微分導入の実験報告

——愛知県案に基づく——

岩倉 一・兵藤祚夫・新海 寛

〔1〕研究目的

高等学校における数学科教育課程の改訂を近い将来に控え，全国各地区毎に改訂試案の研究発表がなされこれに対する討議が重ねられているが，愛知県高等学校数学科研究会では第40回日数教全国大会において教育課程案を発表した。この案の特徴は，現場に即応して僻地の高等学校においても実施が可能であるように作られていることであるが，必修9単位としてこの中に微分教材を入れていることが最も問題となる点である。

ここで，本校数学科としては，愛知県案の実験的裏づけ研究を兼ねて基礎教育研究の立場から，一年生に対して微分教材の指導の可能性と指導法を実験的に研究することにした。

〔2〕研究計画

(1) ねらい

微分教材の指導に当って，以下に列挙するような指導のねらいを立ててみた。

① 二次函数を特に時間をかけて取扱うことを避け，できるだけ直観的・実験的にその性質を把握させる。

② 二次函数のグラフは，導函数の応用によって完全に理解するようにし，かつ三次函数のグラフ理解への端緒を開くように指導する。

③ 極限の把え方は，直観的ではあるが，具体例を通じて，その本質的内容を暗示するようにする。

④ 使用する記号には特に考慮を払い，記号による学習上の障害を取除くように，原則として煩雑な記号は避けるようにする。

⑤ 既習教材の学習内容およびその用語を十分活用して，新教材の導入の円滑化をはかる。

⑥ 練習問題は既習事項より自然に解けるように案配し，極端な難問題は避ける。

⑦ 全般を通じて，具体例から直観的に結論を導き出し，drill によって理解を深めるように指導する。

(2) テキストの作成

前述のねらいに従ってテキストを作った。ここにはその目次と内容の要点のみを挙げることにする。

さて，このテキストの作成に当っては，英国の教科書 "Elementary Algebra" by A. W. Siddons & C. T. Daltry が望ましい形で微分教材を取扱っているように考えられたので，これを骨子として配列を適宜に変え，また補足して作った。

なお，これについては既に白石勲司氏の貴重な研究発表があることを附言しておく。

〔テキストの目次と要点〕

第1章 函数とグラフ

§1 変数と函数

変数，函数の定義，函数の種類，函数の記号

§2 一次函数

勾配 $y=ax+b$ のグラフ

§3 二次函数

$y=ax^2$ のグラフ，$y=ax^2+b$ のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

(自由研究)

$y=ax^2+bx+c$ を標準形にすること。

(自由研究は簡単にふれる程度にする)

第2章 グラフの勾配[1] (gradient of graph)

§1 直線の勾配

中学校で既習事項の整理

§2 平均勾配[2] (average gradient)

平均勾配の定義，$y=x^2$ 上の2点間の平均勾配

§3 曲線の接線

具体例による接線，一般的定義

§4 曲線の勾配[3] (gradient of curve)

曲線の勾配の定義，$y=x^2$ 上の点 (1,1) における勾配

§5 極限

例示（前節の例）による極限の説明

注 1) 函数の変化率 2) 函数の平均変化率
3) 曲線の変化率

§6　$y=x^2$ 上の任意の点における勾配
前節の極限の考え方を援用する

§7　微分法（differentiation）
$y=x^2$ について導函数の定義，微分法の記号Dの導入

§8　いろいろな函数の導函数
定数を微分すること，$y=mx+c$ を微分すること，$y=ax^2+bx+c$ を微分すること。

§9　記号△，$\dfrac{dy}{dx}$の使用
記号△の使用，$\dfrac{dy}{dx}$の使用

§10　三次函数を微分すること
$y=ax^3$ を微分すること，$y=2x^3-x^2+3x+6$ を 微分すること。

第３章　導函数の応用

§1　運動
平均速度（平均変化率），速度（変化率）

§2　二次函数の最大値と最小値
第１章 §3 において既習の具体例について導函数の考え方を適用する。

§3　極大と極小
$y=x^3-3x+1$ のグラフを与えて極大，極小の意味，一般的定義（$\dfrac{dy}{dx}$による増減の判定を含む）

§4　三次函数のグラフ
$y=ax^3$ のグラフ，$y=2x^3-9x^2+12x-3$ のグラフ，$y=-x^3+3x+1$ のグラフ，応用問題例（自由研究）
一般三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ のグラフについて。

