数学科における学習困難点

兵藤祚夫・岩倉　一・新海　寛

ま　え　が　き

紀要第2集に，中学第3学年に治療学級を設定して，学習指導上の諸困難を乗り越えるための試みについて報告した。数学科では特に治療学級の生徒たちの示した学習上の困難点を集めて，その困難の程度や，困難点のもつ本質的な理由について考察することを取り上げたのであった。その要約は次の通りである。

文章題を中心としては，

a．同じ内容でも取り扱う品物の変った場合。

b．言葉の順序を変える場合。

c．二つの内容を一句で表現する場合。

d．一般の場合より特殊題を類推すること。

（例．130%，12割の理解，$y=ax+b$ のグラフを学んでも $y=3$ は理解困難等）

e．全く同じ内容でも表現の形式を変えた場合。

用語その他については，

a．日用語にないもの。

b．具体を表わさず抽象的な内容。

（例．正比例，反比例，項，方程式等）

c．計算の結果求められるもの。

（例．%，比重，指数，三角比，$\sqrt{5}$ 等）

これ等は中学第3学年についての教材に学習不振児の示した困難点の分析であったが，また教材が中学の総まとめでもあるため，これは中学全般の教材にわたっているということができよう。

本稿での試みは，この主旨を更に拡大して，教材も中学，高校の全分野に拡げ，特に困難点と思考される分野を選んで分析を試みることにした。いわば本稿は前回に続く数学科学習困難点の総合的考察ともいえよう。

1．困難点の選定

数学科学習指導上の困難点が配列された教材の系統上，どの点にあるかを指定することは，さして困難ではない。学習不振児たちが，いずれもどこかにつまずきを持っていて，数学の特性からそれ以後の教材は全く彼等には無縁のものとなっていることは，教師の誰もが知悉していることである。そしてこれらのつまずきの個所はいずれも，正負の数の導入，文字の使用，等々の新教材の導入の個所であり，ほとんど定説にさえなっているこれらの個所には，我々が特に力を入れ苦心して指導しているにも拘らず，能率の上がらぬことは常に経験済みである。

さて，これらの困難点はいずれも教師の経験が基盤となって，選定された学習指導上の困難点ということができよう。そこで，これに対して本稿では，全国学力調査等の学力標準検査の結果を分析して，我々の経験による結果の正しいことを再確認したのである。

取り上げたのは，全国学力調査（文部省，1956），解析Ｉ学力検査（徳島県教育研究所，1955），学力標準検査解析Ｉ（愛媛県教育研究所，1955），高校新入生学力調査（愛知県教育研究所，1957，1958，1959，1960）である。

一般に学力検査に基づいての考察に当っては問題がどのような主旨によって作られているかが，重要な出発点であろう。ほとんどいずれもが，学習指導要領に示された全分野に互っていて，問題は基礎的なものが取り上げられ，さらに注意すべきことはこの程度までは教育していきたいという教師の側の希望的要求が含まれている，と考えるべきであろう。さらに各個の問題に実際直面してみると，設問の仕方や，問題の組み立て方の程度等を考慮入れる必要が起ってきた。我々は各個の問題の所属分野とその正答率だけでは，我々の資料とはならないことを痛感したのである。

我々のとった手順は，次の通りである。まずこれらの学力調査の問題別正答率を所属分野に従つてそれぞ

れグラフに示し，30%若しくは40%以下の正答率を示した問題，あるいは同一分野の中でも際だって成績不良の問題を取りあげることにした。

次にこれらの問題が何故低い正答率を示すかについて考察することにした。その結果設問の仕方，すなわち問題の程度の高いための原因や教師の希望的要求としての原因を除外すれば，生徒のもつ学習困難点が，いくつかの基本的な教材に限られていることを推察し得るわけである。得られた結果は一応我々の予期の通りであったが，このような手続をふんでも同じ結論を得られたことに意義を感じている次第である。

2. 中学校学習困難点

中学においては，まず累乗，%，割り合い，等の計算が一般に成績不良である。累乗については高校教材の対数の入門とも考えられるがいずれも「計算の結果得られる値」についての理解を要し，生徒にとっては，その計算の過程を適確に理解，記憶し，また結果を自由に使いこなすことは困難であると考えられる。ところが，数値によって結果を求められる場合でも，これを文字を使って一般論にした場合の成績は，はるかに不良である。全国学力調査の10の(4)(正答率6.5) はそのよい例と考えられる。このようにしてわれわれは「文字の使用」が中学での重要な学習困難点であると指摘せざるをえないのである。

