。

（仮定）AB，CD が O で交わり，$\angle a=90°$

（結論）$\angle b=\angle c$

（証明）対頂角により$\angle AOD=\angle BOC$……①

$\angle AOD-\angle AOE=\angle DOE$……②

$\angle BOC-\angle COF=\angle BCF$……③

①，②，③から

$\angle DOE=\angle BCF$

$\therefore \angle b=\angle c$

○下位階級の例……全然理解していない

（仮定）$CD=ab$

（結論）書いていない

（証明）$\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle B$，$\angle AB=\angle CD$

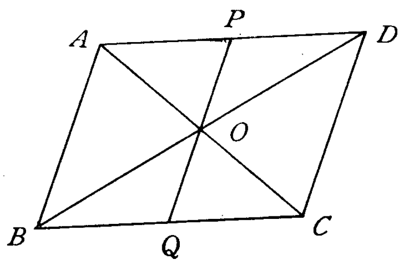
（２）第２回テスト

「B 平面図形　e 円の性質」まで終って，２学期末テストとして実施する。今回は推論過程に重点を置き，空らんをうめる形の問題にした。

① 問題

次の各問題に示してある証明の $\boxed{\quad}$ に適当な記号や文字を入れなさい。

(1) 平行四辺形の対角線の交点 O を通る直線が相対する辺と交わる点をそれぞれ P，Q とすると，$PO=OQ$ である。これを証明しなさい。



（証明）$\triangle AOP$ と $\triangle COQ$ で，平行四辺形の対角線は互に他を２等分するから

$\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$……①

また，対頂角は等しいから

$\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$……②

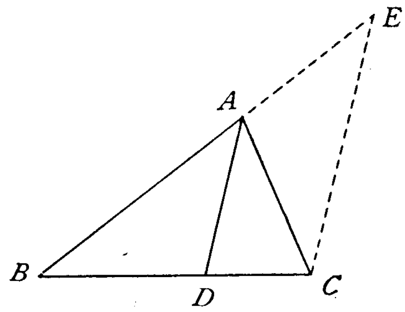
次に $AB \parallel BC$ であるから

$\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$……③

①，②，③より $\boxed{\quad\quad}\equiv\boxed{\quad\quad}$

$\therefore\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$

(2) $\triangle ABC$ で$\angle BAC$ の２等分線が辺 BC と交わる点を D とすると，$AB:AC=BD:DC$ になることを証明しなさい。



（証明）Cを通って DA に平行な直線を引いて，BA をのばした直線との交点を E とする。

$AD \parallel CE$だから　$\angle ACE=\boxed{\quad\quad}$

$\angle CEA=\boxed{\quad\quad}$

ところが，AD は$\angle BAC$ の２等分線だから

$\boxed{\angle\quad\quad}=\boxed{\angle\quad\quad}$

故に　$\boxed{\angle\quad\quad}=\boxed{\angle\quad\quad}$

$\therefore\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$……①

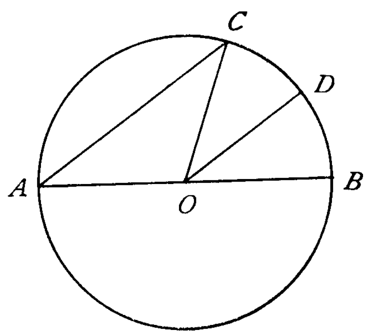
次に，$\triangle BCE$ で $AD \parallel CE$ だから

$AB:AE=\boxed{\quad}:\boxed{\quad}$……②

①と②から

$AB:\boxed{\quad}=\boxed{\quad}:\boxed{\quad}$

(3) 下の図で，ABを直径とする。中心 O を通って弦 AC に平行な直線 OD を引くと，２つの弧 BD と DC の長さは等しい。これを証明しなさい。



（証明）$\triangle OAC$ で，OA，OCは $\boxed{\quad\quad}$ だから　$\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$

$\therefore\boxed{\angle\quad\quad}=\boxed{\angle\quad\quad}$

また，$AC \parallel OD$ から $\angle BOD=\boxed{\angle\quad\quad}$

$\boxed{\angle\quad\quad}=\angle ACO$

$\therefore\boxed{\angle\quad\quad}=\boxed{\angle\quad\quad}$

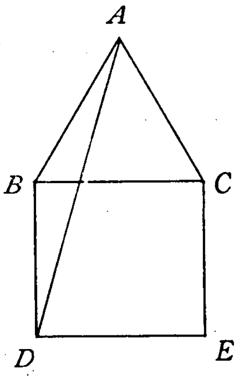
$\therefore\boxed{\quad\quad}=\boxed{\quad\quad}$

(4) 右の図のように，正三角形 ABCの一辺BCを一辺とする正方形を$BDEC$とする。次の角度を求めなさい。（証明不要）

① $\angle ABD$は何度か。

② $\angle BAD$は何度か。

③ $\angle ADE$は何度か。



② 成績の評価と診断

空らんを補う形の問題は，推論過程が与えられているためもあるだろうが，全般に非常に成績が良く点数でいえば99名中で90点以上の者が29名あった。これだけからは論証の理解度を診断することは早計であろうが，推論過程に適当な指針を与えるならば論証の指導はかなりその目的を達成できるのではないかと思われる。

Ⅳ 現在までの成果

この研究は先に述べたように，継続研究の一環であって，9月上旬から12月中旬までの指導の実際から得られた結果を一応まとめたものであるが，不備，不十分の点が多々あったことを認めざるを得ない。

さて，この研究を通じて得られた成果というよりも特に指導上留意したい点を述べると次のようである。

① 「論理的に筋道を立てて考える」ことに対しては多少の抵抗があるが，当然そのような考え方をしなければならないということを納得する。しかし，最後まで論証に対する積極的意欲が無いのは，指導に欠点があったものと思う。

② 論証に当って，命題を「AならばBである」の型に導き，仮定と結論を分離する仕方に対しては抵抗があるようである。すなわち，仮定，結論の用語を使ったこと。命題を仮定と結論に分離すること。以上の2点に強い抵抗があるようであった。指導に当っては今後この点に留意したい。

③ 証明において，推理段階の指導をどうすればよいかについては，満足すべきものを得られなかった。

④ なお，十月下旬，本校において実施した中等教育研究協議会では，論証指導に当り，仮定，結論，証明という型で指導するのは感心しないとの御叱正をいただいたので，今後，指導の上で参考にさせてもらうつもりである。

Ⅴ 今後の見通し

この研究は今後も継続されていくものであって，早急に見通しは立て難いのであるが，論証指導の実際に当って集積された問題点とその指導法に関する研究を重ねてゆくことによって，論証指導をより効果的に実施してゆけるであろうと思う。かつ，将来はこれを基礎にして図形教材の教育的な体系を作り，論証の本来の目的に即した指導法を，確立してみたいと思っている。