〔3〕研　究　経　過

（1）　期間と時間配当

○期　　間　9月下旬〜11月中旬
○時間配当　総時間　32時間（週当り４時間）

第１章	第２章	第３章
§1…２時間	§1,2,3…３時間	§1…４時間
§2…２時間	§4………４時間	§2…３時間
§3…７時間	§5,6……２時間	§3…５時間

（2）　生　　徒

本校第１学年A，B組109名（男60名，女49名）
編成は普通課程の高校として標準のレベルと考えられる。（別表参照）

（3）　テ　ス　ト

① テスト(1)　10月29日実施（時間15分）
A，B両組に別々の問題で実施する。

〔A組問題〕（55名）

1．$y=3x^2-2x+1$ を定義に従って微分せよ。

2．次の函数を微分せよ。
(1)　$y=5x-3$
(2)　$y=2x^2-6+5x$
(3)　$y=2x^3-3x+5x^2-8$
(4)　$y=(x-4)(2x+1)^2$

〔B組問題〕（54名）

1．$y=2x^2-3x+2$ を定義に従って微分せよ。

2．次の函数を微分せよ。
(1)　$y=3+6x$
(2)　$y=4x^2+2x-6$
(3)　$y=10-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+6x$
(4)　$y=2x(x-3)+3x^2(2-3x)$

② テスト(2)　10月31日実施（時間20分）
A組（55名）にのみ，第３章 §2 二次函数の最大値と最小値を指導した直後に実施する。

〔問　題〕
次の函数の最大値または最小値を求めよ。またグラフの概形をかけ。
(1)　$y=x^2-4x+6$
(2)　$y=4-2x^2+6x$
(3)　$y=-\dfrac{3}{2}x^2+6x-3$
(4)　$y=\dfrac{1}{4}(2-x)(3-2x)$

③ テスト(3)　11月２日実施（時間50分）
A，B両組（109名）に対して実施する。

〔問　題〕

1．次の各曲線上の〔　〕の中に示された点における曲線の勾配を求めよ。
(1)　$y=4-\dfrac{5}{2}x^2-5x$　〔$(-2,\ 4)$〕
(2)　$y=\dfrac{2}{3}x^2-2x-\dfrac{1}{3}x^3+6$　〔$(3,\ -3)$〕

2．曲線 $y=2x^2-8x$ について，次の各問に答えよ。
(1)　x が０から２まで変化する間の曲線の平均勾配を求めよ。
(2)　前問で求めた平均勾配は，$x=1$ における曲線の勾配に等しいことを証明せよ。

3．曲線 $y=2x^2+4x-6$ について，次の各問に答えよ。
(1)　曲線上の点（-2，-6）におけるこの曲線の接線の式を求めよ。

(2) 曲線上のある点における接線の勾配が-8になる。ある点（接点）の座標を求めよ。

4．曲線 $y=x^3-2x^2-4x$ 上の点で，曲線の勾配が0になる点の座標を求めよ。

5．函数 $y=2x^2-3x+2$ を定義に従って微分せよ。

④ テスト(4)（時間50分）

二学期末テストとして実施する。

〔問　題〕

1．次の二次函数について最大値または最小値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x$

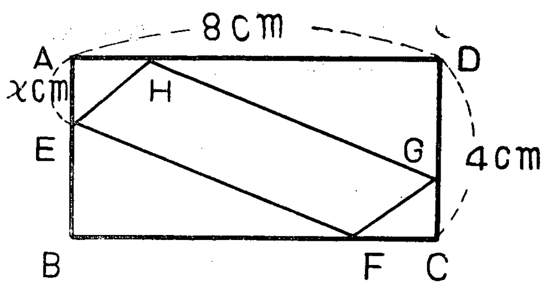
(2) $y=2x^2+6x+6$

2．次の三次函数について，極大値と極小値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-2x^3+6x-1$