次に「証明」がよく問題としてとり上げられているので，これを検討する。実は証明については問題数が少なく正答率は勿論40%以下であるが，決定的なことはいえない状態である。しかし成績不良の問題の多くが，混み入った条件の下で，推論を二段三段と押し進めて解決し得る問題であることが注意される。これらの問題は基本的な教材の理解というより、推論そのものに困難な理由があると思われる。このことから「論証」をとりあげることにした。またよくあげられる「文章題」については，確かに成績不良ではあるが，問題によって各種の条件が折り込まれているため基礎になるいくつかの教材を指摘することは困難である。われわれはむしろ「論証」という分野にその一端を荷わせることにした。

3. 高校学習困難点

高校については，われわれのもつ教材観が問題であろう。本来全く別個の分野として発展してきたいくつかの教材を殆ど直列に並べ，これらを綜合的に捕えようというねらいを持っているのが高校教材の大きな特色である。これらの各分野の融合は相等程度なされているが，まだ今後われわれの研究の余地が多分に含まれていると見なければなるまい。基本を放れた応用問題では分野別の知識を綜合して解決することはいくらもあるが，基本の部分での融合として例えば三角函数の諸定理を座標を使って証明したり，数列のあるものは函数として表現したり，等々を考えられてよいことではないだろうか。

一方において高校では大学入試という極めて現実的な問題を控えており，基本的な基礎学力と，教師から生徒への希望的要求度とが明確に打ち出し難いことが第2の問題点である。教科書で学習する基本の部分は相当程度理解する生徒も，入学試験用に作製された綜合問題となると全く解決困難となる。この際われわれの要求はどちらにおいてよかろうか？　数学学習のための目標をもっと具体的に明らかにする必要を痛感されるわけである。

これらの点から学力調査の問題作製にも苦心の跡が窺われ，またそれに基づく学習困難点の選定にも困難を感じた。どの分野においても，問題の作り方によって正答率は如何ようにもすることができ，従ってどの分野も学習困難点と指摘することすらできるわけである。

しかし正答率の低い問題を通観するとき，計算尺の原理の問題，対数の問題についてはいずれも成績がよくない。また対数の学習困難な理由について考察すれば，これが三角函数にも，二次曲線にも通ずる一般性を持っているため，われわれは学習困難点の例として「対数」をとり上げることにした。

4. 困難点の考察

定義，用語，記号等は思考の節約であるとよくいわれている。複雑な過程を経てのち得られる結果を1つの言葉で表わすことにすると，最初はこの言葉はその得られた過程を思い出さなければ無意味な響きにすぎず，いわば不安定な状態にあるといいうる。しかし長い時間をかけてこの言葉を使い慣らすと，言葉そのものが具体的な意味を持つ安定した思考対象となるのである。この場合これらの定義，用語，記号等は，その得られる過程が複雑であり，日常身辺の具象からかけ放れたものであり，またそれを使用する頻度の少い程具体化するのに困難であることは当然であろう。

また一方においては，生徒の心理的発達段階や，生徒の感ずる興味関心，問題の有用性も学習上に大きな影響を及ぼすことは当然である。個々の生徒のもつ特異な条件は別としても，教材の配列や取り扱いの面か

ら学習困難の要因を作ることはありうる。数学が系統を追う教材であることから，各個の教材が，次の段階を追求するため必要なものであることは，教師にも生徒にも当然考えられていることである。しかし定められた教材の配列の中でも，その取り扱い方法によっては困難度を低めることができよう。従来教授上の工夫として問題が数学の系列上どの位置にあるか，その有用性，問題の動的綜合的な取り扱い，演繹的取り扱いと帰納的取り扱いの適切な使い分け，生徒の思考の世界の中でいきいきとした体験として感じとらせること，自然発生的な発想，等々が考えられているのである。従ってこれらの常用の教授上の工夫の適用し難い教材は当然学習困難点となってこよう。

われわれは学習困難点として，中学においては「文字の使用」と「論証」を，高校においては「対数」をとり上げたのであるが，これらはいずれも上記の要素を兼ねそなえていて，教師にも生徒にも学習上の障壁をなしているわけである。

思うに学習困難点の考察は前述の，教材に関する条件と，教材の取り扱いすなわち指導上の困難点の条件を綜合して，これらが各教材と如何に具体的に関連づけられているかを，重点に考察することになるのである。すなわちわれわれの取り扱った中学の「式」，「図形の論証」，高校の「対数」は，中高の他の教材における困難を分析する際にも，同じ基礎の上に立って考察することができると思われる。例えば「対数」では $a^{\frac{q}{p}}$ についてみるとき，これを理解する思考上の困難点は，他の教材の思考上の困難点と共通した要因を持っていると思われる。従ってわれわれとしては，以下にあげた教材の考察は，単に限られた教材の分野のみの困難点の考察ではなく，教材全般に亘って共通する困難点の考察であると考えている。

以上の見解のもとに次に具体的に，考察の結果を1覧表に示すことにしよう。

中　学　校　の　部

区分	事項	困難点の内容	考　察
式（1年）	(1)ウ	1．文字を用いた式における乗除の表わし方の規約 イ．$a\div b\times c$，$a\div b\div c$，$a\div bc$，$a\div(b\div c)$の区別 ロ．$\frac{1}{2}a$，$\frac{a}{2}$，$a\div\frac{1}{2}$の区別 ハ．$2\frac{1}{2}a$の理解	1．イ．計算順序の約束の理解が充分でないうえに，文字が数を代表するものであるという考え方が困難であり，同時に乗除記号の省略を行うため混乱を生ずる。 ロ．乗除記号省略の規約以外に分数の意味・分数の乗除が入るため二重の抽象概念を綜合的に把握することが必要である。初期には生徒にとってそれができない。 ハ．$2\frac{1}{2}$は$2+\frac{1}{2}$であり，$2\frac{1}{2}a$は$2\frac{1}{2}\times a$の意味で，二つの異質な計算記号省略が同時に行なわれているが，生徒には$2\times\frac{1}{2}\times a$と紛わしい。 以上に見るように文字という非常に高度な抽象概念の導入にさいして，演算の順序の規約と乗除記号を省略する規約等がもちこまれる。こうした規約は文字を使いなれている我々には文字と不可分ともいえるほどに基本的である。しかし始めて学ぶ生徒にとっては二重の負担ではなかろうか。特にハ．を取扱うことは問題である。文字を数と同じものであると考えることは，数そのものが抽象概念である上に，その数を更に抽象化して表現されたものが文字であるために，その理解は困難である。また，従来学んできた数の演算も規約を通じて理解しなければ，文字の操作はできない。
式（2年）	(1)ア	2．文字で表わされた式を一つの数とみること イ．$2a+3b+2a$を計算した答が$4a+3b$であること ロ．$2(a+b)=2a+2b$から$2\{(x+y)+z\}=2(x+y)+2z=2x+2y+2z$を導くこと等	2．イ．この時期までの生徒にとって答とは式を計算して得られるまとまった数なのである。したがって$4a+2b$を答とは考えにくい。 ロ．文字に数を代入することにくらべて，文字に文字式を代入することは非常に高度な抽象概念の中での操作である。 イ，については設問の形式を「計算せよ。」より「簡単にせよ。」の方が生徒には理解し易いと思う。また中学2年においてはロ，のような計算式は稍々高度ではなかろうか。