(2) $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x$

3．図の長方形ＡＢＣＤで，ＡＥ＝ＡＨ＝ＣＦ＝ＣＧであるとき，次の問に答えよ。



(1) ＡＥ＝$x$cm として，四辺形ＥＦＧＨの面積（$y$cm²）を x の式で表わせ。

(2) 四辺形ＥＦＧＨの面積を最大にするxの値と，その時の四辺形の面積を求めよ。

（4） 指導上の留意点と反省

既述の〝ねらい〟に従って指導に当り留意した点およびその反省事項について，各章毎に要点だけをまとめてみると次のようである。

（第１章）

① 一次函数は中学校の復習を兼ねてそれを発展させるように注意した。

② 二次函数については，そのグラフは点をプロットする方法をとり，特に $y=ax^2$ の形についてはその特徴を直観的ではあるが，しっかりと把握させてからその型紙を作り，それを規則的に移動することにより $y=ax^2$ のグラフと $y=ax^2+bx+c$ のグラフとは合同であることを理解させるように指導した。この方法は生徒の興味をそそり，効果があったように思う。

（第２章）

① なるべく既習の用語や知識を生かすようにするため，慣用的な用語を敢えて使用せず，特に「変化率」の代りに「勾配」という用語を使用し，「直線の勾配」からの発展を考えた。これについては，なお研究の余地があるように思うが，このことは生徒にとっては抵抗感が少なかったように思う。

② 「曲線の勾配」は「接線の勾配」であることを指導の頭初から強調し，従前の教科書におけるように接線の式を公式化するようなことは避けた。

③ この章には，定義する事項が非常に多く，矢継早やに新教材が導入されるため，生徒はやや混乱したようであるが，新教材に対する強い興味と学習の嬉びを持っていたようである。

（第３章）

① 運動に関連して「平均変化率」「変化率」の用語を導入し，既習の曲線の平均勾配，勾配に帰着させた。“§1 運動”に関しては理解が困難であったようで，いま少し指導時間が欲しかったと思う。

② 二次函数のグラフ・最大値・最小値については第１章でも取扱ったが，導函数の利用により解析的な面からこれをよりよく理解させるように指導した。

③ 二次函数を媒介として，函数の増減と導函数との関連を暗示し，三次函数の具体例に適用して直観的に函数の増減を理解させ，これを利用するように指導した。この際，増減の理論をことさらに追究することは避けた。

これは生徒にとって理解しやすかったようであるが，直観面と理論面との調整については今後に問題が残るだろう。

〔4〕結　　果

（1） テストの分析と診断

各テスト毎に，その正答表を掲げ，結果について特に目立った点を記述する。（表中の数は百分率で表わした正答率）

① テスト(1)

（A組）

問　題	1	2			
		(1)	(2)	(3)	(4)
正答率	30.9	96.4	83.6	83.6	70.9 (80.7)

（B組）

問　　題	1	2			
		(1)	(2)	(3)	(4)
正　答　率	38.5	96.2	90.4	63.5	61.5 (71.2)

（備考）表中(4)の（　）の数は，かっこをほどく計算に誤りがあるが，微分の仕方が正しいものをふくめたものである。

〔診　断〕

i）A，B両組を通じて整数係数の一次，二次，三次函数の微分は80％以上の正答率で，大体良好とみなしてよい。

ii）式の計算力は不足しているが，微分の仕方は大体理解できていると思う。

iii）定義に従って微分することがやや不出来であるのは，指導の仕方に問題があったように思う。

② テスト(2)

分析＼問題	(1)	(2)	(3)	(4)
イ	100	96.4	92.7	
ロ	100	96.4	87.3	85.5
ハ	92.7	80.0	80.0	54.6
ニ	85.5	78.2	76.4	50.9

（備考）イ　微分までできている。
　　　　ロ　xの値まで求めている。
　　　　ハ　最大値，最小値まで求めている。
　　　　ニ　正解

〔診　断〕

i）$y'=0$よりxの値を求め，最大値か最小値かの判定までは各問題を通じて85％以上の成績であるが，最大・最小値の計算を誤ったものが多い。特に，(3)，(4)ではこの傾向が非常に目立ち，為めに正答率は悪い。

以上のことは，内容を理解しているが計算力の不足を物語っている。

ii）二次函数のグラフをかくことについては，その軸に関する対称性をよく理解し，最大・最小値を利用してグラフをかき，大体満足すべき結果であった。

③ テスト(3)

問　　題	1		2		3		4	5
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)		
正　答　率	85.3	77.1	67.9	73.4	68.8	70.6	41.3	53.2