イ	3.　式の中の文字を変数としてみること イ．毎秒2 ℓ ずつ水が流れるとき，流出した水の量 $y\ell$ と時間 t 秒との関係が $y=2t$ で表わされること ロ．$r=2x$ をグラフに表わすこと ハ．一般比例関係 $y=kx,\ y=\frac{k}{x}$ および $y=ax+b$ のグラフ	3.イ．1秒で2 ℓ でるから t 秒で $2t\ell$ であることはよく理解できる。しかしそれを y とおくことに疑問をもつ。水の量は $2t\ell$ だとした前の操作が忘れられないのである。さらに t 秒のときの水の量として考えてきた $y=2t$ が二つの変化する量の関係を示すものと考えなおさねばならぬ。静的な概念から動的な概念にきりかえるためにあたって，二重の概念上の切りかえが困難である。 ロ．イの例で点をとってグラフを作製する操作はよく分るが具体を示さぬ関係式としての $y=2x$ のグラフを書くときには，同じ操作についての理解が困難である。そして最後には結果だけを操作的に暗記してしまい，グラフが点の軌跡であるという基本的内容が忘れられてしまう。 ハ．変数である x，y と任意定数である a，b，k の間の区別が明確でない。したがって関数関係の理解および変数 x,y を使っての表現という二重の困難がある。 比例関係を見とおすこと自体すでに高度な抽象化であって，それに式表現からグラフ表現へと長い操作の過程が続いている。しかも幾度かの概念のきりかえが要求される。いきおい操作的暗記にならざるを得ない。この点に生徒の理解を不十分にする原因があるものと思う。なお関数関係の式表現を公式作成の形で行なうことは一考の余地があるように思う。
カ	4.　式が表わす関係は用いる文字にかかわりなく式の形のみに依存すること イ．$y=2t$ のかわりに $y=2x$ としてもよい等	4.　出発点で使われた $y=2t$ には，y にも t にも具体的数量としての意味がある。これを $y=2x$ とか，$z=2t$ とかすることはその理解された意味をこわすことになる。これは一方で操作の基本概念なるものを定着させようと努力しながら，他方で考えるよりどころをうばってゆくになるのではなかろうか。この項についての練習はことさらに強調する必要はないようである。
(2)ア	5.　単項式の四則 イ．$a\times a=2a$．$3a+2a=5a^2$，$a\times a=a2$，$3a-a=3$*，$3a\times 2b=3a2b$，$\frac{x}{x}=0$ 等の誤り ロ．分配法則の理解	5.イ．1年における計算上の諸規約が十分に把握できない。 ＊$3a+2a$ をりんご3個と2個だから計5個で $6a$ と説明するため，$3a-a$ をりんごとりんごを引いて3と答えるのだと考える人もある。 ロ．分配法則は数計算で既知であるものとして示され，文字式の計算に用いられるが，数の実際計算では事実上この法則は使用されない。しかも $2a+3a=(2+3)a=5a$ というより順序の逆転した形で法則をあつかわねばならない。
イ	6.　多項式の加法と減法 $(a^2+2a)+(3a^2-a)=4a^2+a=5a^3$ $(a^2+2a)-(3a^2-a)=a^2+2a-3a^2-a$ $(a^2+2b)+(3a^2-b)=4a^2+b=4a^2b$　等	6.　前項において累乗と積の区別が明確に把握されていないこと，およびかつこの用法に習熟していないことが理解困難の原因である。
ウ	7.　多項式と単項式の乗法 $3a\times(2a+b)=6a^2+b$ $3a\times 2a+b=3a\times(2a+b)$ 等の誤り	7.　計算順序の規約および分配法則の理解が不充分であるためこのような誤りをおかすものと思われる。