（備考）正解者に途中まで解答している者を入れた時の段階別の正答率は次のようである。

問1　$y'=0$よりxを求め代入までの者

　(1) 89.0％　　(2) 88.1％

問3　(1) 接線の勾配までの者　76.2％

　　(2) 接点のx座標までの者　78.9％

問4　○求める点のx座標までの者　79％

　　○求める2点のうち（2，−8）を求め他方が誤っている者　70％

問5

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+2-(2x^2-3x+2)$$
$$=\cdots\cdots\cdots=4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2-3\Delta x$$

とすべきを，$4x\Delta x$を$2x\Delta x$と誤っている者が18.4％に及んでいる。

〔診　断〕

i）問1，2，3ともに約70％の正答率を示し満足すべき結果と云える。

ii）問4，5は正答率は低いが，問題の内容は大体理解していると解される。ここで低い正答率を示した最大の原因は計算力の不足である。

④ テスト(4)

問　題	1		2		3	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
正答率	80.3	86.9	72.5	64.5	43.2	40.9

〔診　断〕

i）問1の最大値，最小値を求めグラフをかく問題は，前掲テスト(2)の同問題にくらべてやや向上したことが認められ，練習効果が認められる。

ii）問2の三次函数の極値とグラフについても，大体理解されているが，(2)は特に計算の誤りが多く正答率も低い。

iii）問3の応用問題は，指導時間が不十分のため不成績であるが，それにしても応用能力の不足を痛感する。

（2）おわりに

テストの分析とその診断の結果より観察すると，必修9単位において，微分教材を指導することは可能ではないかと思う。しかし，教材の取扱いや指導については十分考慮する必要があるだろう。なお，新教材に対する生徒の意気込みと興味とを指導面に生かすことが如何に有効であるかは今更言を俟たないだろう。

〔別　表〕

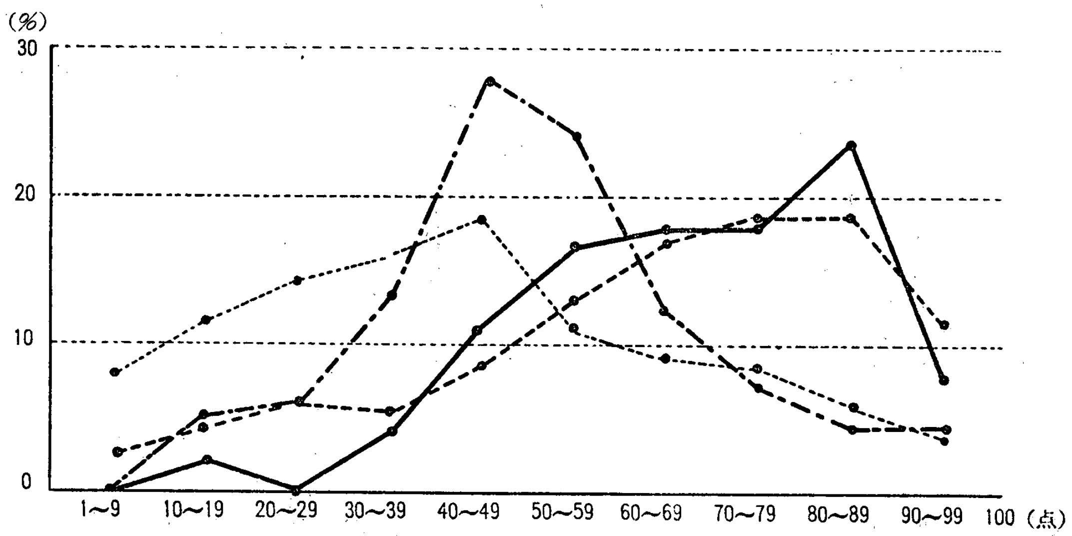
本校一年生の程度について，次の資料を参考にされたい。

① 智能指数

新田中B式　M＝65.2，σ＝4.57

② 愛知県高等学校新入学者の学力調査

愛知県では，毎年高校新入学者に対して，入学頭初に学力テストを実施して参考資料としている。これはテスト〔1〕と〔2〕に分かれ，〔1〕は基礎的，〔2〕は応用的な問題である。次の表は本校と県下の普通課程全体とを比較したものである。



テスト〔1〕

本　校	————	M＝68.1	σ＝17.0
県普通	- - - - -	M＝64.7	σ＝23.1

テスト〔2〕

本　校	—・—・—	M＝51.9	σ＝17.5
県普通	…………	M＝43.1	σ＝24.1