	エ	8. 多項式を単項式で割る除法 $(2a^2+3ab^2)\div 3a=2a+b^2$ $(-2a^2+3ab^2)\div(-3a)=2a+b^2$等の誤り	8. 分数を約分することの原理，および共通因数の理解が不充分である。 以上(5)〜(8)の項目においては特に規約通り正しく適用することが要求される。そしてこのことが常に困難なのである。にもかかわらずほとんど全ての規約を始めにあたえて困難を倍加しているように思われる。その意味で一つずつ規約を把握させてゆくような体系が要求される。 また数計算との比較は具体から抽象への過程として充分行なわねばならぬが，数計算の法則化（例えば数計算に分配法則を適用する）から文字計算の四則を導き，これによって文字計算を進めようとすることは危険であるように思われる。生徒は計算法則を明確に把握したうえで数計算をするのではないからである。 なお文字が一つ増し指数が一つ増すにつれて困難度は増加するようである。計算の体系化には一般から特殊への原則とともにこの点の考慮も必要であると思われる。
	(3)ア	9. 1元1次の方程式の解法およびこれを用いて問題を解くこと イ．等式変形の原理 $-4-x=-3$ から $x=4-3$ の誤り ロ．等式変形の意味 $4x\underset{(a)}{=}2\underset{(b)}{=}x=\frac{1}{2}$の誤り ハ．移項 $\frac{x}{3}=2$から$x=-6$	9.イ．原理は理解できるが何のために方程式の両辺に同じ数を加えたりかけたりするのかわからない。見通しが立たないのである。 ロ．(a)と(b)では同じ等号を別な意味に使用していることに気付かず，習慣的に等号でつないでしまう。 ハ．原理の簡便化としての移項を理解できなくて，答を求める技術として受けとるものが多い。その結果混乱してしまう。
E 図形（第二学年）	(3)ア	1．論証を用いる意義の理解 イ．論証の意味を把握すること 「論証とは何か」を説明するにあたって，かなり概念的な説明の仕方をしなければならない。これより起る理解の困難と論証を用いることに対する抵抗感がある。	1． イ．図形教材によって論証を指導するに当って，先ず当面する障害は，「論証とは何か」の問題がある。すなわち論証の意味を理解把握させることであろう。いま，論証の意味を概念的に述べると，「確かな事実（公理・定理）を論拠として，正しい推論（証明）によって図形のより新しい性質または図形相互の関係を見つけ出すことである。」（指導要領2学年3指導上の留意点，(3)参照）といってよいだろう。ここで，生徒に論証の意味を説明する場合には，例えば「二等辺三角形の両底角は等しい。」というような命題を取り上げるなど，実例に即して指導が行われる訳であろう。この際，論証の根拠となるもの，推論の進め方などに理解・納得し難い点が多く，ひいては論証を用いることに抵抗を感ずるようになる危険があるのではないかと思う。
		ロ．論証の必要性を理解すること 論証指導に当り，まず既習の命題について論証を試みる理由とその必要性について理解が困難である。ま	ロ．論証の導入時においては，次のような既習の簡単な命題を指導教材として用いる。 (イ) 二等辺三角形の底角は等しい。 (ロ) 対頂角は等しい。 上例の命題は，生徒には，実験・実測的な方法または帰納的な方法により習得された事実として疑念の余地がない

		た，抽象的な思考形式への抵抗が感ぜられる。	ものである。それにも拘わらず，論証指導の教材とし再度これらの命題の事実性を確認させるに当っては，次のような点に問題があるものと思われる。すなわち生徒に対して，従前の如き実践的な判断への信頼性に疑問をいだかせると同時に，進んでそれを解決するためには理性的な判断が必要であることを諒解させねばならない。この際には，思考の在り方に少なからぬ転換と飛躍が要求される訳であって，これに対応することは，当該学年の心理的発達段階からみて必ずしも不可能なことではないが，多大の困難を感ずることは事実である。
		2．論証の根拠とその必要性の理解 イ．論証の根拠を求めること ある命題を論証するに当って，その根拠をどこに求めたら最も適切であるかを理解することは困難である。	2． イ．論証の根拠については，指導要領の中に「……，それ以前に学んだ図形の基本的な性質を根拠にして，……」と述べられている。ここで，図形の基本的な性質とは，ユークリッド幾何学における定理・公理のようなものを意味するのであろう。さて，論証指導の当初には特に，論証の根拠を何処に求めるのが適切であるかを理解し把握することが困難である。例えば，「正三角形の3つの内角はすべて等しい。」を論証するに当って，「三角形の合同定理」または「二等辺三角形の両底角は等しい。」のいずれを論拠としてもよいが，後者のほうが適切であることを察知するのは難しいことである。
		ロ．論証の根拠は何故に必要であるかということ 論証の根拠を設定し，これに基づいて論証する必要があるだろうかという疑問がある。	ロ．前項1.論証を用いる意義の理解と関連のある問題であるが，ここでは生徒の立場より再考してみたい。生徒にとっては，小学校以来習得してきた基本的な図形の性質は，不動の事実であって，敢て論証の照射を必要としないのではないか，という疑問がなかなか消えない。例えば，「対頂角は等しい。」とか「正三角形のすべての内角は60度である。」というような事柄については，妥当性のある根拠を設定してこれを論証する必要があるだろうか，その理解に苦しむところである。すなわち既習事項を整理・統合して，その根抵の理解を十分にしこれを納得すると同時に，論証の根拠を明確に認知することによって普遍妥当な事実が得られることの認識は極めて困難である。
		3．用語の定義の明確性 イ．用語の定義の必要性を理解すること 用語に定義をあたえることによって，論証が普通妥当性を持つようになることを理解することは困難である。	3． イ．論証においては，その根拠を明確にすることと同時に，論証の地ならしとして使用する用語の意味を限定することすなわち用語の定義をする。このとき，例えば，三角形，四角形，正方形，平行線などについて，それらの用語の意味を確定することは，はなはだ厄介で窮屈なことであり，かつまた斯くすることにより抵抗を起こさせるものである。したがって，用語を厳密に定義することによって，論証が普遍妥当性を持つようになるということまでは，なかなか理解がゆきわたらないようである。この対策としては，用語の意味の不統一より招来される論証の混乱を指摘すればよいだろうが，必ずしも常に好適な例があるわけではなく，指導上教師の側にも困難を感ずる。
		ロ．図形の定義とその性質とを区別すること 図形の定義の内容とそれ	ロ．用語の定義の理解が，曖昧でかつ厳密でないために，論証に混乱を来す場合が多い。例えば，「平行四辺形では，二つの対角線が互に他を二等分する。」という命題を論証す

		より導出される性質を混用することにより論証が混乱する。	ることは，平行四辺形の定義を明確に把握していない生徒にとっては奇異な感をいだかせるであろう。これを思うに，図形の定義とそれより導き出される性質とを混同しているとき，このような問題が起るのであろう。この際，逆概念の導入を考慮し，然る後に同値関係を理解させるようにしなければならぬが，これは高度の困難を伴う。
		4. 推論の筋道が論理的に正しいことの理解 図形の基本的性質を根拠とし，演えき的な推論によって新しい性質を導き出すという一連の推理過程は特に理解が困難である。	4. この項目についての問題は，前述の三項目がすべて関連する訳であって，論証の指導においてもまた，生徒にとっても最も困難な問題が多いところである。つぎに演えき的な推論過程（三段論法）の理解をさまたげるものとして，幾つかの原因を要約してあげてみよう。 (イ) 用語の定義の理解が曖昧である。〔3のイ〕 (ロ) 三段論法の適用に習熟していない。 二段階の推論は比較的に容易であるが，三段階以上の推論は甚だ困難になる。これは推論過程の持続性の問題であろう。 (ハ) 仮定と結論の分離が不十分，即ち命題の理解が徹底しない。〔5のイ〕 (ニ) 証明に当って，定理の選択が不適当または不明である。 これは定理の選択の基準が確立していないことに原因があるものと思うが，論証指導上，特に困難な問題を孕んでいる。
	(3)イ	5. 論証における仮定と結論の意味の理解 イ. 命題が仮定と結論より成っていることを理解すること ある命題を「A（仮定）ならばB（結論）である」と，仮定と結論を明確にすることはむつかしい。 ロ. 本命題と逆命題の関係を理解すること	5. イ. ある問題を論証するに当って，その問題では何が仮定され，何が結論となっているかを分明にすること即ち「A(仮定）ならばB(結論）である。」と問題の内容を理解することが先決問題であるが，生徒にとっては，このように問題を分析することは困難であるように思われる。即ちある問題において，仮定と結論の分離が不十分の場合が多い。この結果は，推論過程において結論と仮定の混用となって現われてくる。 ロ. 本命題の仮定と結論との区別が明確でないために，その逆命題と本命題との関連を理解することは非常に困難なことである。例えば本命題「二等辺三角形は両底角が等しい。」とその，逆命題「二つの内角が等しい三角形は二等辺三角形である。」とを区別することは，論証の導入時には至難の業といってよいだろう。特にこの場合のように，同値の命題ではその関係を明瞭に把握させることは一層困難である。 以上の考察は論証過程における項目別の分析であるが，この他に図形教材特有の次のような困難点が介在している。 ① 対称になる図形が複雑であるかまたは親しみ難いために，それらの図形より受ける圧迫感が学習意欲を削ぐことがある。 ② 命題に示されている補助図形を利用するようなものは，その発見が自然発生的でないので理解が困難である。 ③ 記号による表現，また記号の判読は，代数における文字の使用の如く，その理解と適用が困難である。

高　等　学　校　の　部

区分	事項	困難点の内容	考　　　察
数学Ⅰ 代数(3) 対数(一年)	ウ(ア)	1.　指数の拡張	1.
		イ.　$a^{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\sqrt[p]{a^q}}$ の理解と応用	イ. 定義によって定められた記号 $\sqrt[p]{a^q}$ は，生徒にとっては具体化された概念 a^p の上に更に，新しく $\sqrt[p]{\ }$ という複雑な操作の加わった後に得られる値をあらわす。これを直観的に把握するには時間を要し，長い修練を要する。$a^m \cdot a^m = a^{mm}$ の操作を機械的に拡張して $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$ とすることから記号の理由づけを行っても，$a^{\frac{q}{p}}$ の概念は極めて高度の抽象化である。
		ロ.　$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[p]{a^q}}$ の理解と応用	ロ. 上の操作の上に $a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}$ という理解困難な操作が加わっている。理解し難い抽象概念の結合によってえられる新しい抽象概念である。 　各一段一段の抽象化された概念を，取つき易い具体例の取扱いを通して，先ず内容的に次に形式的にとらえていき，更に形式化された一般公式の利用によって一層高度の練習をするのであるが，この過程は理解困難である。
	ウ(イ)	2.　簡単な底の指数函数	2.
		イ.　$y=a^x$ のグラフ	イ. $a=2$ の場合から手をつけ，x の分数値につき表を利用して y の値を求める。操作の上に不安が残りその上に立って x の大きな値，x の負の値について類推することは極めて困難である。更に a の値によってグラフの形の変化する状態を類推することは更に困難である。
		ロ.　$o<a<1, 1<a$ の場合の y の増減の模様	ロ. $x=0$ のときの y の値は a の値にかゝわらず 1 になることの発見，更に，a の値の範囲の区分により全く形の異るグラフを推察することは極めて困難である。また $x\to\infty$，$x\to-\infty$ の考えも捕え難い。これらの一連のグラフの全貌を捕えるための操作の必要性の理解も困難であり，操作そのものも高度のものである。 　例えば $a=2$ の場合につき綿密にしらべ，これをもとにしてグラフ作製上の重要な着眼点を把握した上，具体から抽象へ移行させて理解を確実にするのであるが，この操作の上に困難がある。
	エ(ア)	3.　対数の記号と性質	3.
		イ.　$y=\log_a x$ の記号の理解と応用	イ. $a=x$ において，x の値の間の計算を，対応する y の値の間で計算するという前提，x の値の間の乗除演算が y の値の間では加減になること，いずれも高度に抽象化された概念の上に積み上げられた操作である。この操作の必要さも有効性も理解困難なため学習意欲にも影響する。$\log_a x$ の記号も複雑なため，形式から習熟して，内容を捕えるという常用の手段も困難を伴う。 　英国には $\log$ の記号を使わずに，原形のままで y の数値を計算し，相当程度この計算に慣れてから $\log$ の記号を導入する例がある。
		ロ.　対数公式の理解と応用 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$, $\log_a \frac{y}{x}=\log_a x-\log_a x$, $\log_a x' = n\log_a x$, $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$	ロ. いずれも抽象概念の間に成り立つ法則である。練習の繰り返しにより公式が記憶され，ついで応用技術が習得され，更に対数計算の便利さが理解される。この各段階に，強度の練習と時日を要し，生徒にとっては難解である。

	エ(ウ)	4.　対数計算 対数表の引き方，指標，仮数の性質の理解	4. 指標と仮数の性質は高度の操作により得られる概念である。指標の決定，仮数の表で端数を求める附表も操作が複雑である。これらの複雑な操作上の規約の裏付けとなる理論も又理解困難なため，誤なく対数計算を行うことは困難である。 また反復練習するに当って，計算が無味乾燥であり，更にまたその間に，指標，仮数の性質を確実に捕えることは困難である。
	ウ(イ)	5.　対数函数 $y=log_{a}x$のグラフ	5. x，y の交換により $y=a^{x}$ が得られること，$y=a^{x}$ の曲線と $y=log_{a}x$ の曲線が直線 $y=x$ に関して対称なことからグラフを作製する。これは複雑な二重の操作の結合であるため理解困難である。 思うに反復練習するより他なかろう。学習の際各段階を一歩ずつ確実に理解することが大切で，これが新しい抽象概念を早く具体化させるための補助になるのであるが，この学習過程が困難を伴う。